

«ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН» – ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
НАУКИ ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



**Пьянкова Марина Анатольевна**

**ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ ЛИНИИ КОНТАКТА НА ПОВЕДЕНИЕ КАПЛИ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Специальность 1.1.9 — «Механика жидкости, газа и плазмы»

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
Алабужев Алексей Анатольевич

Пермь, 2023

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	3
<b>ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	8
<b>1.1. Электросмачивание</b> .....	8
<b>1.2. Вибрационное воздействие</b> .....	14
<b>ГЛАВА 2. ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ</b> .....	19
<b>2.1. Постановка задачи</b> .....	19
<b>2.2. Однородные различающиеся пластины</b> .....	24
<b>2.3. Неоднородные одинаковые пластины</b> .....	30
<b>2.4. Неоднородные различающиеся пластины</b> .....	35
<b>ГЛАВА 3. НЕОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ</b> .....	41
<b>3.1. Постановка задачи</b> .....	41
<b>3.2. Однородные различающиеся пластины</b> .....	43
<b>3.3. Неоднородные одинаковые пластины</b> .....	48
<b>3.4. Неоднородные различающиеся пластины</b> .....	54
<b>ГЛАВА 4. ВИБРАЦИОННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ</b> .....	61
<b>4.1. Постановка задачи</b> .....	61
<b>4.2. Собственные колебания</b> .....	63
<b>4.3. Вынужденные колебания</b> .....	70
<b>ГЛАВА 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ КРУГОВЫХ ВИБРАЦИЯХ</b> .....	79
<b>5.1. Постановка задачи</b> .....	79
<b>5.2. Вынужденные колебания одиночной капли</b> .....	81
<b>5.3. Устойчивость вынужденных колебаний</b> .....	83
<b>5.4. Ансамбль капель</b> .....	86
<b>Заключение</b> .....	90
<b>Список литературы</b> .....	94

## Введение

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** При изучении динамики многофазных сред большое внимание уделяется движению линии контакта трех сред. Это обусловлено не только фундаментальным интересом, но и практическим использованием в технологических процессах. В настоящее время хорошо изучено установившееся движение по достаточно или полностью смачиваемой подложке. В этом случае жидкость растекается по подложке либо за счет межчастичного взаимодействия (например, ван-дер-ваальсово притяжение молекул жидкости к подложке), либо за счет статических внешних воздействий (сила тяжести, центробежная сила и т.д.). Есть существенное продвижение в исследованиях при более интенсивном движении контактной линии, а также для конечных значений динамического краевого угла. Существенной проблемой остается изучение движения по неоднородной (шероховатой) поверхности. Здесь процесс исследований ещё далек до завершения.

При рассмотрении высокочастотного осциллирующего движения линии контакта ситуация значительно отличается от рассмотренного выше случая поступательного движения. Теперь влияние вязких сил становится значимым лишь в тонких пограничных слоях вблизи твердой поверхности, а движение линии контакта определяется в основном быстроосциллирующим полем давления. Следовательно, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре, учитывая вязкость лишь внутри динамического пограничного слоя вблизи твердой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла. В этом случае неоднородность поверхности вносит ещё более важный вклад в динамику линии контакта и создает значительные трудности при описании поведения краевого угла. Дополнительной сложностью является действие внешней неоднородной силы или движение в неоднородном силовом

поле. Суммарное влияние всех перечисленных факторов существенно осложняет изучение и моделирование динамики контактной линии и требует дальнейших исследований.

**Целью** данной работы является изучение динамики капли жидкости, зажатой между двумя неоднородными пластинами, в неоднородном переменном электрическом поле. Необходимо определить влияние неоднородностей поверхности пластин и электрического поля на динамическую форму капли, амплитуду колебаний боковой поверхности и краевых углов капли. Дополнительно исследовать влияние осесимметричных или круговых вибраций на такую каплю. Для достижения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

1. Исследовано влияние различающихся однородных или неоднородных пластин на динамику капли в однородном или неоднородном переменном электрическом поле.
2. Исследовано влияние свойств поверхностей на динамику капли под действием осесимметричных вибраций.
3. Исследованы вынужденные колебания, их устойчивость и групповая динамика ансамбля цилиндрических капель под действием круговых вибраций.

**Научная новизна** работы заключается в том, что в ней:

1. Впервые рассмотрены собственные и вынужденные колебания цилиндрической капли, окруженной другой жидкостью и сжатой между двумя параллельными поверхностями, как однородными, так и неоднородными, при изучении колебаний капли в однородном электрическом поле. Получены уравнения для произвольного случая неоднородности поверхности. Найдены выражения, описывающее течение в капле и окружающей жидкости. Построены амплитудно-частотные характеристики, форма боковой поверхности и контактной линии. Показано, что в случае разных однородных пластин возбуждаются как четные, так и нечетные гармоники. В случае неоднородных пластин возбуждаются азимутальные моды, спектр которых определяется

неоднородностью. В них энергия передается из осесимметричной моды из-за неоднородности поверхностей.

2. Впервые рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли в неоднородном переменном электрическом поле. Показано, что в этом случае возбуждаются азимутальные моды, энергия в которые закачивается напрямую из внешнего поля.

3. Впервые найдено решение, описывающее течение в цилиндрической капле, зажатой между разными неоднородными пластинами и в окружающей ее жидкости при учете динамики контактного угла в поле осесимметричных вибраций.

4. Впервые исследована устойчивость вынужденных колебаний цилиндрической капли со свободной контактной линией и окруженной другой жидкостью в поле круговых вибраций. Исследована параметрическая неустойчивость для произвольной капли в ансамбле взаимодействующих капель.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Полученные результаты могут быть использованы: во-первых, для апробации других теоретических моделей; во-вторых, для оценки постоянной смачивания по сравнению с экспериментальными данными, а также для исследования неоднородности пластин или электрического поля. Также они могут быть полезны для изучения поведения различных включений в слое жидкости между твердыми поверхностями при наличии вибраций, для разработки методов управления для разработки методов управления ансамблями взаимодействующих между собой капель. Резонансные эффекты могут быть использованы для улучшения перемешивания в капле жидкости для микрожидкостных устройств. Возможно создание методов изучения физических параметров и свойств жидкости бесконтактным способом.

Исследования, представленные в настоящей диссертации, были поддержаны грантами РФФИ 14-21-00090 (Гл. 2-3), РФФИ № 20-31-90104 (Гл. 4) и РФФИ № 19-42-04120 (Гл. 5).

**Методология и методы диссертационного исследования.** Использовался метод малого параметра при исследовании малоамплитудных колебаний капли. Решение во всех задачах отыскивалось в виде рядов Фурье по базисным функциям оператора Лапласа. Для описания скорости движения линии контакта использовалось эффективное граничное условие.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Различающиеся поверхности пластин приводят к возбуждению как нечетных, так и четных гармоник. Неоднородность поверхности пластин или электрического поля приводит к возбуждению азимутальных мод собственных колебаний капли, что выражается в появлении дополнительных резонансных пиков на частотах этих мод.

2. Краевой угол меняется монотонным образом и с увеличением амплитуды выходит на постоянное значение. На резонансной частоте вид зависимости краевого угла не изменяется. Изменение частоты и параметра смачивания существенным образом влияет на значения краевого угла. Зависимости краевого угла от амплитуды внешнего воздействия в случае неоднородного электрического поля качественно схожи с аналогичными в случае однородного поля.

3. Как осесимметричные вибрации, так и однородное электрическое поле приводят к возбуждению четных и нечетных гармоник колебаний формы капли в случае различающихся однородных пластин.

4. Для ансамбля капель в поле круговых вибраций вблизи границы области неустойчивости происходит затухание колебаний, т.е. нелинейность стабилизирует систему. Для первых мод наблюдается режим бегущей волны. В общем случае существует режим синхронизации, капли ведут себя одинаково, режим бегущей волны разрушается.

**Достоверность результатов,** изложенных в диссертационной работе, подтверждается сравнением с известными ранее работами и согласованием результатов, полученных разными методами и с использованием различных

подходов. Например, значения резонансных частот внешнего поля хорошо согласуются со значениями соответствующих частот собственных колебаний.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях:

- «XXI Зимняя школа по механике сплошных сред», Пермь, 2019;
- «XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики», Уфа, 2019;
- XIX научная школа «Нелинейные волны - 2020», Нижний Новгород, 2020;
- International Symposium «NON-EQUILIBRIUM PROCESSES IN CONTINUOUS MEDIA», Perm, 2021;
- «XXII Зимняя школа по механике сплошных сред», г. Пермь, 2021.

**Публикации.** Материалы диссертации изложены в 10-ти работах [1 – 10]: 7 работ индексированы в международных базах данных Scopus и Web of Science [1 – 7], 3 работы в журналах из списка ВАК [8 – 10].

**Личный вклад автора.** Автором работы выведены и аналитически исследованы амплитудные уравнения и написаны программы численного расчета. Постановка задач, обсуждение и анализ результатов проведены совместно с научным руководителем.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Нестационарное движение контактной линии (речь идет о линии контакта трех несмешивающихся фаз – твердой, жидкой и газообразной) встречается во многих природных и технологических процессах [11 – 13]. Одним из направлений исследований является изучение возможностей управления каплями на подложке, например, с помощью вибраций [14 – 16], электрического поля [17 – 19] или поверхностных свойств подложки [20, 21]. Важно отметить, что внешние силовые поля могут быть не только эффективным способом управления включениями, но и являться побочным эффектом работы технических установок. Рассматриваются и другие системы с каплями, например, сферическая капля жидкости, закрепленная с помощью кольца в экваториальной плоскости [22, 23]. К другому направлению относится исследование разрывов тонких пленок [24 – 26] – образование сухих пятен или отдельных капель, что может привести к негативным последствиям. Так, образование сухих пятен ухудшает качество получаемого покрытия; свободные от жидкости участки поверхности практически исключаются из процесса теплообмена, что резко снижает эффективность теплообменников и может привести к выводу их из строя. Такие объекты (сухие пятна, капли и так далее) обладают линией контакта на границе раздела трех сред, поэтому очень важно понять поведение контактной линии при наличии внешнего воздействия. Отметим также, что контактная линия имеет место и при других вариациях взаимодействия трех несмешивающихся сред, например, твердая-жидкая-жидкая.

## 1.1. Электросмачивание

В последние годы был проявлен большой интерес к динамике капель и пузырьков на подложке в электрическом поле, как одному из способов изменения смачивания – электросмачивание (ЭС, electrowetting) [17, 27 – 31]. Процесс электросмачивания (ЭС) является перспективным физическим механизмом и многообещающим инструментом для контроля и манипулирования



микрожидкостными объектами (такими как частицами, каплями, пузырьками) [17, 27].

Особый случай электросмачивания на диэлектрической подложке (ЭСНД, *electrowetting-on-dielectric*) не менее важен [30 – 33]. В настоящее время ЭСНД нашел широкое применение в различных областях, таких как электронные жидкие линзы с переменным фокусом [34, 35], цифровые (капельные) микрофлюидные устройства для биоанализа (лаборатория на чипе) [17 – 19, 36, 37] и др. В большинстве микроустройств используется либо капля на подложке, либо капиллярный мостик (*liquid bridge*) [17, 38], он является хорошо известным испытательным стендом, используемый для анализа явлений, в которых преобладает поверхностное натяжение [39, 40].

Схематические изображения типичных устройств с использованием ЭСНД приведены на рис. 1.1.

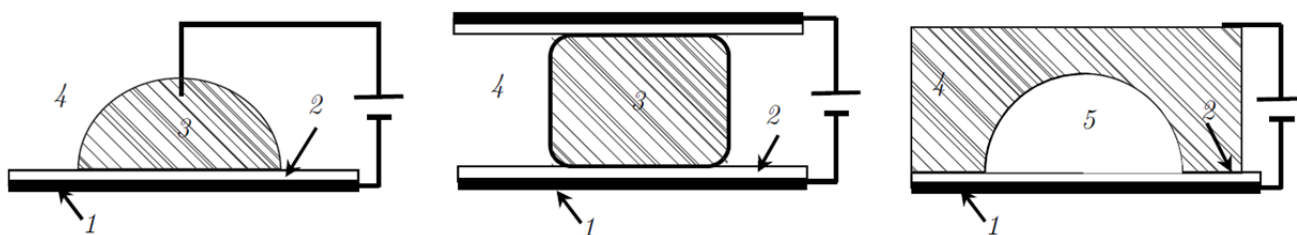


Рисунок 1.1 — Типичные схематические устройства

1 – электрод, 2 – диэлектрический слой, 3 – капля, 4 – жидкость, 5 – пузырек

При подаче напряжения происходит поляризация диэлектрика, что приводит к изменению состояния равновесия из-за появления дополнительной силы (сила Кулона), которая «растягивает» каплю вдоль твердой поверхности. Это приводит к изменению краевого угла капли. На основе этого механизма можно заставить каплю двигаться, если подводить напряжение только к части основания капли. Такой эффект управления каплями с помощью ЭСНД используется при проведении биологического или химического анализа в микроустройствах, например, капель крови с реагентами [41, 42].

Важной проблемой исследований в этой области является анализ движения линии контакта трех сред между поверхностью капли и твердой подложкой, а также изменения краевого угла и поверхностного натяжения [17, 28, 31, 37, 38].

В большинстве теоретических работ по электросмачиванию описание краевого угла  $\mathcal{G}$  между поверхностью капли и подложкой определяется из уравнения Юнга-Липпманна [17, 30, 43]:

$$\cos \mathcal{G} = \cos \mathcal{G}_0 + E_w, \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{G}_0$  – контактный угол без приложенного напряжения – равновесный краевой угол, который определяется уравнением Юнга,  $\cos \mathcal{G}_0 = \sigma_{ic}^{-1}(\sigma_{ip} - \sigma_{cp})$ ,  $E_w = 0.5CV^2\sigma_{ic}^{-1}$  – электрокапиллярное число (оно представляет собой отношение электрической силы к силе поверхностного натяжения),  $C = \varepsilon\varepsilon_0d^{-1}$  – емкость на единицу площади,  $\sigma$  – межфазное поверхностное натяжение между каплей проводящей жидкости ( $c$ ), окружающей жидкостью ( $i$ ) и диэлектрической поверхностью ( $p$ ),  $V$  – значение приложенного напряжения постоянного электрического тока,  $d$  – толщина диэлектрического слоя,  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon$  – коэффициент диэлектрической проницаемости вакуума и относительная проницаемость.

В большинстве экспериментов, описанных в работах [38, 47, 48] используется капля раствора электролита KCl концентрации  $10^{-3}$ –1 М (электропроводность от  $10^{-2}$  –  $10$  Ом $^{-1}$ м $^{-1}$ ) объемом 1 мкл на тефлоновой подложке толщиной  $\sim 0,1$  мм. Окружающая среда – воздух. В этом случае  $E_w \approx 10^{-6}V^2$ . Типичные напряжения достигают 1 кВ.

Для переменного электрического поля вместо  $V^2$  в уравнении (1.1) было предложено использовать квадрат эффективного напряжения  $U^2$  [17]. По определению это такое напряжение постоянного тока, которое на такой же резистивной нагрузке выделит такую же мощность, как измеряемое переменное напряжение.

