

Федеральное агентство научных организаций  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
**Пермский федеральный исследовательский центр  
Уральского отделения  
Российской академии наук**

Принято на заседании  
Объединенного ученого совета  
ПФИЦ УрО РАН  
Протокол № 7  
«24» сентября 2019 г.

**Утверждаю**  
Директор ПФИЦ УрО РАН  
Чл.-корр. РАН А.А. Барях

«24» сентября 2019 г.



**ФОНД  
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в  
термодинамике сплошной среды»**

Направление 01.06.01 Математика и механика  
(код и наименование)

**Профиль программы аспирантуры** Механика деформируемого твердого тела (01.02.04)

**Квалификация выпускника:** Исследователь. Преподаватель-исследователь

**Форма обучения:** Очная

**Курс:** 1                      **Семестр(ы):** 1, 2

**Трудоёмкость:**

Кредитов по рабочему учебному плану: 3 ЗЕ

Часов по рабочему учебному плану: 108 ч

**Виды контроля:**

Экзамен: - **нет**      Зачёт: **2**      Курсовой проект: - **нет**      Курсовая работа: - **нет**

Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в термодинамике сплошной среды» разработан на основании:

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утверждённого приказом Министерства образования и науки Российской Федерации «30» июля 2014 г. номер приказа «866» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации);
- компетентностной модели выпускника ООП по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), программы аспирантуры Механика деформируемого твердого тела (01.02.04), утверждённой «24» сентября 2019 г.;
- базового учебного плана очной формы обучения по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), программы аспирантуры Механика деформируемого твердого тела (01.02.04), утверждённой «24» сентября 2019 г.;
- примерной программы кандидатского экзамена, утвержденного Министерством образования и науки Российской Федерации;
- положением о формировании фонда оценочных средств, принятого на заседании Объединенного ученого совета ПФИЦ УрО РАН, протокол № 4 от 11.05.2018, утверждено распоряжением директора ПФИЦ УрО РАН №21 от 14.05.2018.

Разработчик д.ф.-м.н., профессор Свистков Свистков А.Л.  
(учёная степень, звание) (подпись) (инициалы, фамилия)

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор АА Роговой А.А.  
(учёная степень, звание) (подпись) (инициалы, фамилия)

Согласовано: д.ф.-м.н., профессор Плехов Плехов О.А.  
Зам. директора (учёная степень, звание) (подпись) (инициалы, фамилия)  
ИМСС УрО РАН  
по науке

# 1. Перечень формируемых частей компетенций, этапы их формирования и контролируемые результаты обучения

## 1.1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Согласно профессиональной образовательной программе аспирантуры по направлению подготовки: 01.06.01 – Математика и механика, направленность Механика деформируемого твердого тела (01.02.04) учебная дисциплина Б1.В.ДВ2.2 «Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в термодинамике сплошной среды» предназначена для формирования знаний математического аппарата, позволяющего работать с термодинамикой нелинейных диссипативных сред в условиях конечных деформаций, освоение операторной школы тензорного исчисления и приобретения навыков ее использования в практических приложениях, получение знаний, позволяющих ориентироваться в современных школах тензорного исчисления, развитие способности самостоятельного построения определяющих уравнений сред со сложным реологическим поведением. Математический аппарат применяется в рамках курса для вывода следствий, связанных с объективной формулировкой определяющих уравнений сложных деформируемых сред.

В процессе изучения дисциплины «Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в термодинамике сплошной среды» аспирант формирует части следующих компетенций:

– ПК-1 (способность проводить научные исследования в области механики деформируемого твёрдого тела);

– ПК-2 (способность получать численные и аналитические решения краевых задач для прогноза поведения деформируемых твердых тел различной природы при разнообразных воздействиях).

## 1.2 Этапы формирования компетенций.

Учебный материал дисциплины осваивается за 1-й и 2-й семестр, в которых предусмотрены аудиторские занятия, практическая и самостоятельная работа аспирантов. При изучении дисциплины формируются компоненты компетенций знать, уметь, владеть, указанные в дисциплинарных картах соответствующих компетенций в РПД. Уровень освоения дисциплины проверяется по результатам приобретения указанных компонент компетенций.

### Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)

Контролируемые результаты обучения дисциплине (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Вид контроля			
	1 семестр		2 семестр	
	Текущий	Зачёт	Текущий	Зачёт
<b>Освоенные знания</b>				
<b>3 ПК-1</b> Знать методологию, конкретные методы и приемы научно-исследовательской работы в области механики деформируемого твёрдого тела (основные современные теории процессов деформирования и разрушения, взаимодействия структуры материала и внешних полей различной природы и интенсивности, методы описания процессов деформирования, фазовых и структурно-кинетических переходов в материале)	УО	ТВ	УО	ТВ

<b>3 ПК-2</b> Знать методологию, конкретные методы и приемы решения краевых задач, встречающихся при исследовании проблем механики деформируемого твёрдого тела			УО	ТВ
<b>Освоенные умения</b>				
<b>У ПК-1</b> Уметь ставить задачу и применять современные методы (численные, аналитические, экспериментальные) для решения задач в области механики деформируемого твёрдого тела с учётом эволюции структуры материала и внешних воздействий различной природы и интенсивности	ОТЗ	ПЗ		ПЗ
<b>У1 ПК-2</b> Уметь ставить задачу и проводить численные и аналитические исследования краевых задач для прогноза поведения деформируемых твердых тел различной природы при разнообразных воздействиях	ОТЗ	ПЗ		ПЗ
<b>У2 ПК-2</b> Уметь применять теоретические знания по методам сбора, хранения, обработки и передачи информации	ОТЗ	ПЗ		ПЗ
<b>Приобретенные владения</b>				
<b>В ПК-1</b> Владеть - методами решения задач и анализа проблем механики деформируемого твёрдого тела	ОТЗ	ПЗ		ПЗ
<b>В ПК-2</b> Владеть методами самостоятельного анализа краевых задач для различных классов уравнений, практическими навыками и знаниями использования современных исследовательских и проектных технологий	ОТЗ	ПЗ		ПЗ

УО - устный опрос; ТВ - теоретический вопрос; ОТЗ - отчет о творческом задании; ПЗ - практическое задание с учетом темы научно-исследовательской деятельности.

Устный опрос - средство контроля, организованное для выяснения объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Творческое задание - выступление с подготовленным в ходе самостоятельной работы материалом на тему научно-исследовательской деятельности, позволяющее диагностировать умения интегрировать знания различных областей.

Итоговой оценкой освоения дисциплинарных частей компетенций (результатов обучения по дисциплине) является аттестация в виде зачета, проводимая с учетом результатов текущего контроля.

## **2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.**

В процессе формирования заявленных компетенций используются различные формы оценочных средств текущего и промежуточного контроля. Компоненты дисциплинарных компетенций, указанные в дисциплинарных картах компетенций в рабочей программе дисциплины, выступают в качестве контролируемых результатов обучения в рамках освоения учебного материала дисциплины: знать, уметь, владеть.

### **2.1 Текущий контроль**

Текущий контроль для комплексного оценивания показателей **знаний, умений и владений** дисциплинарных частей компетенций проводится в форме защиты отчета о творческом задании и устного опроса.

### Шкала оценивания уровня знаний, умений и владений при устном опросе

Уровень освоения	Критерии оценивания уровня освоения учебного материала
<i>Зачтено</i>	Аспирант достаточно свободно использует фактический материал по заданному вопросу, умеет определять причинно-следственные связи событий, логично и грамотно с использованием профессиональной терминологии обосновывает свою точку зрения.
<i>Не зачтено</i>	Аспирант демонстрирует полное незнание материала или наличие бессистемных, отрывочных знаний, связанных с поставленным перед ним вопросом, при этом не ориентируется в профессиональной терминологии.

### Критерии оценивания защиты отчета о творческом задании

Уровень освоения	Критерии оценивания уровня освоения учебного материала
<i>Зачтено</i>	Аспирант успешно выполнил творческое задание, показав в целом систематическое или сопровождающееся отдельными ошибками <b>применение</b> полученных <b>знаний и умений</b> , аспирант ориентируется в изложенном материале.
<i>Не зачтено</i>	Аспирант демонстрирует полное незнание материала или наличие бессистемных, отрывочных знаний, связанных с поставленным перед ним вопросом, при этом не ориентируется в профессиональной терминологии.

## 2.2 Итоговая аттестация

Допуск к итоговой аттестации осуществляется по результатам текущего контроля. Аттестация проводится в виде зачета по дисциплине в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос (ТВ) для проверки знаний и практическое задание (ПЗ) для проверки умений и владений заявленных дисциплинарных частей компетенций.