Однако данное условие (1.1) плохо описывает поведение краевого угла в переменных полях и при больших потенциалах [17, 27, 28, 30, 31]. Полученные

экспериментальные результаты оказались отличными от теоретических предсказаний этого уравнения. На рис. 1.2. представлена экспериментальная зависимость краевого угла от напряжения для полусферической капли на подложке [31]. Данные, полученные из эксперимента, качественно отличаются от теоретической модели с использованием уравнения Юнга-Липпманна (1.1), [17, 27, 28, 30, 31]. Из анализа уравнения (1.1), можно было бы ожидать, что краевой угол будет равен нулю сразу после некоторого критического значения напряжения (полное смачивание и краевой угол стремятся к нулю), но на самом деле экспериментальное значение краевого угла всегда конечно [17, 30, 46].

Для капли на подложке в работе [31] описывали экспериментальную кривую зависимости угла от напряжения (см. рис. 1.2) при малых напряжениях функцией  $V^2$ , а при больших –  $V^{-2}$ . В недавней работе [49] аппроксимировали эту кривую функцией Ланжевена  $L(x) = \text{ch}(x) - (3x)^{-1}$  при описании динамики зажатой капли. Для непроводящей капли масла в воде [50] экспериментально измеряли коэффициент трения  $\lambda$  контактной линии о подложку:  $\lambda \bar{u}_c = \sigma_{cp} (\cos \theta_0 - \cos \theta_T)$ , где  $\bar{u}_c$  – средняя скорость линии контакта за промежуток времени  $T$ ,  $\theta_0$  и  $\theta_T$  – начальное и конечное значение краевого угла, соответственно. Показано, что  $\lambda$  не является постоянным и уменьшается с увеличением напряжения. Был также обнаружен необычный эффект отрыва капли от подложки при больших напряжениях.

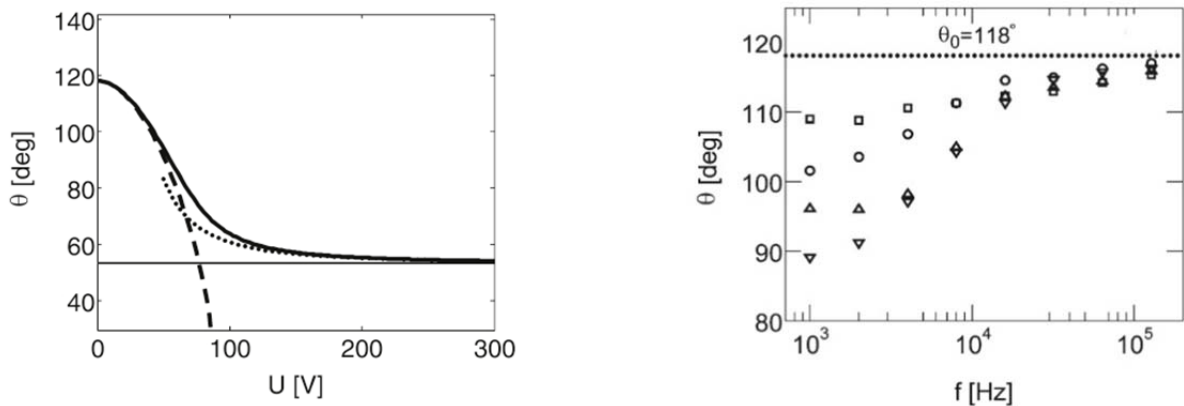


Рисунок 1.2 — Зависимость краевого угла от напряжения для полусферической капли на подложке [31], штриховая линия – условие Юнга-Липпманна, сплошная – экспериментальные данные, 57 В ( $\square$ ), 93 В ( $\circ$ ), 113 В ( $\Delta$ ), 143 В ( $\nabla$ )

Механизм насыщения контактного угла до конца не ясен и все еще является обсуждаемым вопросом [17, 27, 30]. Поэтому важной является проблема построения теоретической модели описания изменения краевого угла при электросмачивании.

Известно, что основную роль в процессе растекания играют процессы взаимодействия жидкости с подложкой, например, вязкость. При рассмотрении высокочастотного колебательного движения контактной линии ситуация отличается коренным образом. В этом случае вязкость значительна только в тонких пограничных слоях вблизи твердой поверхности при высокочастотных вынужденных колебаниях [51 – 54]. Следовательно, течение в целом можно рассматривать как невязкое, в котором эффект вязкости следует учитывать только в динамическом пограничном слое вблизи твердой пластины, а движение контактной линии определяется в основном быстро осциллирующим полем давления. Таким образом, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре, учитывая вязкость лишь внутри динамического пограничного слоя вблизи твердой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла.

Для периодического или квазипериодического движения наиболее часто используемым условием для скорости линии контакта является условие, используемое в работе [52] для исследования стоячих волн между двумя вертикальными стенками:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*, \quad (1.2)$$

где  $\zeta^*$  – отклонение поверхности жидкости от равновесного положения,  $\Lambda^*$  – феноменологическая постоянная (так называемый параметр смачивания или параметр Хокинга),  $\mathbf{k}$  – вектор нормали к твердой поверхности. Условие (1.2) приведено для прямого равновесного краевого угла, но его можно записать и для произвольного значения. Отметим, что условия фиксированной контактной линии

( $\zeta^* = 0$ ) и постоянного краевого угла ( $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$ ) являются предельными случаями граничного условия (1.2). В научных источниках [52 – 54] показано, что условие (1.2) всегда приводит к затуханию колебаний, за исключением двух предельных случаев, указанных выше. Затухание, в первую очередь, обусловлено взаимодействием движущейся контактной линии с неровностями (шероховатостями) ограничивающих поверхностей. Полученные и описанные в работе [52] теоретические результаты качественно совпали с результатами экспериментов в научной публикации [55]. Кроме того, шлифовка поверхности вертикальных стенок увеличила параметр  $\Lambda^*$  в несколько раз, то есть параметр  $\Lambda^*$  характеризует не только взаимодействие жидкости и стенок, но еще и качество обработки поверхности стенок.

Условие (1.2) также использовалось при изучении колебаний капли [15, 53] и пузырька [54] на твердой подложке, капиллярного мостика (цилиндрической капли) [56 – 58], зажатого пузырька [59], поверхностных волн [60, 61] и др. Это условие позволяет нам рассматривать невязкую жидкость, в которой только движение линии контакта приводит к диссипации энергии [15, 52 – 54, 56 – 58]. В источниках [62 – 64] рассматривается более сложное граничное условие, которое устанавливает неоднозначную зависимость краевого угла от скорости линии контакта.

Исходя из условия Юнга-Липпманна (1.1) получается, что отклонение краевого угла пропорционально напряжению в квадрате:  $\cos \vartheta = E_w = \tilde{E}_w V^2$ . Для прямого равновесного краевого угла  $\cos \vartheta_0 = 0$  и, таким образом,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{E_w}{\sqrt{1 - E_w^2}} = \frac{\tilde{E}_w V^2}{\sqrt{1 - \tilde{E}_w^2 V^4}} \approx \tilde{E}_w V^2 + O(V^6) \approx \tilde{E}_w V^2 \sim V^2,$$

где ось  $Oz$  перпендикулярна к твердой поверхности. Внешнее электрическое поле играет роль источника движения и вынуждает контактный угол изменяться во времени. Предположим, что электрическое поле является периодической функцией по времени  $U \sim U_0 \cos(\omega t)$ . Для очень быстрых релаксационных процессов на линии контакта трех сред крайовой угол меняется по закону  $\cos(2\omega t)$

согласно закону Липпманна (1.1), следовательно,  $\partial\zeta/\partial z \sim \text{ctg}\vartheta \approx \tilde{E}_w U^2 \sim \tilde{E}_w U_0^2 \cos(2\omega t)$ . Перенормированное электрокапиллярное число  $E_w = \tilde{E}_w U_0^2$  играет роль эффективной амплитуды электрического поля.

Принимая во внимание более общий случай, когда релаксационные эффекты происходят в масштабах времени, сопоставимых с внешними силами, на основе уравнения Юнга-Липпманна (1.1) и условия Хокинга (1.2) было предложено модифицированное условие Хокинга, изложенное в работах [66, 67], которое используется для описания динамики контактной линии для ЭСНД:

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} = \pm\Lambda^* \left( \frac{\partial\zeta^*}{\partial z^*} + a^* \cos(2\omega^* t^*) \right), \quad (1.3)$$

где  $a^*$  – эффективная амплитуда,  $\omega^*$  – частота электрического поля. Второе слагаемое в граничном условии (1.3) описывает внешнее действие, которое записывается так же, как и в уравнении Юнга-Липпманна, пропорционально напряжению в квадрате.

## 1.2. Вибрационное воздействие

Выше отмечалось, что в переменном электрическом поле при ЭСНД на линию контакта капли действует периодическая сила, которая возбуждает осесимметричные колебания. Аналогичные колебания можно получить и при вибрационном воздействии. Отметим, что вибрации действуют на всю систему в целом, тогда как сила при ЭСНД – только на линию контакта.

Вибрационное воздействие является одним из широко используемых методов управления включениями и активно используется как в исследовательских целях, так и на производстве. Кроме того, вибрации или свободные колебания, которые возникают при однократном непериодическом воздействии, могут являться нежелательным фактором при работе, например, промышленных установок. Все это привлекает внимание ученых на протяжении нескольких десятилетий [14 – 16, 52 – 64, 68].

При вибрационном воздействии, движение линии контакта играет не менее важную роль [11 – 13]. Существует несколько подходов к описанию ее динамики

[11 – 13], мы же сосредоточимся только на работах, использующих граничное условие (1.2).

В работе [15] представлены собственные и вынужденные колебания полусферической капли на твердой подложке, которая совершала продольные колебания. Динамика контактной линии учитывалась через краевое условие (1.2). Колебания формы являются существенными лишь вблизи собственных частот, оставаясь при этом конечными. Обнаружено, что основная частота трансляционной моды зануляется при некотором критическом значении параметра смачивания. Такие «изгибные» колебания существуют только при малых значениях параметра Хокинга. Было показано, что поверхность капли совершает достаточно простые движения: твердотельные поступательные колебания (в случае больших значений параметра Хокинга – свободная контактная линия) и стоячая волна (малых значений – неподвижная линия контакта). В случае нормальных вибраций появлялись бегущие волны на поверхности капли [53]. Колебания формы [15] являются существенными лишь вблизи собственных частот, оставаясь при этом конечными. При нормальных вибрациях [53] в пределе больших значений параметра смачивания наблюдалось бесконечное (пропорционально параметру Хокинга) увеличение амплитуды колебаний.

При исследовании колебаний цилиндрической капли [57] было обнаружено, что основная частота азимутальной моды может обращаться в ноль на некотором интервале значений параметра смачивания. Длина этого интервала увеличивается с ростом геометрического параметра (отношение равновесного радиуса цилиндрической капли к ее высоте). Этот эффект связан с диссипацией энергии при движении контактной линии, т.к. ее длина растет с увеличением геометрического параметра. Частоты гармоник колебаний формы тоже могут обращаться в ноль на некотором интервале значений параметра Хокинга, но длина этого интервала растет с уменьшением геометрического параметра. Это явление связано с увеличением декремента затухания свободных колебаний из-за роста площади боковой поверхности капли. Для вынужденных колебаний

цилиндрической капли [58, 69, 70] большинство эффектов аналогичны, упомянутым выше в работах [15, 53].

В научной публикации [54] представлено исследование по изучению собственных и вынужденных колебаний полусферического пузырька на твердой подложке, которая совершала нормальные колебания в осциллирующем поле давления. Обнаружен эффект пересечения частоты объемных колебаний с гармониками осесимметричной моды. Подобный эффект был обнаружен и для цилиндрического пузырька [59].

Предельные случаи граничного условия (1.2) рассматривались, например, в случае неподвижной линии контакта для капиллярного мостика в работе [40], а для фиксированного краевого угла – в работе [71]. Поведению капли сжимаемой жидкости на твердой подложке, совершающей осесимметричные вибрации с акустической частотой, посвящена работа [72]. Получены решения без учета поверхностных сил и при малом поверхностном натяжении. Их сравнение показало, что при наличии поверхностных сил появляются мелкомасштабные течения вблизи поверхности капли.

В перечисленных выше работах с использованием условия (1.2), параметр Хокинга всегда был действительный и постоянный. В работе [73] было предложено считать это параметр комплексным, т.е. изменение контактной линии не обязательно происходит в одной фазе с краевым углом. Учет неоднородности поверхности при осесимметричных колебаниях цилиндрической капли был предложен в работе [74]. В этом случае параметр Хокинга представляет собой функцию координат в плоскости подложки.

Одним из наиболее часто встречающихся эффектов при вибрационном воздействии является параметрический резонанс, возникающий на удвоенной частоте собственных колебаний [75]. Это особенно актуально при управлении различными включениями (частички, капельки, пузырьки) в жидкости [76 – 78] или при исследовании устойчивости течения жидкости [79 – 84]. В работе [71] исследовались вынужденные колебания цилиндрической капли со свободной линией контакта. При трансляционных линейных вибрациях параметрический



резонанс в такой системе возникает при условии равенства частоты внешнего воздействия сумме частот двух соседних азимутальных мод собственных колебаний. Параметрическая неустойчивость цилиндрической капли с малоподвижной линией контакта исследовалась в работе [78]. Параметрический резонанс для сферической капли возникает на удвоенной частоте собственных колебаний [85], как и для полусферической [76] и цилиндрической [76] при осесимметричных вибрациях.

Групповое поведение ансамбля капель или капельной (пузырьковой) жидкости не менее, а, возможно, даже более важно, чем динамика одиночной капли. Обычно при таком описании используют приближение сплошной среды, т.к. описание каждой капли и ее взаимодействие со всем ансамблем очень громоздко и трудно решается. Ансамбль капель в вибрационном поле также можно представить в виде осцилляторов, взаимодействие между которыми происходит через окружающую жидкость.

Динамика связанных осцилляторов (индивидуальных колебательных систем) демонстрирует гораздо более богатое поведение [86 – 88] по сравнению с одиночным осциллятором. Одним из наиболее интересных эффектов в этих ансамблях является появление коллективных мод, когда хотя бы часть осцилляторов синхронизирована, а среднее поле проявляет нетривиальную динамику. В последнее время особый интерес вызывают ансамбли параметрически возбуждаемых осцилляторов [89 – 92]. Одной из возможных реализаций такой системы является массив джозефсоновских контактов [93, 94]. В работах [89 – 91] проведен линейный анализ неустойчивостей в ансамбле модели, в которой параметрическая модуляция является кусочно-зависимой функцией времени. Параметрическое возбуждение синусоидальным полем в системе передемпфированных параметрических гармонических осцилляторов в пределе сильной и слабой пространственной связи описано в источнике [92]. В работе [95] исследовались неустойчивости и коллективные моды в глобально связанных слабо нелинейных генераторах, параметрически возбуждаемых синусоидальным сигналом. Используя метод усреднения, были получены

уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Анализ этих уравнений позволяет находить линейные неустойчивости, а также рассматривать нелинейные режимы, развивающиеся из этих неустойчивостей. Аналитические результаты подтверждены численными экспериментами. Неустойчивости коллективных мод приводят к режиму бегущей волны, когда интенсивность колебаний каждого осциллятора периодически меняется во времени. При больших амплитудах возбуждения наблюдается замороженное состояние с практически равномерными интенсивностями колебаний. В работах [96 – 99] рассматривалось влияние внешнего шума на ансамбли осцилляторов, описываемых разными моделями.

## ГЛАВА 2. ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В данной главе исследовано влияние неоднородности поверхности под действием переменного электрического поля на вынужденные колебания капли жидкости. Предложена модель учёта неоднородности поверхности подложки. Рассмотрен случай пространственно-однородного электрического поля. Получены данные об отклонении поверхности и частотных характеристиках в зависимости от постоянной Хокинга, частоты и амплитуды внешнего электрического поля и геометрических параметров системы.

В случае однородного поля и однородной поверхности происходят осесимметричные колебания. Амплитуда колебаний линии контакта увеличивается с ростом параметра Хокинга, что объясняется уменьшением взаимодействия контактной линии с подложкой.

Все результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работах [2, 3, 5, 8, 9].

### 2.1. Постановка задачи

В данном разделе исследуются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$ , окруженной другой жидкостью

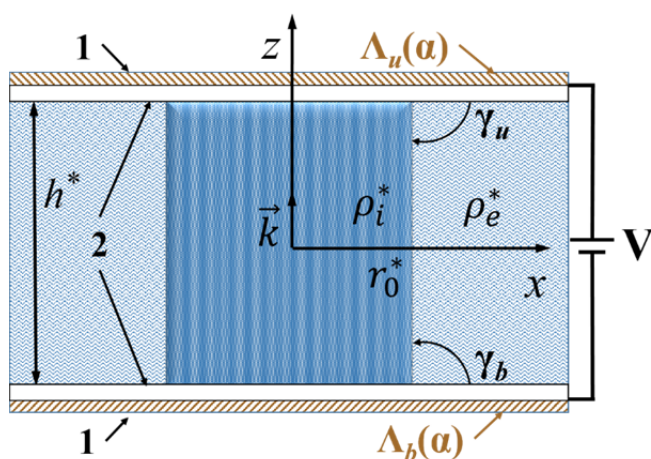


Рисунок 2.1 — Геометрия задачи (1 – электрод, 2 – диэлектрический слой)

плотности  $\rho_e^*$  (здесь и далее величины с индексом  $i$  относятся к капле, а с индексом  $e$  к окружающей жидкости). Вся система ограничена двумя параллельными твердыми поверхностями (рис. 2.1), расстояние между которыми равно  $h^*$ . Сосуд замкнут на бесконечности, поэтому влияние боковых стенок на движение капли не учитывается.

Торцы сосуда являются проводящими и покрыты изнутри диэлектрической пленкой. В равновесном состоянии капля имеет форму круглого цилиндра высотой  $h^*$  и радиусом  $R_0^*$ . Краевой угол между верхней пластиной и боковой поверхностью отсчитывается от плоскости с внешней стороны капли. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями – прямой. К торцам сосуда прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту  $\omega^*$ , что позволяет возбуждать внутри него электрическое поле. Внешнее переменное электрическое поле действует как внешняя сила, имеющая амплитуду  $a^*$  и частоту  $2\omega^*$ , которая вызывает движение контактной линии. Движение линии контакта описывается модифицированным граничным условием Хокинга: скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля  $\omega^*$  (1.3).

Предполагается, что отношение гравитационных сил к капиллярным (число Бонда) мало, т. е.  $|\rho_i^* - \rho_e^*| g^* L^{*2} \ll \sigma^*$ , где  $g^*$  – гравитационное ускорение,  $L^*$  – характерный размер. Например, для капли воды в воздухе  $L^* \sim 1$  мм. Более того, с одной стороны, обе жидкости несжимаемы, т.е.  $\omega^* L^* \ll c^*$ , где  $c^*$  – скорость звука. С другой стороны, жидкости невязкие, т.е. толщина вязкого пограничного слоя  $\delta^* = \sqrt{\nu^* / \omega^*}$  (где  $\nu^*$  – кинематическая вязкость) много меньше чем характерный размер  $L^*$ :  $\delta^* \ll L^*$ . Диапазон частот составляет  $1 \ll \omega^* \ll 10^6$  рад/с для капли воды размером 1 мм в воздухе.

Ввиду наличия симметрии задачи удобно ввести цилиндрические координаты  $r^*, \alpha, z^*$ . Азимутальный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$ . Поверхность капли описывается следующим уравнением  $r^* = R_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ . Предполагая потенциальное движение жидкости, вводим потенциал скорости  $\mathbf{v}^* = \nabla \phi^*$ . Несмотря на то, что рассматривается потенциальное течение невязкой несжимаемой жидкости, тем не менее, задача содержит диссипативные эффекты,

обусловленные уравнением Хокинга (1.3), которое описывает диссипацию энергии за счет взаимодействия линии контакта с подложкой. Это позволяет нам использовать потенциал скорости в соответствии с теоремой Кельвина о циркуляции.

Выберем в качестве единиц измерения времени  $-\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3}/\sigma^*}$ , радиальной координаты  $-R^*$ , осевой координаты  $-h^*$ , отклонения поверхности  $-A^*$ , скорости  $-A^*\sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3})}$ , плотности  $-\rho_e^* + \rho_i^*$ , давления  $-A^*\sigma^*/R_0^{*2}$ , где  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения.

В приближении потенциального течения идеальной жидкости безразмерные уравнения Бернулли и непрерывности имеют следующий вид:

$$p = -\rho \left( \varphi_t + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi)^2 \right), \quad \Delta \varphi = 0,$$

где  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – малая безразмерная амплитуда колебаний.

Решение задачи находится в виде степенного ряда по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad \zeta = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \dots \quad (2.1)$$

В результате безразмерное уравнение Бернулли в общем случае имеет вид:

$$p_0 + \varepsilon p_1 + \dots = -\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots) + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla \varphi_0 + \varepsilon \nabla \varphi_1 + \dots)^2 \right)$$

Условия переносятся с безразмерной подвижной границы раздела  $r = 1 + \varepsilon \zeta(\alpha, z, t)$  на невозмущенную поверхность  $r = 1$  за счет колебаний малой амплитуды. Чтобы реализовать это, необходимо разложить функции на подвижной границе в ряд Тейлора относительно малого параметра  $\varepsilon$  при  $r = 1$ :

$$f(r = 1 + \varepsilon \zeta) = f(1) + f'(1) \varepsilon \zeta + \frac{1}{2} f''(1) \varepsilon^2 \zeta^2 + \dots \quad (2.2)$$

В этом случае функция  $f(r)$  уже определена на невозмущенной поверхности. Далее последовательно раскладываются граничные условия в ряд и сводим их к невозмущенной поверхности.

Непрерывность нормальной компоненты скорости на границе раздела жидкость-жидкость равна:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta(z, t): \nabla \varphi_i \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi_e \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad F = r - 1 - \varepsilon\zeta(z, t), \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к границе раздела, направленный в окружающую жидкость. Используя разложение (2.2), получаем следующее граничное условие уже на невозмущенной границе раздела  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} r = 1: & \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon\zeta)^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \varepsilon b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \varphi_i + \varepsilon\zeta \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \dots \right) = \\ & = \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon\zeta)^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \varepsilon b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \varphi_e + \varepsilon\zeta \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} + \dots \right). \end{aligned}$$

В результате (с учетом (2.1)) граничное условие (2.3) в линейном приближении принимает вид:

$$r = 1: \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}.$$

Другие граничные условия преобразуются аналогичным образом. Безразмерное кинематическое условие на движущейся границе раздела:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta: \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla F = 0$$

Это условие находится на невозмущенной поверхности:

$$r = 1: -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon\zeta)^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \varepsilon b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \varphi + \varepsilon\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \dots \right) = 0$$

В линейном приближении (с учетом (2.1)):

$$r = 1: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Безразмерное граничное условие нормального баланса напряжений находится на движущейся границе раздела:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta: \varepsilon(p_e - p_i) = 1 - \operatorname{div} \mathbf{n},$$

где «1» – безразмерный скачок давления на границе раздела с равновесным капиллярным давлением. Оно сносится на невозмущенную поверхность следующим образом:

$$\begin{aligned}
 r=1: \quad & \varepsilon \left( p_e + \varepsilon \zeta \frac{\partial p_e}{\partial r} + \dots - p_i - \varepsilon \zeta \frac{\partial p_i}{\partial r} - \dots \right) = \\
 & = 1 - \frac{Q}{1 + \varepsilon \zeta} - \frac{\varepsilon^2 \zeta^2 Q^3}{(1 + \varepsilon \zeta)^3} + \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon \zeta)^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( Q \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon b^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( Q \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\
 & Q = \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \zeta)^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \right)^2 + \varepsilon^2 b^2 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

В нулевом порядке разложения:

$$r=1: p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}.$$

Линеаризованная система уравнений относительно малоамплитудных колебаний:

$$p_j = -\rho_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}, \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = e, i, \quad (2.4)$$

$$r=1: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (2.5)$$

$$r=1, z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + a f(\alpha) \cos(2\omega t) \right), \quad (2.6)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $a$  и  $\omega$  – амплитуда и частота переменного электрического поля,  $\zeta$  – отклонение поверхности от равновесного положения,  $\Lambda_{u,b}(\alpha)$  – безразмерный параметр Хокинга на верхней и нижней пластинах соответственно,  $f(\alpha)$  – функция пространственной неоднородности электрического поля (в случае однородного электрического поля  $f(\alpha)=1$ ),  $\alpha$  –

азимутальный угол, здесь и далее величины с индексом  $i$  относятся к капле, а с индексом  $e$  к окружающей жидкости.

Краевая задача (2.4) – (2.7) содержит шесть безразмерных параметров: малую относительную характерную амплитуду –  $\varepsilon = A^*/R_0^*$ , постоянную Хокинга (параметр смачивания) –  $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^* / \sigma}$ , частоту внешнего воздействия –  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3} / \sigma}$ , геометрический параметр –  $b = R_0^* / h^*$ , плотность внешней жидкости –  $\rho_e = \rho_e^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ , плотность жидкости в капле –  $\rho_i = \rho_i^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ , последние два параметра связаны соотношением  $\rho_i + \rho_e = 1$ .

## 2.2. Однородные различающиеся пластины

Рассмотрим вынужденные колебания зажатой капли, определяемые внешней однородной периодической силой, действующей только на линии контакта трех сред (2.6). Внешнее переменное электрическое поле однородно, т.е.  $f(\alpha) = 1$ . Решение краевой задачи (2.4) – (2.7) ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. С учетом осевой симметрии решение уравнения Лапласа (2.4) с граничным условием (2.6) можно записать в виде:

$$\varphi_i(r, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k^{(0)} R_k^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) + a_k^{(1)} R_k^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{i2\omega t} \right), \quad (2.8)$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_k^{(0)} R_k^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) + b_k^{(1)} R_k^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{i2\omega t} \right), \quad (2.9)$$

где  $R_k^{(0)i}(r) = I_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{(0)e}(r) = K_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{(1)i}(r) = I_0((2k+1)\pi br)$ ,

$R_k^{(1)e}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$ ,  $I_0$ ,  $K_0$  – модифицированные функции Бесселя.

Кинематическое условие на поверхности раздела (второе условие в (2.5)) дает выражение для отклонения поверхности:



$$\zeta(z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_k^{(0)} \cos(2k\pi z) + c_k^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \right) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i2\omega t} \right). \quad (2.10)$$

Подставляя решения (2.8) – (2.10) в уравнения (2.4) – (2.7), получим систему уравнений для неизвестных амплитуд  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$ ,  $c_{jk}$  и  $d_{j0}$ :

$$d_0^{(0)} = a \frac{\lambda_b (A_0 A + 1) + A_0 G}{F - D_0 G - \lambda_b (B + D_0 A)}, \quad d_0^{(1)} = A_0 a + D_0 d_0^{(0)},$$

$$A_0 = -\frac{\lambda_u}{2i\omega(\lambda_u A + G)}, \quad D_0 = \frac{\lambda_u B - F}{\lambda_u A + G},$$

$$F = 4\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k f_k}{(\Omega_k^{(0)2} - 4\omega^2)} - f_0 + \cos\left(\frac{1}{2b}\right), \quad G = 4\omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{(\Omega_k^{(1)2} - 4\omega^2)} + \sin\left(\frac{1}{2b}\right),$$

$$A = \frac{1}{2i\omega b} \cos\left(\frac{1}{2b}\right), \quad B = \frac{1}{2i\omega b} \sin\left(\frac{1}{2b}\right),$$

$$c_0^{(0)} = -f_0, \quad c_k^{(0)} = \frac{4\omega^2 f_k d_0^{(0)}}{(\Omega_k^{(0)2} - 4\omega^2)}, \quad c_k^{(1)} = \frac{4\omega^2 g_k d_0^{(1)}}{(\Omega_k^{(1)2} - 4\omega^2)},$$

$$a_k^{(0)} R_{kr}^{(0)i}(1) = 2i\omega (c_k^{(0)} + f_k d_0^{(0)}), \quad a_k^{(1)} R_{kr}^{(1)i}(1) = 2i\omega (c_k^{(1)} + g_k d_0^{(1)}),$$

$$a_0^{(0)} = 0, \quad b_0^{(0)} = 0, \quad a_k^{(0)} R_{kr}^{(0)i}(1) = b_k^{(0)} R_{kr}^{(0)e}(1), \quad a_k^{(1)} R_{kr}^{(1)i}(1) = b_k^{(1)} R_{kr}^{(1)e}(1).$$

Для удобства демонстрации результатов и их обсуждения введем следующие обозначения:  $\zeta_u = |\zeta(0.5, 0)|$  – амплитуда колебаний линии контакта на «верхней» пластине (крышке);  $\zeta_b = |\zeta(-0.5, 0)|$  – на «нижней» пластине (дне);  $\zeta_0 = |\zeta(0, 0)|$  – в центре сосуда;  $\zeta_q = |\zeta(0.25, 0)|$  – при  $z = 0.25$ ;  $\gamma_u$  ( $\gamma_b$ ) – краевой угол между верхней (нижней) пластиной и боковой поверхностью капли (см. рис. 2.1).

Внешняя сила возбуждает осесимметричные вынужденные колебания боковой поверхности капли. Функция внешнего воздействия является нечетной относительно координаты  $z$ , поэтому распределение энергии происходит между

нечетными модами  $\sin((2k+1)\pi z)$  (см. решения (2.8) – (2.10)). По причине отсутствия симметрии между свойствами пластин (разные параметры  $\lambda$ ), возбуждаются также и четные моды  $\cos(2k\pi z)$ . Это приводит к появлению парных резонансных пиков на амплитудно-частотных характеристиках (см. рис. 2.2). В большинстве случаев резонансная амплитуда нечетной моды, выше соответствующей четной.