Билет формируется таким образом, чтобы в него попали вопросы и практические задания, контролирующие уровень сформированности всех заявленных дисциплинарных компетенций (Приложение 1).

Оценка результатов обучения дисциплине в форме уровня сформированности компонентов **знать, уметь, владеть** заявленных дисциплинарных компетенций проводится по шкале оценивания «зачтено», «не зачтено» путем выборочного контроля во время зачета.

### Шкала оценивания уровня знаний, умений и владений на зачете

Оценка	Критерии оценивания
<i>Зачтено</i>	Аспирант продемонстрировал сформированные или содержащие отдельные пробелы знания при ответе на теоретический вопрос билета. Показал сформированные или содержащие отдельные пробелы <b>знания</b> в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно. Аспирант выполнил практическое задание билета правильно или с небольшими неточностями. Показал отличные или сопровождающиеся отдельными ошибками <b>применение навыков</b> полученных знаний и

	<b>умений</b> при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно.
<i>Не зачтено</i>	При собеседовании с преподавателем аспирант продемонстрировал фрагментарные <b>знания</b> . При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неправильных ответов. При выполнении практического задания аспирант продемонстрировал частично усвоенное <b>умение</b> и <b>применение</b> полученных навыков при решении профессиональных задач в рамках учебного процесса. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неточностей.

При оценке уровня сформированности дисциплинарных частей компетенций в рамках выборочного контроля при сдаче зачета считается, что полученная оценка проверяемой в билете дисциплинарной части компетенции обобщается на все дисциплинарные части компетенций, формируемых в рамках данной учебной дисциплины. Общая оценка уровня сформированности всех дисциплинарных частей компетенций проводится с учетом результатов текущего контроля в виде интегральной оценки по системе оценивания «зачтено» и «не зачтено».

### Оценочный лист уровня сформированности дисциплинарных частей компетенций на зачете

Итоговая оценка уровня сформированности дисциплинарных частей компетенций	Критерии оценивания
<i>Зачтено</i>	Аспирант получил по дисциплине оценку «зачтено»
<i>Не зачтено</i>	Аспирант получил по дисциплине оценку «не зачтено»

### 3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Задания для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание:

1. Уровня освоения теоретических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. Степени готовности аспиранта применять теоретические знания и профессионально значимую информацию и оценивание сформированности когнитивных умений.
3. Приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Задания для оценивания когнитивных умений (знаний) должны предусматривать необходимость проведения аспирантом интеллектуальных действий:

- по дифференциации информации на взаимозависимые части, выявлению взаимосвязей между ними и т.п.;
- по интерпретации и творческому усвоению информации из разных источников, ее системного структурирования;
- по комплексному использованию интеллектуальных инструментов учебной дисциплины для решения учебных и практических проблем.

При составлении заданий необходимо иметь в виду, что они должны носить практико-ориентированный комплексный характер и формировать закрепление осваиваемых компетенций.

#### **4. Типовые контрольные вопросы и задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

##### **4.1 Типовые вопросы для текущего контроля по дисциплине:**

1. Что представляет собой тензор второго ранга в рамках рассматриваемой школы тензорного исчисления при использовании ее в термодинамике сплошной среды?

2. Равны ли тензоры  $A$  и  $B$ , если они определяются формулами:  $A = ca \otimes b$  и  $B = a \otimes cb$ , где  $c$  – скаляр,  $a$  и  $b$  – векторы?

3. Какую операцию в рамках рассматриваемой школы тензорного исчисления означает точка, поставленная между тензорами второго ранга?

4. Дайте определение вырожденному тензору.

5. Какой физический смысл у тензора градиента деформации?

6. Что можно сказать о тензоре скоростей деформации?

7. Изменится ли индифферентный тензор если к рассматриваемому движению тела добавить дополнительно перемещение центра масс и поворот относительно этого центра масс как абсолютно твердого тела?

8. Для какого объема дается в термодинамике формулировка первого и второго начал термодинамики?

9. Какое требование объективности используется для получения основных трех следствий (уравнения неразрывности, движения и более простой формулировки закона сохранения энергии) из первого начала термодинамики?

10. Почему в формулировке второго начала термодинамики Клаузиуса-Дюгема использован знак неравенства?

11. Является ли закон передачи тепла из горячих областей в холодные следствием математических выкладок, получаемых при анализе первого и второго начал термодинамики?