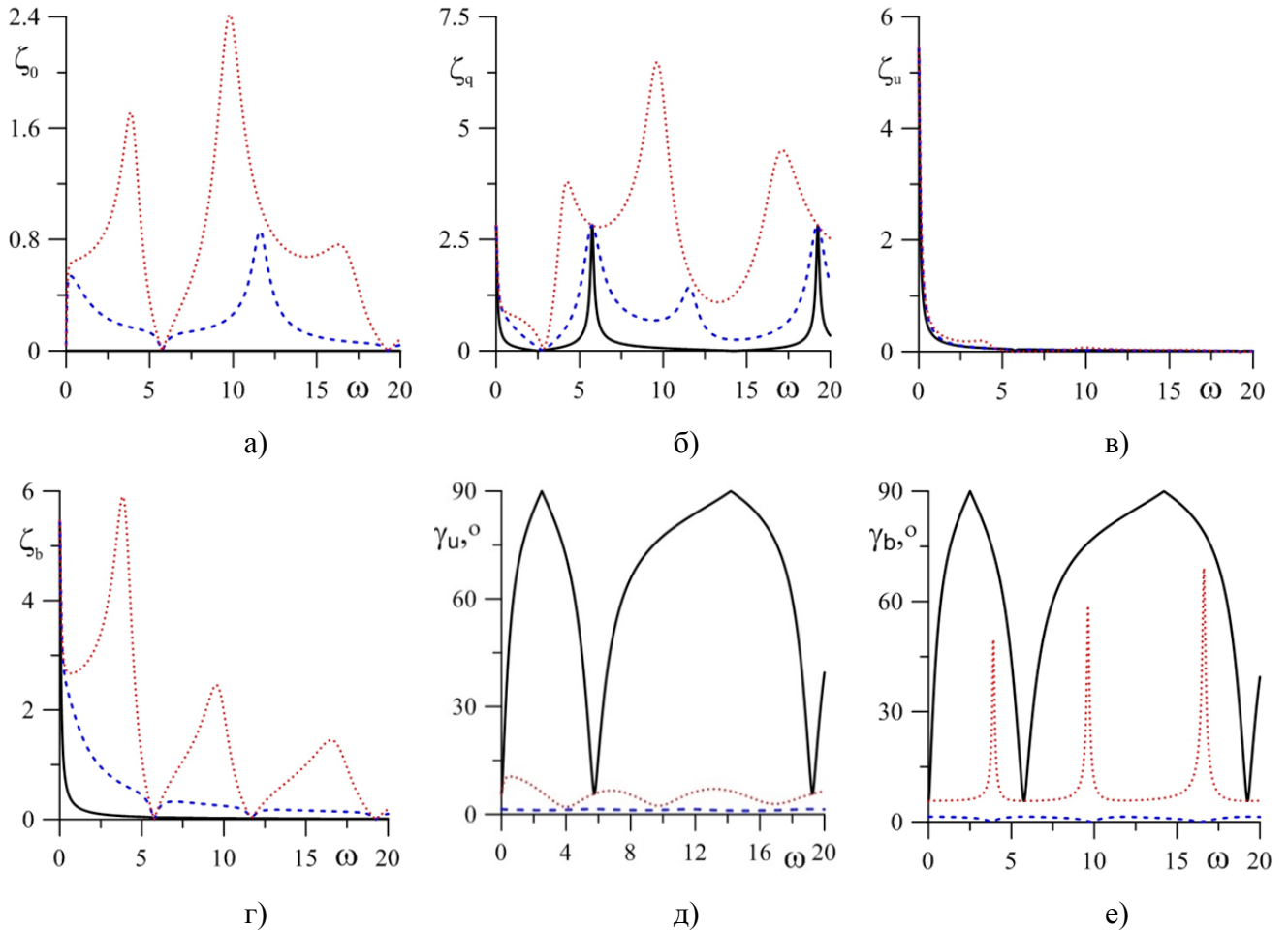


Рисунок 2.2 — Зависимость амплитуды боковой поверхности  $\zeta_0$  (а) и  $\zeta_q$  (б), контактных линий  $\zeta_u$  (в) и  $\zeta_b$  (г), и значения краевого угла  $\gamma$  (д,е) от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda_b$  ( $b=1$ ,  $a=10$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=0.1$ ):  $\lambda_b=0.1$  – сплошная,  $\lambda_b=1$  – штриховая,  $\lambda_b=10$  – пунктирная линия

Из представленных графиков на рис. 2.2 видно, что с увеличением параметра  $\lambda_b$  значения резонансных частот уменьшаются. Несмотря на слабую диссипацию при малых значениях  $\lambda$ , амплитуда колебаний боковой поверхности конечна (рис. 2.2а, б). Контактный угол изменяется в широком диапазоне (рис.

2.2д, е). Следует отметить, что если оба параметра  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$  малы (или велики), но не идентичны, то амплитуда поверхностных колебаний всегда конечна. Другими словами, диссипация энергии в системе определяется суммарным инкрементом затухания, соответствующего данной паре параметров  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$ .

Для наглядности на рис. 2.2 показан случай, когда параметры Хокинга идентичны:  $\lambda_u = \lambda_b = 0.1$ . В этом случае возбуждаются только нечетные моды, и отклонение боковой поверхности капли в середине слоя равно нулю (рис. 2.2а). На определенных частотах  $\omega$  движение капли не зависит от параметра смачивания  $\lambda$  и при любых его значениях линия контакта остается неподвижной (рис. 2.2в), возникают так называемые «антирезонансные» частоты. Этот эффект аналогичен параллельному резонансу, т. е. совпадению частоты напряжения с частотой параллельного колебательного контура.

В целом, амплитуда колебаний боковой поверхности зависит от амплитуды колебаний линий контакта, т.е. от амплитуды внешней силы. Поэтому при малых  $\lambda$  отклонения линии контакта невелики, что приводит к незначительным отклонениям боковой поверхности (не в резонансе).

По боковой поверхности капли распространяются бегущие волны, вызванные колебаниями линии контакта и краевого угла. При одинаковых значениях параметра  $\lambda$  капиллярные волны распространяются вдоль поверхности только в том случае, если значения  $\lambda$  конечны. Если значения  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$  различны, то волны распространяются при любых значениях этих параметров.

Для конечных значений параметра  $\lambda$  диссипация максимальна, поэтому резонансные амплитуды всегда конечны. Подвижность линии контакта значительна, что приводит к заметному отклонению боковой поверхности вне резонанса и появлению «четных» резонансных пиков.

При больших значениях  $\lambda$  диссипация мала, а линия контакта слабо взаимодействует с подложкой. В этом случае краевой угол меняется слабо, за исключением резонансных частот. При этом амплитуда колебаний на

резонансной частоте велика, а амплитуда «четных» пиков сравнима с амплитудой «нечетных».

На рис. 2.3 приведена форма боковой поверхности в разные моменты времени и значение краевого угла за период колебаний. Как уже отмечалось выше, при одинаковых значениях  $\lambda$  возбуждаются только нечетные гармоники и форма капли описывается нечетной функцией. Из рис. 2.3а видно, что сечение боковой поверхности также близко к нечетной функции, несмотря на различные значения  $\lambda$  ( $\lambda_u = 0.1$ ,  $\lambda_b = 10$  в данном случае). Форма капли, близкая к описанию четной функцией, образуется только на «четных» резонансных частотах, когда амплитуды этих гармоник сравнимы или значительны в сравнении с нечетными.

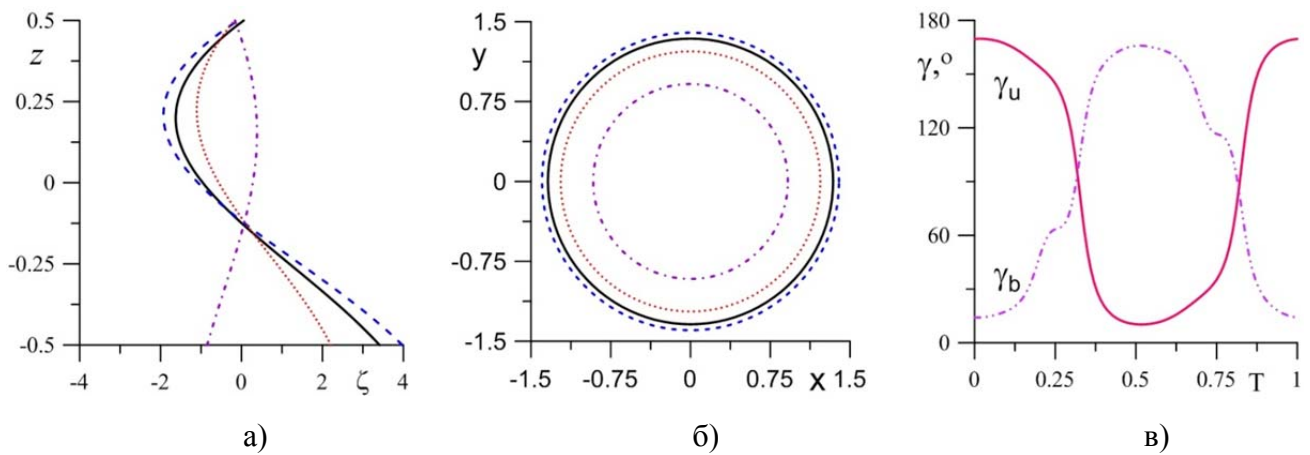


Рисунок 2.3 — Форма боковой поверхности капли  $\zeta(z, t)$  (а) и контактной линии  $1 + 0.1\zeta(-0.5, t)$  (б) в разные моменты периода колебаний  $T = \pi/\omega$  ( $b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\omega = 3$ ,  $\lambda_u = 0.1$ ,  $\lambda_b = 10$ ):  $t = 0$  – сплошная,  $t = 0.125T$  – штриховая,  $t = 0.25T$  – пунктирная,  $t = 0.375T$  – штрихпунктирная линия. Значение краевого угла  $\gamma$  в течение всего периода колебаний  $T$  (в)

Однородное поле возбуждает осесимметричные колебания, поэтому форма линии контакта представляет собой окружность в любой момент времени (рис. 2.3б). Изменение краевого угла происходит широким диапазоне (рис. 2.3в). Однако, в отличие от условия Юнга-Липпманна (1.1), максимальное значение краевого угла конечно.

На рис. 2.4 построены зависимости значений краевого угла на верхней и нижней поверхностях от квадратного корня амплитуды для разных значений частоты электрического поля.

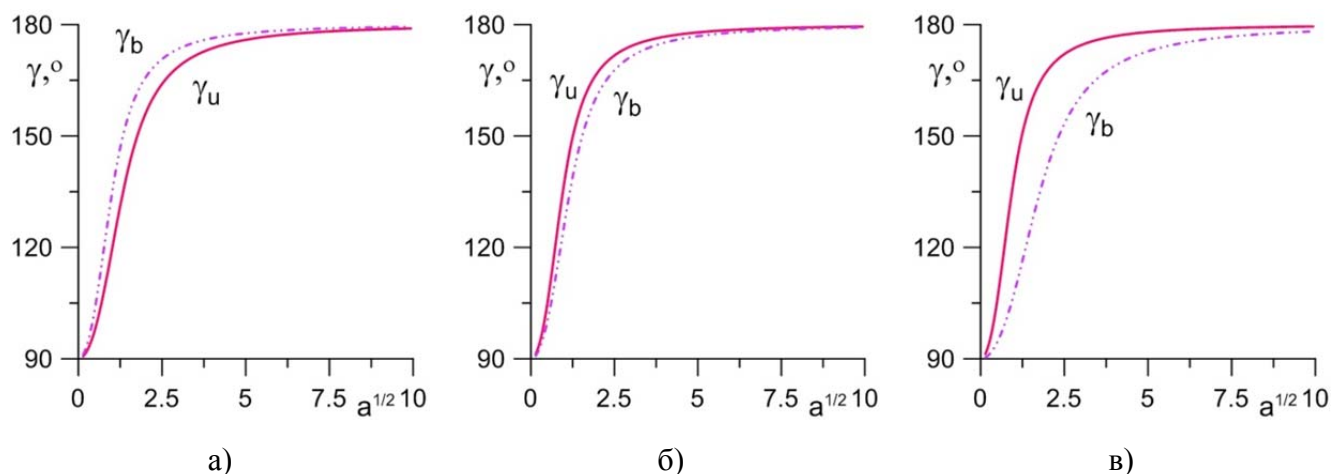


Рисунок 2.4 — Зависимость краевого угла  $\gamma$  от  $\sqrt{a}$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=0.1$ ,  $\lambda_b=10$ ):  $\gamma_u$  — сплошная линия,  $\gamma_b$  — штриховая линия, (а)  $\omega=1$ , (б)  $\omega=3$ , (в)  $\omega=10$

Приведенные графики качественно совпадают с аналогичными графиками экспериментальных данных [31] (рис. 1.2). Краевой угол меняется монотонным образом и с увеличением квадратного корня амплитуды выходит на постоянное значение. На резонансной частоте вид зависимости краевого угла не изменяется. Из представленных графиков следует, что изменение  $\omega$  и  $\lambda$  существенным образом влияет на значения краевого угла, поэтому есть возможность не только качественно, но и количественно получить согласие с экспериментальными результатами.

В случае однородного переменного электрического поля возбуждаются только осесимметричные колебания. Показано, что диссипация на линии контакта приводит к ограничению максимальной амплитуды колебаний при резонансе, а также к сдвигу резонансной частоты. При конечных значениях параметра  $\lambda$  амплитуда колебаний остается ограниченной из-за диссипации в процессе движения контактной линии. Однако при неравных параметрах смачивания  $\lambda$  на нижней и верхней пластинах амплитуда колебаний всегда конечна, даже в случае малых или больших значений  $\lambda$ , т.е. затухание определяется суммарным вкладом декрементов, соответствующим данным  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$ .

Внешняя сила возбуждает только нечетные гармоники относительно координаты  $z$ . Вследствие различающихся  $\lambda$ , в спектре появляются и четные

гармоники из-за отсутствия симметрии в движении линий контакта на поверхностях. Показано, что поверхность капли в большинстве случаев описывается нечетной функцией относительно оси  $z$ . Вклад четных гармоник заметен (сравним или больше) в сравнении с нечетными только вблизи частот четных гармоник. Кроме того, резонансная амплитуда «нечетных» пиков обычно больше, чем «четных».

### 2.3. Неоднородные одинаковые пластины

Предполагается способ изучения влияния неоднородности на колебания цилиндрической капли за счет неоднородности поверхности. Неоднородность пластин, в том числе, отвечает за степень обработки материала. Для того, чтобы задать неоднородность пластин, представляем параметр смачивания как функцию от азимутального угла  $\alpha$ .

В качестве примера функции неоднородности поверхности подложек (2.6) выбраны следующие периодические функции:  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|$  и  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$ . Внешнее переменное электрическое поле однородно, это означает, что функция пространственной неоднородности в условии (2.6) имеет следующий вид:  $f(\alpha) = 1$ .

Решение задачи (2.4) – (2.7) ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (2.11)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \cos(2m\alpha) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(1)} \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{4m^2 - 1}}{b} z \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $I_m$ ,  $K_m$  – модифицированные функции Бесселя порядка  $m$ .

Подставляя решения (2.11) – (2.13) в задачу (2.4) – (2.7), по аналогии с разделом 2.2, получим систему уравнений для неизвестных амплитуд  $a_{jmk}$ ,  $b_{jmk}$ ,  $c_{jmk}$  и  $d_{jm}$ :

$$2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{mk}^{(1)} + \delta_{m0} d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + \delta_{m1} \frac{1}{2} d_1^{(1)} + \delta_{mn} d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) =$$

$$= - \left( B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) + \delta_{n1} d_1^{(1)} + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) + a C_m \right),$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha.$$

На рис. 2.5 представлена зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений амплитуды электрического поля  $a$ . Очевидно, что в линейной задаче с увеличением амплитуды электрического поля величина отклонения поверхности растет. Максимальное отклонение возникает при малых частотах, т.е. при постоянно действующей силе.

На рис. 2.6 представлена зависимость амплитуды отклонения линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений геометрического параметра  $b$ .

С увеличением  $b$  растут значения частот собственных колебаний, что приводит к сдвигу резонансных пиков (рис. 2.6). Кроме того, резонансная амплитуда становится больше из-за увеличения объема капли.

На рис. 2.7 представлена зависимость амплитуды отклонения линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений параметра Хокинга  $\lambda$ . Имеются резонансные пики, каждый из которых соответствует своей частоте (т.е. происходит линейный резонанс). При малых  $\lambda$  резонансных пиков нет, т.к. контактная линия сильно взаимодействует с подложкой. С увеличением

параметра Хокинга величина резонансной амплитуды растет, т.к. взаимодействие уменьшается.

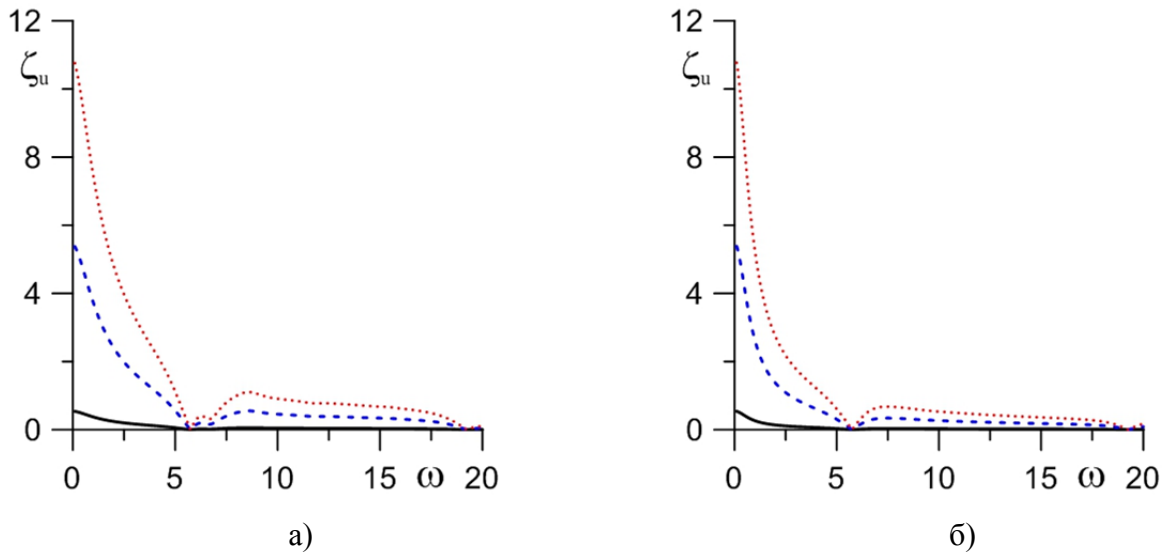


Рисунок 2.5 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $a$  ( $\lambda=1$ ,  $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ).  $a=1$  – сплошная линия,  $a=10$  – штриховая,  $a=20$  – пунктирная; (а)  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|$ , (б)  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$

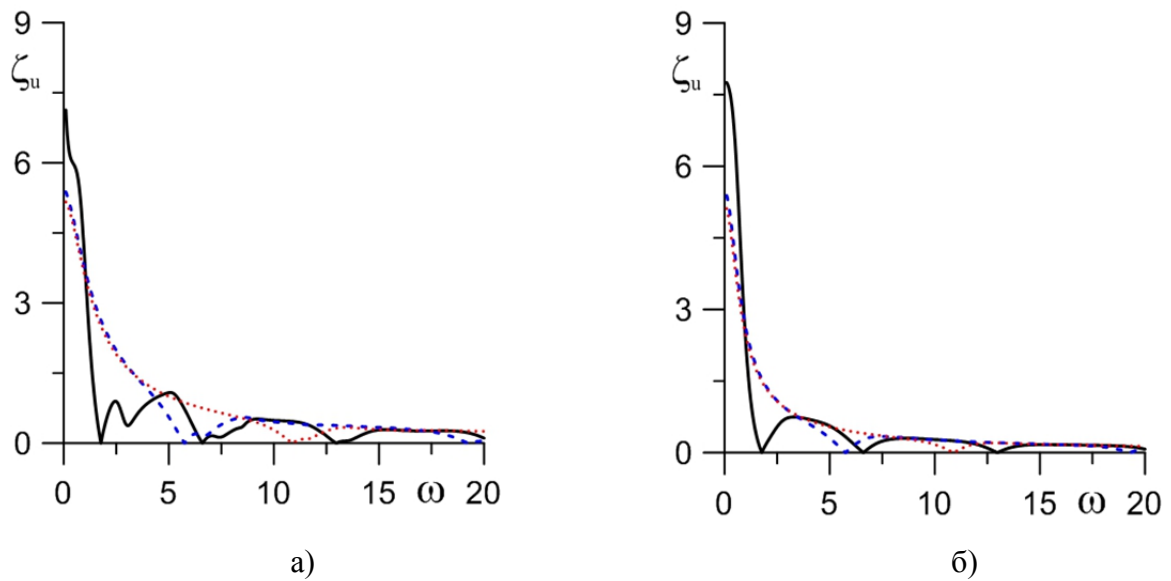


Рисунок 2.6 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $b$  ( $\lambda=1$ ,  $a=10$ ,  $\rho_i=0.7$ ):  $b=0.5$  – сплошная линия,  $b=1$  – штриховая,  $b=1.5$  – пунктирная, (а)  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|$ , (б)  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$



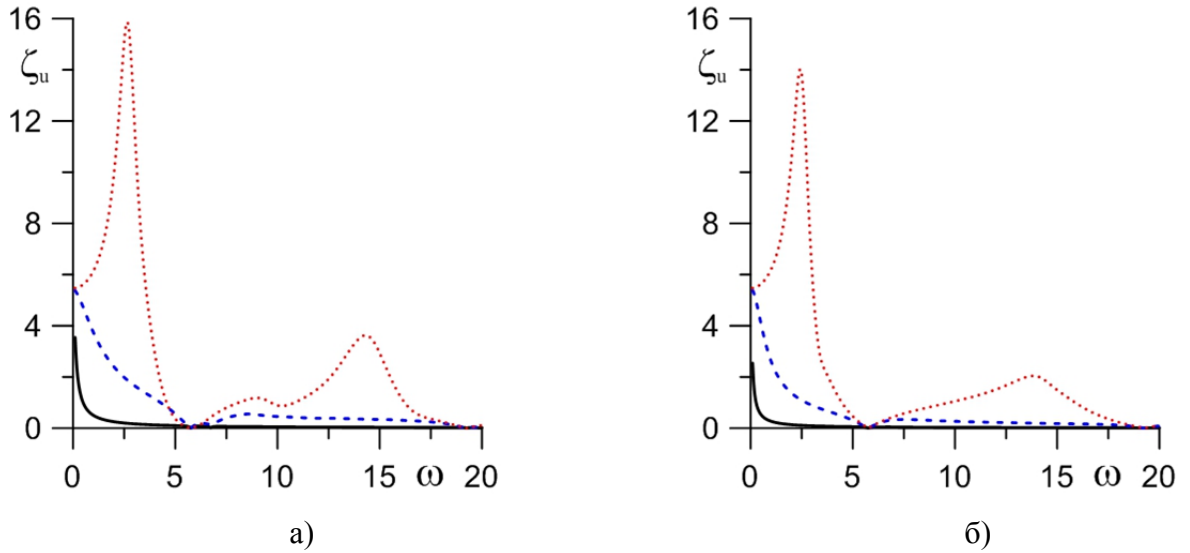


Рисунок 2.7 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda$  ( $b=1$ ,  $a=10$ ,  $\rho_i=0.7$ ).  $\lambda=1$  — сплошная линия,  $\lambda=10$  — штриховая,  $\lambda=20$  — пунктирная;

$$(a) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|, (б) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$$

Существуют также «антирезонансные» частоты — это такие частоты, при которых линия контакта неподвижна, но колебания все равно совершаются за счет изменения внешнего краевого угла капли (рис. 2.8), угол между подложкой и боковой поверхностью.

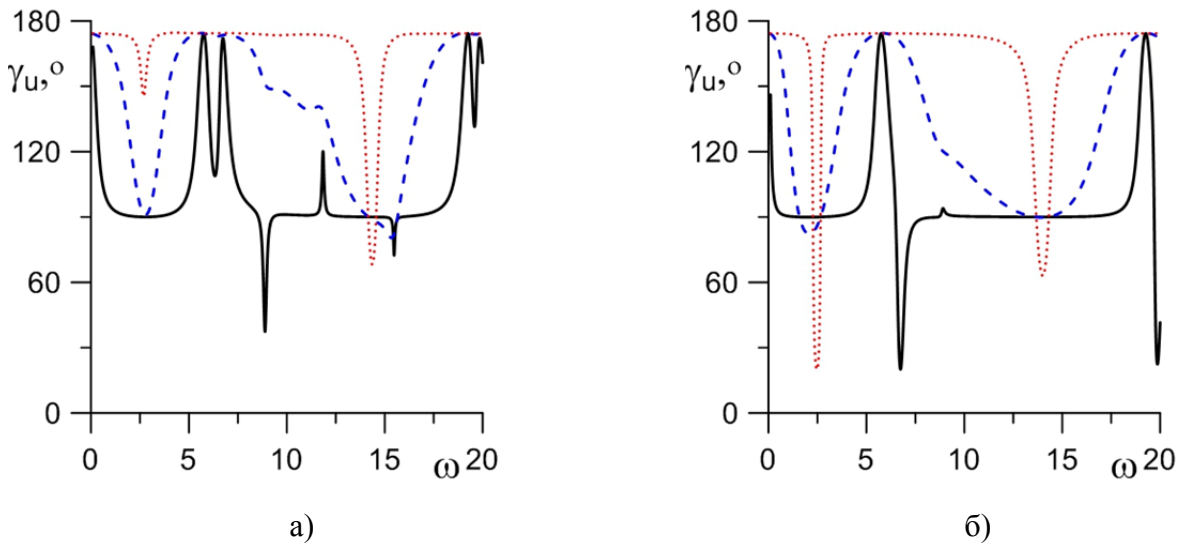


Рисунок 2.8 — Зависимость краевого угла от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda$  ( $b=1$ ,  $a=10$ ,  $\rho_i=0.7$ ):  $\lambda=0.1$  — сплошная линия,  $\lambda=1$  — штриховая,  $\lambda=10$  — пунктирная,

$$(a) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|, (б) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$$

На рис. 2.9 представлена зависимость краевого угла от корня эффективной амплитуды для разных значений частоты  $\omega$  и параметра Хокинга  $\lambda$  в случае  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos \alpha|$ . Представленные графики качественно совпадают с экспериментальными результатами на рис. 1.2.

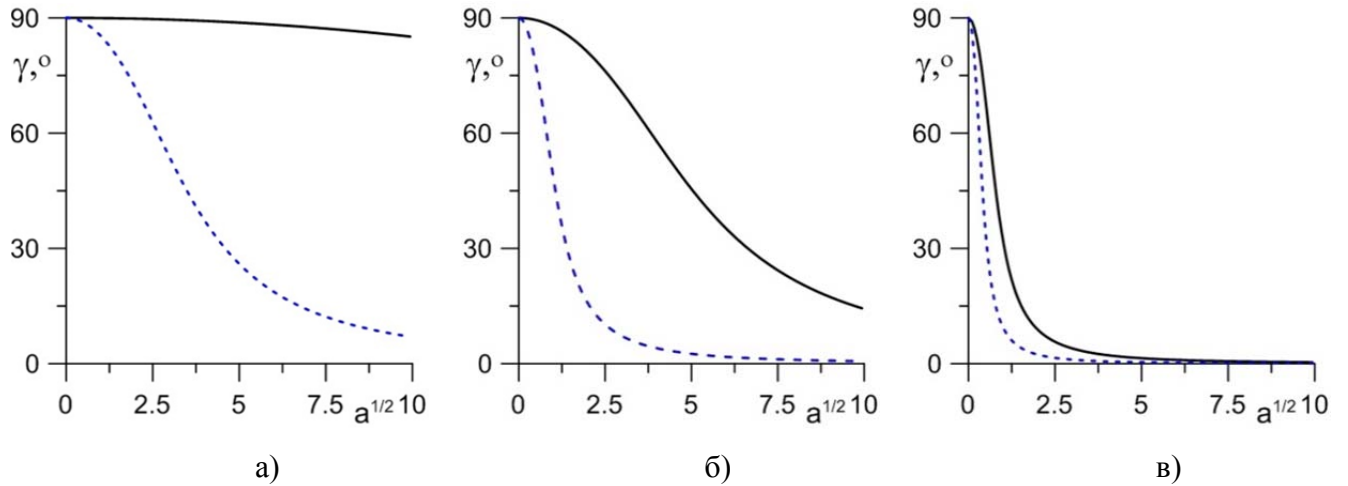


Рисунок 2.9 — Зависимость краевого угла от  $\sqrt{a}$  для двух разных значений  $\omega$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos \alpha|$ ).  $\omega = 2.5$  – сплошная,  $\omega = 6$  – штриховая линия; (а)  $\lambda = 0.1$ , (б)  $\lambda = 1$ , (в)  $\lambda = 10$

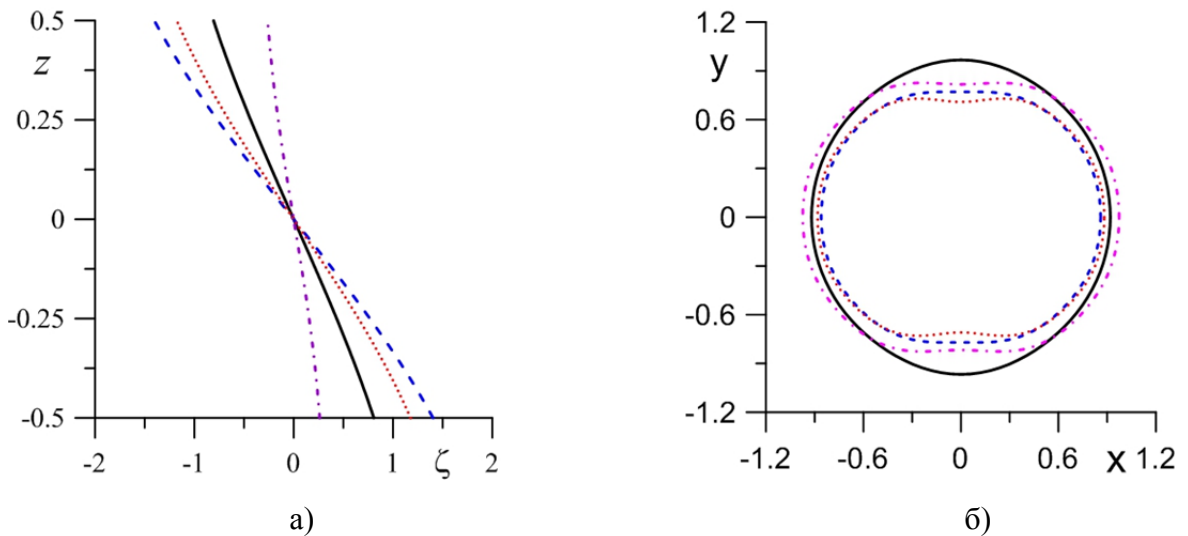


Рисунок 2.10 — Форма боковой поверхности (а) и линии контакта (б) в долях периода  $T$  ( $T = \pi/\omega$ ,  $\omega=1$ ,  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos \alpha|$ ,  $\lambda=1$ ,  $a=10$ ):  $t=0$  – сплошная,  $t=0.125T$  – штриховая,  $t=0.25T$  – пунктирная,  $t=0.375T$  – штрихпунктирная линия

На рис. 2.10 представлена эволюция формы боковой поверхности при  $\alpha = 0$  и контактной линии капли на верхней пластине  $z = 0.5$  за четверть периода

колебаний. Капля вытягивается вдоль направления пространственной неоднородности пластин (рис. 2.10б). Форма боковой поверхности показана при внешней частоте вблизи первой пространственной моды.