12. Для каких материалов используется потенциал Муни-Ривлина?

13. Существует ли операция транспонирования вектора трехмерного евклидова пространства?

14. Существует ли операция деления вектора трехмерного евклидова пространства на другой вектор этого пространства?

15. Можно ли сказать, чему равно скалярное умножение симметричного тензора на антисимметричный?

16. О чем говорит теорема о полярном разложении градиента деформации?

17. Какой физический смысл у тензора напряжений Коши?

18. Какие плотности энергии учитываются в исходной формулировке первого начала термодинамики?

19. Можно ли вывести в качестве следствия уравнение теплопроводности для упругой среды из первого и второго начал термодинамики и требований объективности математической модели?

20. Используются ли представления о ядрах релаксации в дифференциальных моделях термодинамики вязкоупругой среды, работающей в условиях конечных деформаций?

##### **4.2 Перечень тем творческих заданий:**

1. Взаимные векторные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектора. Связь между ко- и контравариантными компонентами вектора. Выражение скалярного произведения через ко- и контравариантные компоненты.

2. Выражение векторного произведения двух векторов в косоугольной системе координат. Углы Эйлера.

3. Понятие вектор-функции скалярного аргумента. Годограф вектор-функции. Производная вектор-функции, правила дифференцирования. Интегрирование вектор-функции.

4. Скалярные и векторные поля. Поверхности уровня. Векторные линии.

5. Производная по направлению, градиент скалярного поля.

6. Понятие циркуляции векторного поля.

7. Оператор Гамильтона и его применение.

8. Потенциальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля.

9. Соленоидальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля.

10. Лапласово векторное поле. Потенциал лапласова векторного поля.

11. Теорема о разложении непрерывного векторного поля на потенциальное и соленоидальное.

12. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе.

#### **4.3 Перечень тем практических занятий:**

1. Использование аналитической механики для описания механического поведения системы материальных точек с наложенными стационарными связями.

2. Применение аналитической механики для моделирования состояния поведения молекулярных систем.

#### **4.4 Типовые контрольные вопросы для оценивания знаний на зачете по дисциплине:**

1. Понятие тензора. Собственные векторы и собственные числа тензора. Ортопроектор. Произведение, транспонирование тензоров.

2. Векторные и тензорные равенства. Представление симметричного тензора и ортогонального тензора в виде суммы трех слагаемых. Ось поворота. Угол поворота. Полярное разложение обратимого тензора.

3. Дифференцирование скалярной, векторной и тензорной функций по скалярным, векторным и тензорным аргументам.

4. Дивергенции векторных и тензорных функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Левый и правый тензоры Коши-Грина. Левый и правый тензоры растяжения. Физический смысл собственных чисел и собственных векторов правого и левого тензоров растяжения.

5. Индифферентные тензоры. Левый и правый тензор Коши-Грина. Вычисление производных с помощью тензора скоростей растяжения.

6. Температура, энтропия и поток энтропии с точки зрения статистической механики.

7. Уравнения Гамильтона. Фазовое пространство.

8. Гипотеза о максимальной мере хаоса в стационарном состоянии. Распределение Гиббса.

9. Растяжение свободно-сочлененной цепи. Энтропийный характер упругих свойств эластомерных материалов.

10. Первый закон термодинамики, его следствия.

11. Законы сохранения массы, движения, и новая формулировка закона сохранения энергии.

12. Второй закон термодинамики. Неравенство диссипации.

13. Несжимаемые среды. Запись условия несжимаемости с помощью тензора скоростей растяжения. Учет несжимаемости в определяющих уравнениях среды. Вывод уравнения

теплопроводности для газа, идеальной жидкости, ньютоновской жидкости, упругого тела, упругого тела с дополнительными параметрами состояния.

14. Потенциалы свободной энергии гиперупругих несжимаемых материалов (Трелоара, Муни-Ривлина, Джента).

15. Модель пластического течения материала в условиях конечных деформаций.

16. Модель деформируемой жидкости (расплав полимера). Сдвиговое течение расплава полимера.

17. Дифференциальные и интегральные модели вязкоупругих сред.

18. Вариационная постановка задачи нахождения полей напряжений для упругого сжимаемого и несжимаемого материала.

#### 4.5 Типовые контрольные вопросы для оценивания умений и владений на зачете по дисциплине:

1. Сформулировать постановку задачи об определении ковариантной производной тензорного поля. Доказать, что частные производные тензорного поля по координатам, вообще говоря, не образуют тензорное поле.