## 2.4. Неоднородные различающиеся пластины

Функции  $\Lambda_u$  и  $\Lambda_b$  разложены в ряд Фурье в терминах собственных функций оператора Лапласа. Рассмотрим частный случай неоднородности поверхности пластины  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$ , где  $\lambda_{u,b}$  – постоянные амплитуды. В связи с различающимися амплитудами  $\lambda_{u,b}$  получаем разные материалы на верхней и нижней пластинах, а зависимость от координат предполагает описание степени обработки материала поверхности. Решения для потенциала скорости и отклонения поверхности записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  
 $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(0)i}(r) = r^m$ ,  $R_{m0}^{(0)e}(r) = r^{-m}$ .

Кинематическое условие на поверхности раздела (2.5) дает выражение для отклонения поверхности капли:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) + c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left( d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя решения (2.14) – (2.16) в уравнения (2.4) – (2.7), по аналогии с разделом 2.3, получим систему для нахождения неизвестных амплитуд  $a_{jmk}$ ,  $b_{jmk}$ ,  $c_{jmk}$ ,  $d_{j0}$  и  $d_{jm}$ :

$$\begin{aligned}
& 2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)}) + \delta_{m0} \left( d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\
& \left. + \delta_{m1} \left( \frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \delta_{mn} \left( d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \\
& = \mp \left( B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} \left( \mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{n1} (\pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left( \pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) + aC_m \right), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha.$$

Неоднородная поверхность пластины  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$  возбуждает как осесимметричную, так и азимутальную моды. В связи с этим, динамика капли существенно отличается от ее поведения в однородном поле (рис. 2.11). Амплитуда колебаний боковой поверхности имеет идентичный локальный максимум на частоте азимутальной моды в отличие от ситуации с однородным электрическим полем (рис. 2.2). Эти резонансные амплитуды наиболее выражены при конечных значениях параметров  $\lambda_{u,b}$ , т.е. сила взаимодействия подвижной контактной линией и твердой подложкой велика. При малых значениях параметра Хокинга линия контакта фиксирована и неоднородность поверхности подложки несущественна. В случае же больших значений  $\lambda_{u,b}$  сила взаимодействия линии контакта с подложкой мала и неоднородность также не влияет на динамику капли. Отметим, что частоты собственных колебаний зависят от параметра Хокинга.

Следовательно, изменяя, например, качество обработки поверхности, можно изменять и резонансные частоты.

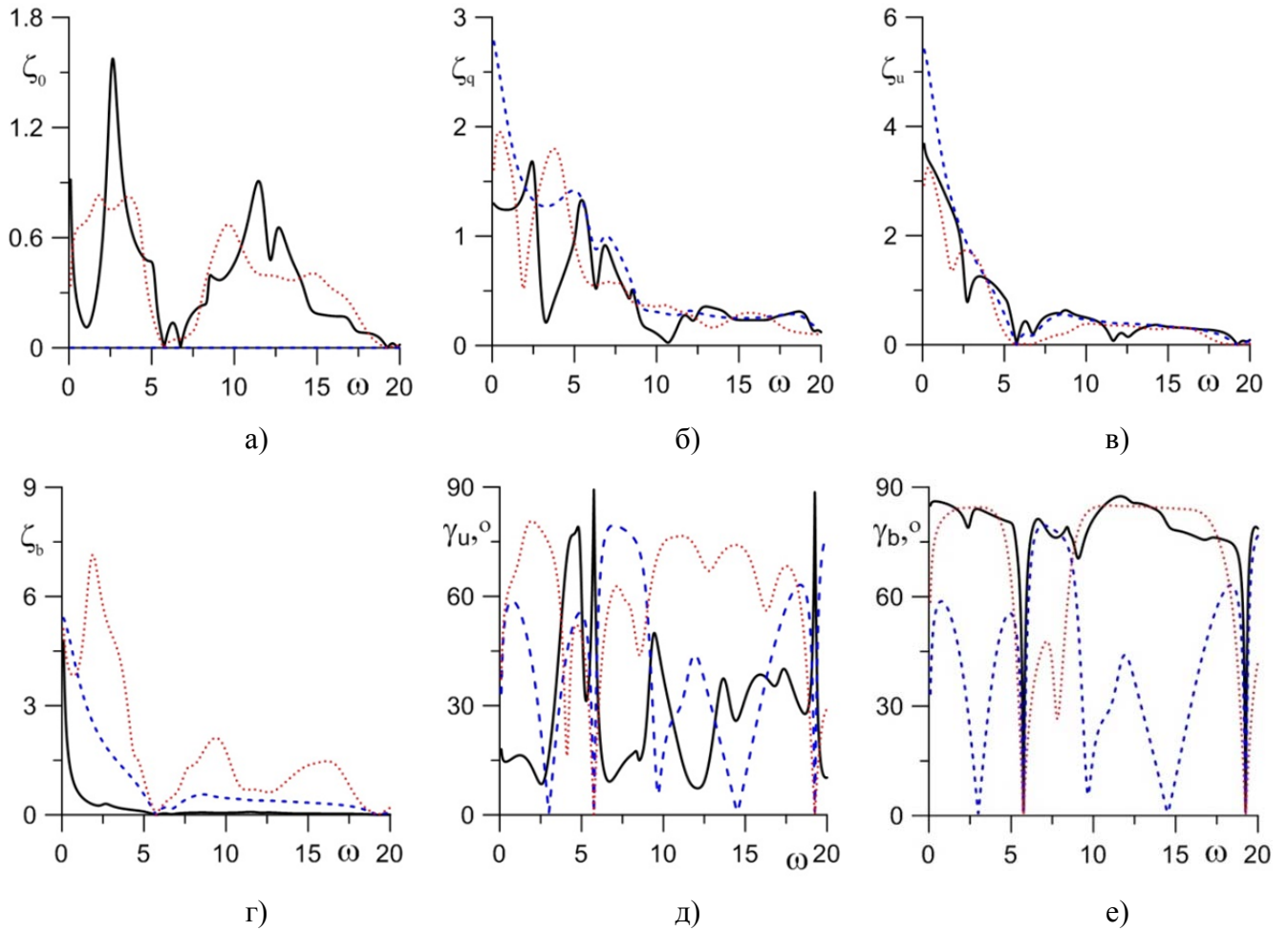


Рисунок 2.11 — Зависимость амплитуды боковой поверхности  $\zeta_0$  (а) и  $\zeta_q$  (б), контактных линий  $\zeta_u$  (в) и  $\zeta_b$  (г), и значения краевого угла  $\gamma$  (д, е) от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda_b$  ( $b=1$ ,  $a=10$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=1$ ):  $\lambda_b=0.1$  – сплошная,  $\lambda_b=1$  – пунктирная,  $\lambda_b=10$  – штриховая линия

Дополнительные резонансные пики связаны с возбуждением азимутальных мод. Для рассматриваемого случая неоднородности поверхности  $\Lambda_{u,b}(\alpha)$ , квадрупольный режим оказывает значительное влияние (рис. 2.12): капля деформируется вдоль неоднородности пластин (рис. 2.12б, в). Очевидно, что форма боковой поверхности (рис. 2.12а) будет зависеть от возбуждаемых гармоник формы собственных колебаний: чем выше частота внешнего воздействия, тем более высокие гармоники возбуждаются. В общем случае,

значения краевых углов на верхней и нижней пластине отличаются друг от друга (рис. 2.12г)

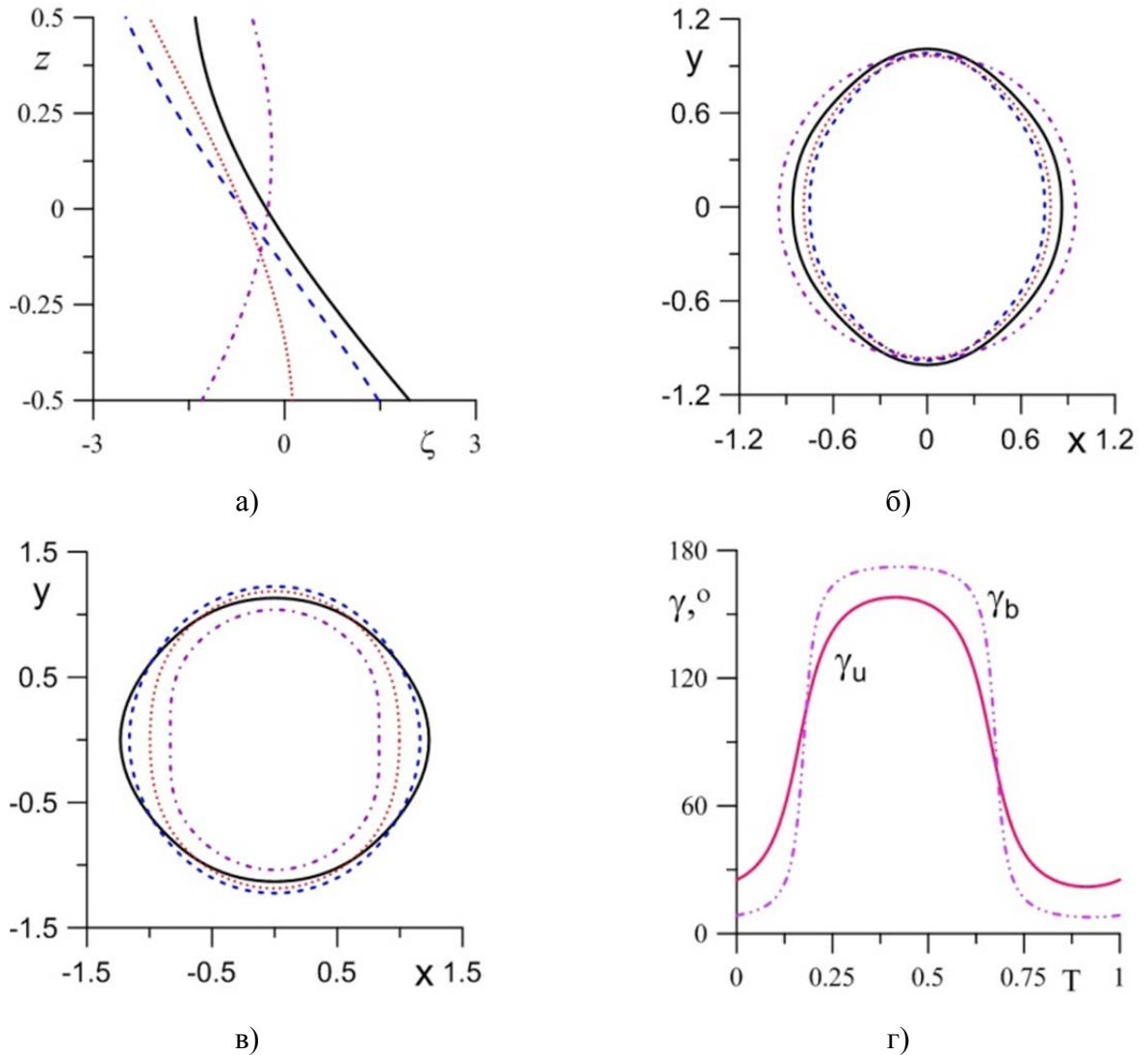


Рисунок 2.12 — Форма боковой поверхности капли  $\zeta(z, t)$  (а) и контактной линии на верхней (б) и нижней (в) пластинах в разные моменты периода колебаний капли  $T = \pi / \omega$ :  $t = 0$  — сплошная линия,  $t = 0.125T$  — пунктирная,  $t = 0.25T$  — штриховая,  $t = 0.375T$  — штрихпунктирная ( $b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda_u = 0.1$ ,  $\lambda_b = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ).

Значение краевого угла  $\gamma$  в течение периода колебаний  $T$  (г)

На рис. 2.13 представлены данные о значении краевого угла как функции от квадратного корня амплитуды  $\sqrt{a}$  (т.е. пропорционально потенциалу переменного электрического поля  $V$ ) при различных параметрах смачивания на

нижней пластине  $\lambda_b$  и частоты переменного тока  $\omega$ . Полученные зависимости качественно подходят на экспериментальные данные (рис. 1.2)

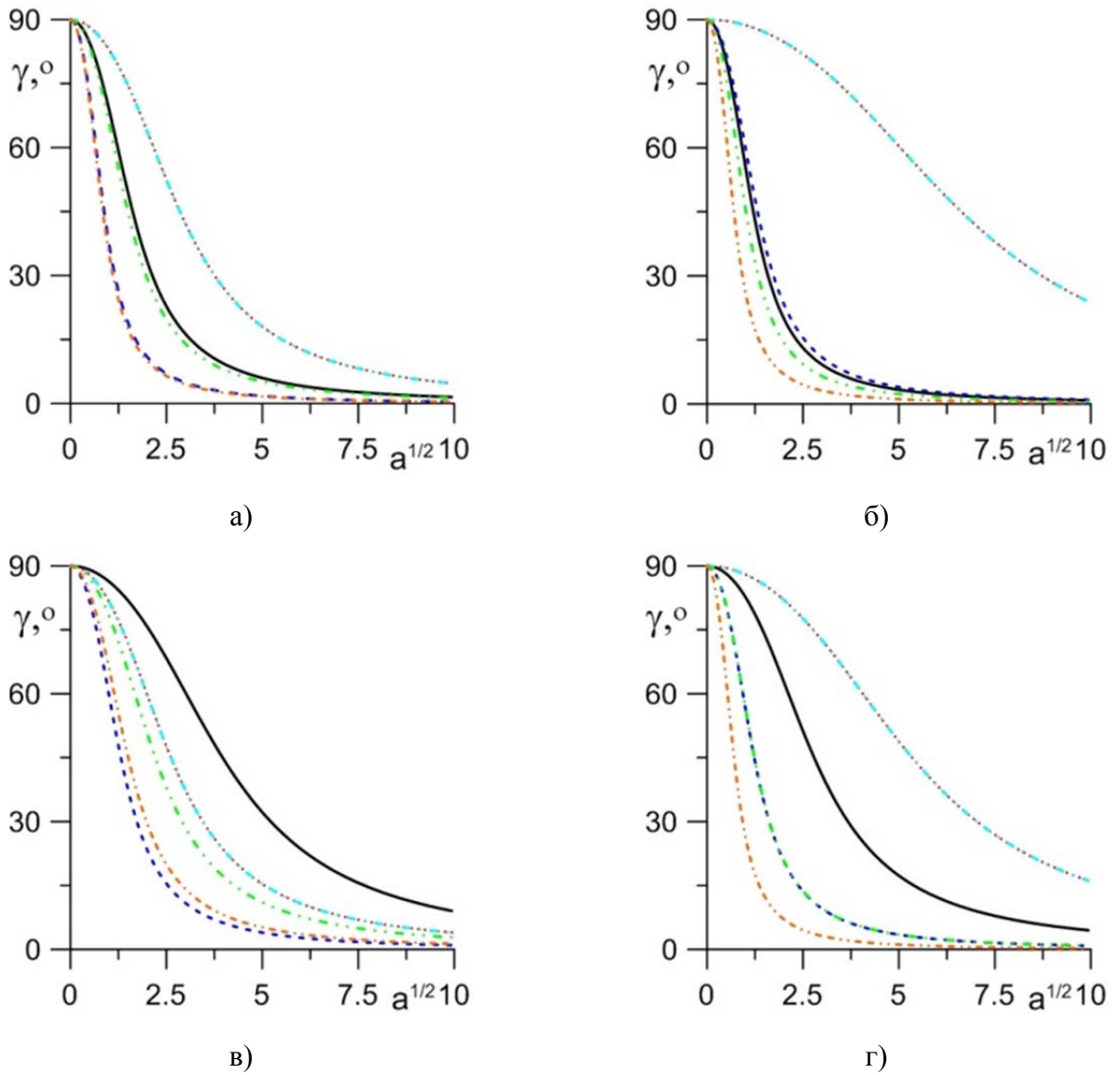


Рисунок 2.13 — Зависимость краевого угла  $\gamma$  от  $\sqrt{a}$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=1$ ). (а) —  $\omega=1$ , (б) —  $\omega=2.5$ , (в) —  $\omega=5$ , (г) —  $\omega=10$ .  $\gamma_u$ :  $\lambda_b=0.1$  — сплошная,  $\lambda_b=1$  — пунктирная,  $\lambda_b=10$  — двухпунктирштриховая;  $\gamma_b$ :  $\lambda_b=0.1$  — штриховая,  $\lambda_b=1$  — штрихпунктирная,  $\lambda_b=10$  — 2 — двухпунктирштриховая

В работе [48] экспериментально изучалась возможность перемешивания двух жидкостей в зажатой капле. Показано, что на резонансных частотах перемешивание происходит в несколько раз быстрее. Были определены значения резонансных частот капли: 34, 66, 99, 131 и 165 Гц. На рис. 2.14 показаны спектр средней амплитуды из экспериментов [48] и амплитуда боковой поверхности из

решения (2.14)–(2.16) для случая  $B_{m,n} = \lambda_{u,b} \delta_{m,n}$ ,  $C = \lambda_{u,b} (0.1, 0.1, 0.7, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$  и базисных функций  $\cos(m\alpha)$ ,  $m = 0, 1, \dots, 6$  (2.17). Можно получить хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов, выбирая формы неоднородностей поверхностей. Возможно, что коэффициенты Хокинга в данном случае зависят от напряжения, как, например, экспериментальное измерение коэффициента трения в [50].

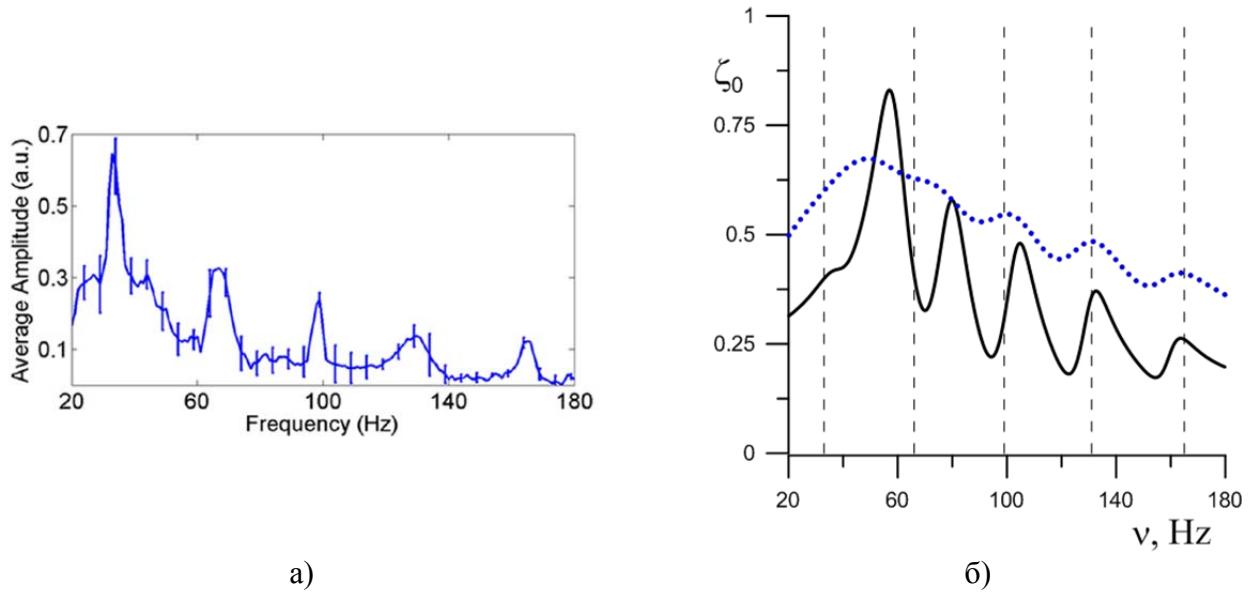


Рисунок 2.14 — Спектр средней амплитуды (fig. 3. [48]) (а) и амплитуда боковой поверхности капли  $\zeta_0$  (б) от частоты  $\omega$  ( $b = 2.55$ ,  $\rho_i = 1$ ,  $\lambda_b = 100$ ). (б)  $\lambda_u = 0.5$  – сплошная,  $\lambda_u = 2$  – пунктирная линия, вертикальными линиями обозначены экспериментальные резонансные частоты [48].



## ГЛАВА 3. НЕОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

С одной стороны, в реальных физических экспериментах создать однородное поле достаточно сложно. В первую очередь, это связано с конечными размерами установок и различными краевыми эффектами. Трудно удерживать постоянный заряд на диэлектрике, так как при включении этих пластин могут возникать различные эффекты из-за неоднородности их структуры. Это может привести к изменению потенциала электрического поля. С другой стороны, существуют эксперименты, в которых реализуется неоднородность поля, путём использования нескольких независимых контактов (полосок). К каждой такой контактной площадке подводят независимое напряжение, которое можно менять. Поэтому важно рассмотреть случай неоднородного электрического поля.

Все результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работах [1, 4, 8, 9].

### 3.1. Постановка задачи

Постановка задачи в целом напоминает постановку, рассмотренную в разделе 2.1 для однородного электрического поля. В данной главе рассмотрен случай неоднородного электрического поля, в отличие от главы 2, при этом  $f(\alpha)$  – функция пространственной неоднородности является функцией координат.

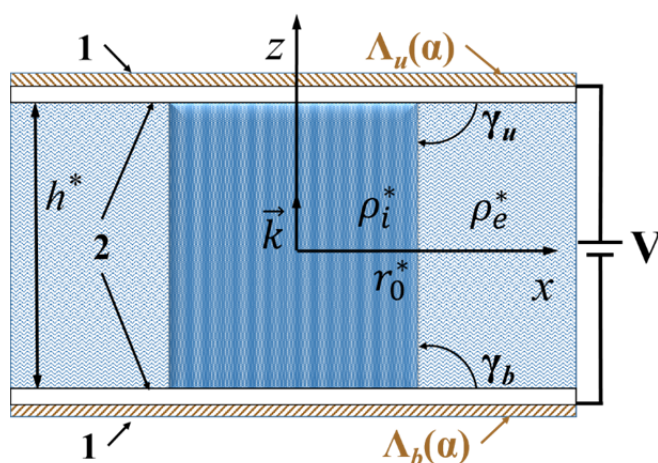


Рисунок 3.1 — Геометрия задачи (1 – электрод, 2 – диэлектрический слой)

Исследуются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$  (рис. 3.1), окруженной другой жидкостью плотности  $\rho_e^*$  (здесь и далее величины с индексом  $i$  относятся к капле, а с индексом  $e$  к окружающей жидкости). Вся система ограничена двумя параллельными твердыми

поверхностями, расстояние между которыми равно  $h^*$ . Сосуд замкнут на

бесконечности, поэтому влияние боковых стенок на движение капли не учитывается. Торцы сосуда являются проводящими и покрыты изнутри диэлектрической пленкой. В равновесном состоянии капля имеет форму круглого цилиндра высотой  $h^*$  и радиусом  $r_0^*$ . Краевой угол между верхней пластиной и боковой поверхностью отсчитывается от плоскости с внешней стороны капли. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями прямой. К торцам сосуда прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту  $\omega^*$ , что позволяет возбуждать внутри него электрическое поле. Внешнее переменное электрическое поле действует как внешняя сила, имеющая амплитуду  $a^*$  и частоту  $2\omega^*$ , которая вызывает движение контактной линии. Движение линии контакта описывается модифицированным граничным условием Хокинга: скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля  $\omega^*$ .

Выберем в качестве единиц измерения времени –  $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^{*3}/\sigma^*}$ , радиальной координаты –  $r_0^*$ , осевой координаты –  $h^*$ , отклонения поверхности –  $A^*$ , скорости –  $A^* \sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^{*3})}$ , плотности –  $\rho_e^* + \rho_i^*$ , давления –  $A^* \sigma^*/r_0^{*3}$ , где  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Рассматривается потенциальное течение, уравнения записаны в терминах потенциала скорости. В пренебрежении вязким затуханием запишем в безразмерной форме уравнения Бернулли и непрерывности и граничные условия:

$$p_j = -\rho_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}, \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = e, i, \quad (3.1)$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (3.2)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + af(\alpha) \cos(2\omega t) \right), \quad (3.3)$$

$$z = \pm \frac{1}{2} : \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

где  $p$  – давление в жидкости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\varphi$  – потенциал скорости,  $a$  и  $\omega$  – амплитуда и частота переменного электрического поля,  $\zeta$  – отклонение поверхности от равновесного положения,  $\Lambda_{u,b}(\alpha)$  – безразмерный параметр Хокинга на верхней и нижней пластинах соответственно,  $f(\alpha)$  – функция пространственной неоднородности электрического поля,  $\alpha$  – азимутальный угол.

Краевая задача (3.1) – (3.4) содержит шесть безразмерных параметров: малую относительную характерную амплитуду –  $\varepsilon = A^*/r_0^*$ , геометрический параметр –  $b = r_0^*/h^*$ , постоянную Хокинга (параметр смачивания) –  $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma}$ , частоту внешнего воздействия –  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3} / \sigma}$ , плотность внешней жидкости –  $\rho_e = \rho_e^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ , плотность жидкости в капле –  $\rho_i = \rho_i^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ , последние два параметра связаны соотношением  $\rho_i + \rho_e = 1$ .

### 3.2. Однородные различающиеся пластины

В экспериментах обычно пространственную неоднородность напряжения создают с помощью последовательности различных контактов, на которые можно подавать разное напряжение. Кроме того, создать однородное электрическое поле довольно сложно, т.к. могут возникнуть неоднородные области вблизи капли. Для возможного дальнейшего сравнения с экспериментом рассмотрим периодическую неоднородность поля вдоль оси  $Ox$ :  $\sin(x)$ . Следовательно, функция неоднородности  $f(\alpha)$  в граничном условии (3.3) на линии контакта:

$$f(\alpha) = \sin(\cos(\alpha)). \quad (3.5)$$

Решение краевой задачи (3.1) – (3.4) будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. В отличие от однородного поля, решение будет зависеть и от полярного угла  $\alpha$ . С учетом выбранной функции неоднородности  $f(\alpha)$ , решение можно представить в виде:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(0)} R_{1mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) + a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (3.6)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) + b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (3.7)$$

где  $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_m(2k\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(0)i}(r) = r^m$ ,  $R_{m0}^{(0)e}(r) = r^{-m}$ ,  
 $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $I_m$  и  $K_m$  – модифицированные функции Бесселя  $m$ -го порядка первого и второго рода, соответственно.

Кинематическое условие на свободной поверхности (3.2) дает выражение для отклонения поверхности капли:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) + c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left( d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя решения (3.6) – (3.8) в уравнения (3.1) – (3.4), получим систему для нахождения неизвестных амплитуд  $a_{jmk}$ ,  $b_{jmk}$ ,  $c_{jmk}$  и  $d_{jm}$ :

$$\begin{aligned} 2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left( d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{m1} \left( \frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{mn} \left( d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \mp \lambda_{u,b} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} \left( \mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\ \left. + \delta_{n1} \left( \pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left( \pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) + aC_m \right), \end{aligned}$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$b_{m0}^{(0)} = -a_{m0}^{(0)}, \quad b_{mk}^{(0)} = a_{mk}^{(0)} \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}, \quad b_{mk}^{(1)} = a_{mk}^{(1)} \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}, \quad ma_{mk}^{(0)} = c_{m0}^{(0)} + g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)},$$

$$a_{mk}^{(0)} R_{mkr}^{(0)i}(1) = c_{mk}^{(0)} + g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}, \quad a_{mk}^{(1)} R_{mkr}^{(1)i}(1) = c_{mk}^{(1)} + g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}, \quad c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{b^2}{2\omega^2} d_1^{(0)},$$

$$c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, \quad c_{m0}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(1)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - 4\omega^2},$$

$$\Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \quad \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{m^2 - 1 + (2\pi kb)^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(0)e}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}}, \quad \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{m^2 - 1 + (2k + 1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(1)e}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(0)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)i}(r), \quad R_{mkr}^{(1)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)i}(r), \quad R_{mkr}^{(0)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)e}(r), \quad R_{mkr}^{(1)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)e}(r),$$

где  $\delta_{mn}$  – символ Кронекера.

При рассматриваемом неоднородном электрическом поле возбуждаются четные азимутальные моды вынужденных колебаний капли ( $\cos(2m\alpha)$  в решениях (3.6) – (3.8)).

На рис. 3.2 построены амплитудно-частотные характеристики аналогичные рис. 2.2 для однородного поля. Возбуждаемые азимутальные моды, во-первых, приводят к появлению дополнительных резонансных пиков. Во-вторых, внешняя сила возбуждает нечетные вертикальные моды (относительно координаты  $z$ ), поэтому «нечетные» пики более заметны, чем «четные». При больших значениях параметра смачивания  $\lambda$  амплитуда колебаний боковой поверхности увеличивается за счет увеличения отклонения линии контакта и «дополнительные четные» резонансные пики становятся заметными.

Амплитуда азимутальных гармоник зависит от неоднородности электрического поля в отличие от рассмотренного выше случая однородного поля с неоднородными поверхностями пластин. Теперь резонансные азимутальные частоты существуют при любых значениях параметра Хокинга (рис. 3.2). Отметим, что «антирезонансные» частоты, при которых линия контакта

неподвижна при любых значениях  $\lambda$ , отсутствуют в отличие от однородного поля.