2. Сформулировать постановку задачи о параллельном переносе вектора вдоль кривой. Записать систему дифференциальных уравнений, определяющих параллельный перенос вектора вдоль кривой, сформулировать для нее задачу Коши.

3. Записать систему дифференциальных уравнений для геодезических линий, сформулировать для нее задачу Коши.

4. Докажите что:

$$а) \int (\mathbf{A}, \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{B})) - (\mathbf{B}, (\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A})))dV = \int ([\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{A}] - [\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{B}])dS$$

$$б) \int \mathbf{A}dV = 0, \text{ если внутри объёма } V \text{ векторное поле } \mathbf{A} \text{ удовлетворяет условию } \text{div}\mathbf{A} = 0,$$

а на границе объёма условию  $\mathbf{A}_n = 0$ .

5. Докажите тождество Лагранжа:

$$([\vec{a} \times \vec{n}] \cdot [\vec{c} \times \vec{m}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{a} \cdot \vec{m}) \\ (\vec{n} \cdot \vec{c}) & (\vec{n} \cdot \vec{m}) \end{vmatrix}$$

6. Доказать тождество Якоби:

$$|\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]| + |\vec{c} \times [\vec{a} \times \vec{b}]| + |\vec{b} \times [\vec{c} \times \vec{a}]| = 0$$

7. Доказать, что при поворотах декартовой системы координат определитель матрицы поворота равен +1.

8. Пусть заданы три произвольных некопланарных вектора  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ , которые выбираются в виде системы координат. Требуется разложить по ним вектор  $\mathbf{b}$ . Задача сводится к определению компонентов  $b^1, b^2, b^3$  из системы трёх скалярных уравнений, полученных проектированием выражения  $\mathbf{b} = b^1\mathbf{b}_1 + b^2\mathbf{b}_2 + b^3\mathbf{b}_3$  на оси этого базиса.

9. Пусть заданы углы между направлениями координат системы со штрихами и системы без штрихов в следующей таблице:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1'$	$135^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$
$x_2'$	$90^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$
$x_3'$	$45^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$

Определить коэффициенты преобразования  $a_{ij}$  и показать, что выполнены условия ортогональности.

10. Показать, что тензор второго ранга, заданный в виде суммы  $N$  диад, можно свести к сумме трёх членов, если использовать базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в качестве а) первых сомножителей, б) в качестве вторых сомножителей в диадах.

11. Докажите теорему, что если  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(r)$  – тензорное поле  $n$ -го ранга, то величина  $\partial/\partial x_i T_{i_1 i_2 \dots i_n}$  есть тензорное поле  $n+1$ -го ранга.
12. Докажите теорему Грина.
13. Докажите теорему Стокса.
14. Пусть  $T_{ik} \equiv p_{ik}$  – тензор напряжений в упругом теле. Выделив в этом теле некоторую поверхность, определите равнодействующую  $\mathbf{P}$  всех сил напряжения.
15. Докажите теорему Остроградского-Гаусса в тензорном поле.
16. Докажите, что если симметризовать тензор по паре нижних индексов, то полученный тензор будет симметричен по этим индексам. Докажите аналогичное утверждение для альтернации по паре нижних индексов.
17. Докажите, что любой тензор  $C$  типа  $(2,0)$  можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического тензора.
18. Решите задачу о раздувании несжимаемой бесконечной среды, содержащей сферическую пору внутренним давлением.



Институт механики сплошных сред Уральского  
отделения Российской академии наук" - филиал  
ФГБУН Пермский федеральный  
исследовательский центр УрО РАН

**Направление подготовки**  
**01.06.01 «Математика и механика»**  
**Профиль аспирантуры**  
**«Механика деформируемого твердого тела»**

**Дисциплина**  
**«Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в**  
**термодинамике сплошной среды»**

**БИЛЕТ №1**

1. Понятие тензора. Собственные векторы и собственные числа тензора. Ортопроектор. Произведение, транспонирование тензоров. (*контроль знаний*).
2. Сформулировать постановку задачи об определении ковариантной производной тензорного поля. Доказать, что частные производные тензорного поля по координатам, вообще говоря, не образуют тензорное поле. (*контроль умений и навыков*).

Преподаватель

(подпись)

А.Л. Свистков

«                    »

20\_\_ г.