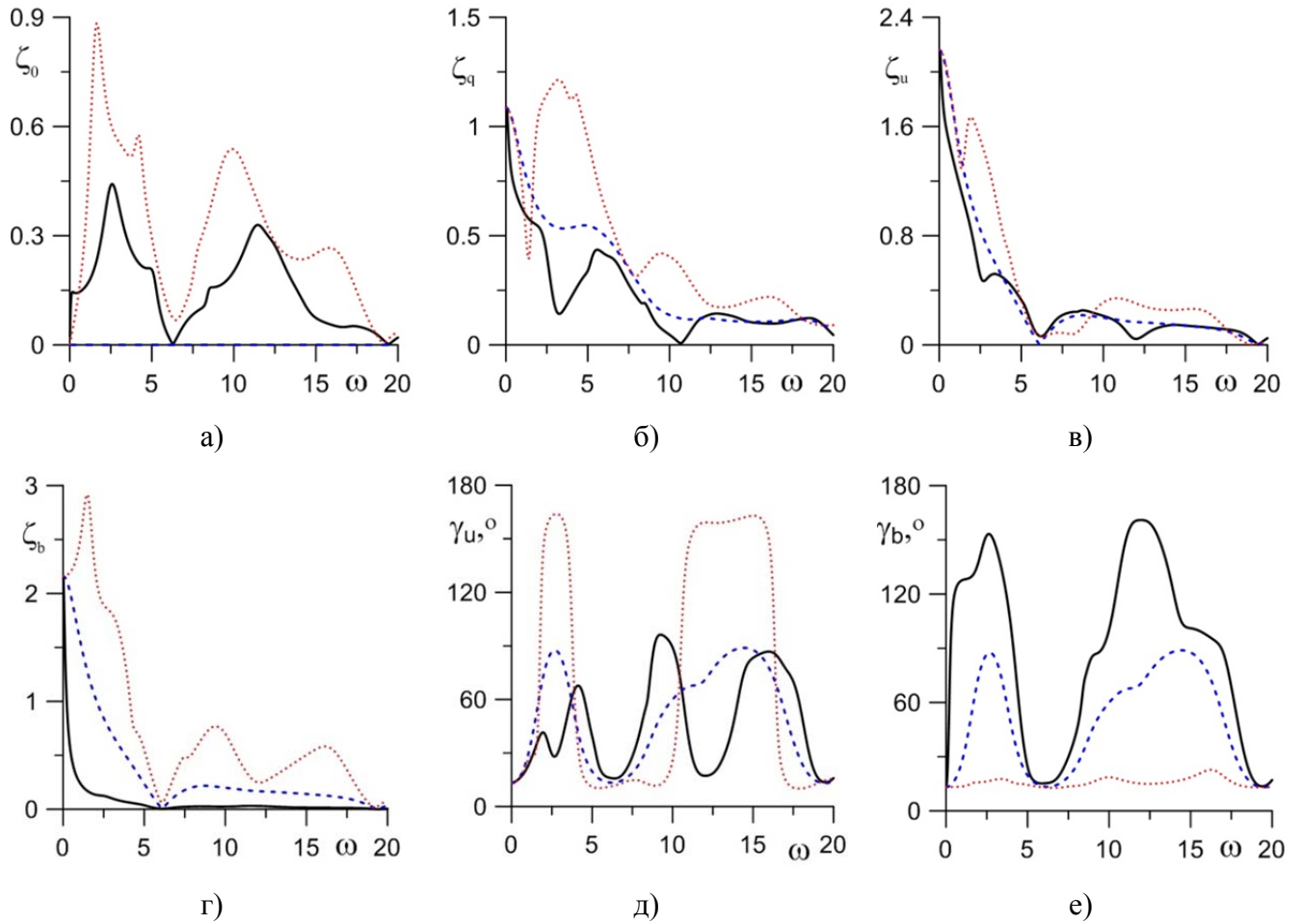


Рисунок 3.2 — Зависимость амплитуды боковой поверхности  $\zeta_0$  (а) и  $\zeta_q$  (б), контактных линий  $\zeta_u$  (в) и  $\zeta_b$  (г), и отклонения краевого угла  $\gamma$  (д, е) от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda_b$  ( $b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\lambda_u = 0.1$ ):  $\lambda_b = 0.1$  – сплошная,  $\lambda_b = 1$  – штриховая,  $\lambda_b = 10$  – пунктирная линия

Динамическое сечение боковой поверхности капли и краевых углов при азимутальном угле  $\alpha = 0$  показано на рис. 3.3а и рис. 3.3в, соответственно. Форма боковой поверхности снова близка к описанию нечетной функцией, а изменение краевого угла имеет более сложный вид (рис. 3.3в), чем в случае однородного поля (см. рис. 2.3в). Очевидно, что форма боковой поверхности зависит и от возбуждаемых гармоник собственных колебаний: чем выше частота внешнего воздействия, тем более высокие гармоники возбуждаются.

Форма линии контакта (рис. 3.3б) существенно отличается от окружности при осесимметричных колебаниях (см. рис. 2.3б) и определяется функцией неоднородности  $f(\alpha)$ .

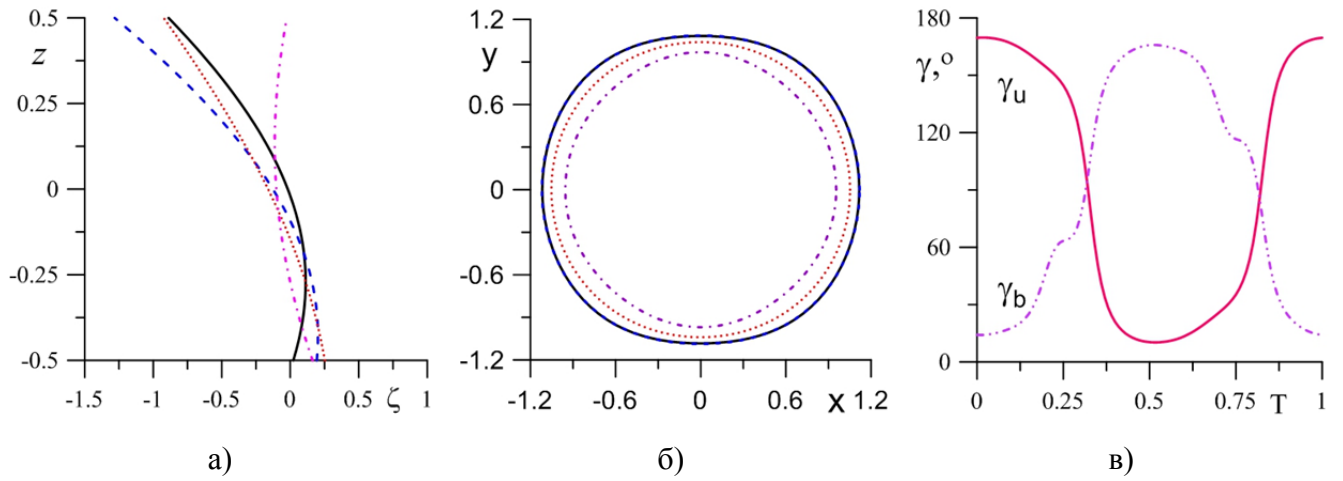


Рисунок 3.3 — Форма боковой поверхности капли  $\zeta(z, t)$  (а) и контактной линии  $1 + 0.1\zeta(-0.5, t)$  (б) в разные моменты периода колебаний капли  $T = \pi/\omega$ :  $t = 0$  – сплошная линия,  $t = 0.125T$  – штриховая,  $t = 0.25T$  – пунктирная,  $t = 0.375T$  – штрихпунктирная ( $b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\omega = 3$ ,  $\lambda_u = 0.1$ ,  $\lambda_b = 10$ ). Значение краевого угла  $\gamma$  в течение периода колебаний  $T$  (в)

Влияние неоднородности поля не сказывается существенно на зависимость краевого угла от корня амплитуды внешней силы (рис. 3.4). Качественно они схожи с аналогичными зависимостями в случае однородного поля (рис. 2.4).

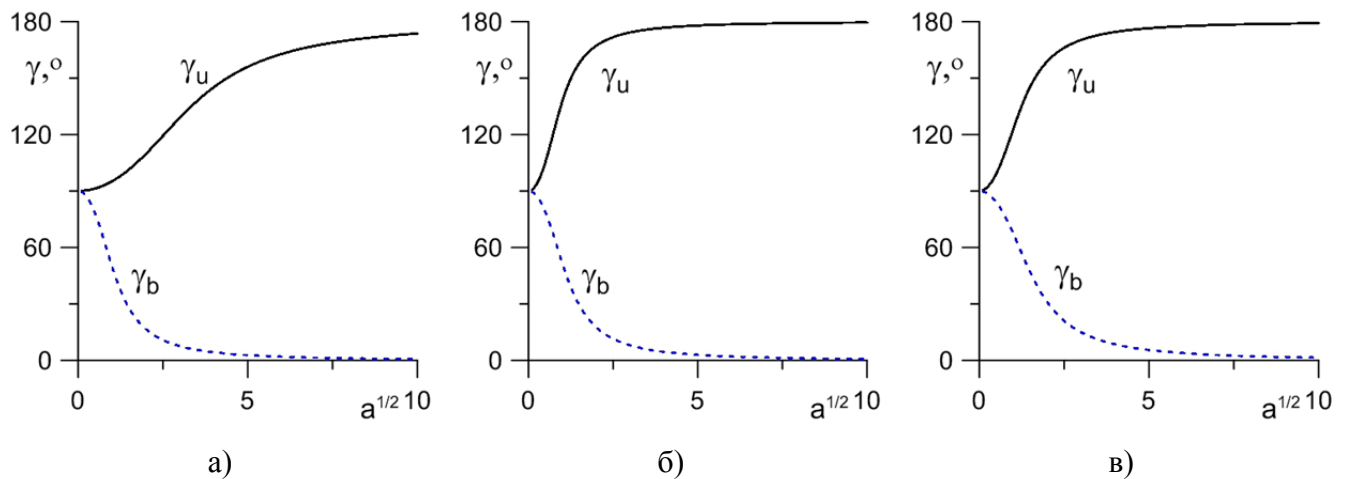


Рисунок 3.4 — Зависимость краевого угла  $\gamma$  от  $\sqrt{a}$  ( $b = 1$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\lambda_u = 0.1$ ,  $\lambda_b = 0.1$ ): (а)  $\omega = 1$ , (б)  $\omega = 3$ , (в)  $\omega = 3$

Кратко опишем основные результаты данного раздела. Рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли под действием внешнего переменного электрического поля, которое воздействует на каплю как внешняя периодическая сила с частотой  $2\omega$ , приводящая к движению контактную линию.

Параметр Хокинга  $\lambda$  является характеристикой смачивания поверхности и увеличение его значения приводит к уменьшению частоты колебаний капли. Предполагалось, что этот параметр различен для каждой пластины. Используемое граничное условие для линии контакта приводит к затуханию колебаний.

Рассматриваемое неоднородное электрическое поле приводит к возникновению азимутальных мод, что увеличивает число резонансных частот по сравнению с однородным. Форма линии контакта значительно отличается от окружности при осесимметричных колебаниях из-за наличия азимутальных мод.

Обнаружено, что «антирезонансные» частоты, при которых линия контакта неподвижна при любых  $\lambda$ , существуют при однородном электрическом поле. В неоднородном поле такой эффект отсутствует.

Азимутальные моды приводят к появлению дополнительных резонансных пиков. При больших значениях  $\lambda$  амплитуда колебаний боковой поверхности увеличивается за счет увеличения отклонения линии контакта и «дополнительные» резонансные пики становятся заметными.

Влияние неоднородности поля не сказывается существенно на зависимость краевого угла от амплитуды внешней силы. Качественно они схожи с аналогичными зависимостями в случае однородного поля. Изменение  $\omega$  и  $\lambda$  главным образом влияет на значения краевого угла, поэтому есть возможность не только качественно, но и количественно получить согласование с экспериментальными результатами.

### 3.3. Неоднородные одинаковые пластины

В качестве функции пространственной неоднородности электрического поля выбрана функция  $f(\alpha) = \sin(\cos(\alpha))$  в граничном условии (3.3) аналогично



(3.5). Рассматриваются два случая неоднородности пластин:  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\alpha)|$  и  $\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos(\alpha))|$ .

Решение ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа по аналогии с однородными пластинами (см. раздел 3.2):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (3.9)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (3.10)$$

где  $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $I_m$ ,  $K_m$  – модифицированные функции Бесселя порядка  $m$ .

Кинематическое условие на поверхности раздела (3.2) определяет выражение для отклонения поверхности капли:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \cos(2m\alpha) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

По аналогии с разделом 3.2, неизвестные амплитуды  $a_{jmk}$ ,  $b_{jmk}$ ,  $c_{jmk}$  и  $d_{jm}$  в решениях (3.9) – (3.11) находятся из решения следующей системы:

$$\begin{aligned} 2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{mk}^{(1)} + \delta_{m0} d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + \delta_{m1} \frac{1}{2} d_1^{(1)} + \delta_{mn} d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) = \\ = - \left( B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) + \delta_{n1} d_1^{(1)} + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) + a C_m \right), \end{aligned}$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) f(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha.$$

На рис. 3.5 представлена зависимость максимального отклонения линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений амплитуды электрического поля  $a$ . Аналогично случаю однородного поля, с увеличением амплитуды электрического поля величина отклонения поверхности растет. Отметим, что результирующая зависимость от величины амплитуды нелинейная, что связано с используемым условием Хокинга (3.3).

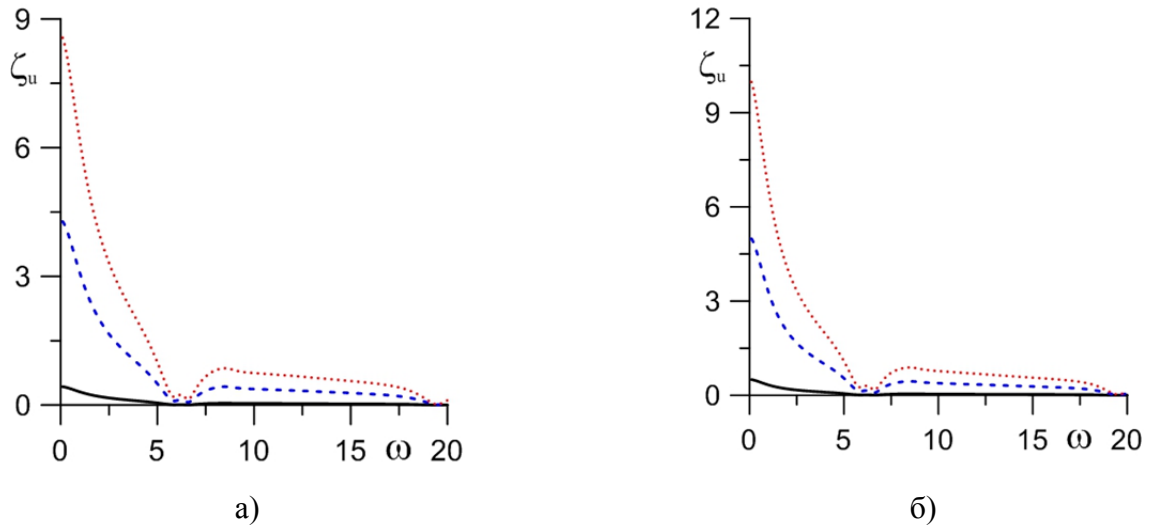


Рисунок 3.5 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $a$  ( $\lambda=1$ ,  $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ).  $a=1$  – сплошная линия,  $a=10$  – штриховая,  $a=20$  – пунктирная; (а)

$$\Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|, \text{ (б) } \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$$

На рис. 3.6 представлена зависимость амплитуды отклонения линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений геометрического параметра  $b$ . Аналогично случаю однородного поля, резонансные частоты увеличиваются и пики смешаются. Следовательно, меняя размеры капли и, соответственно, резонансные частоты, можно попытаться определить различные физические параметры системы, например, параметр Хокинга. Азимутальные частоты могут служить индикатором неоднородности либо поля, либо поверхности пластины.

Сравнивая результаты рис. 2.5 и рис. 2.6, полученные в главе 2 для однородного поля и неоднородных пластин, с рис. 3.5 и рис. 3.6, можно прийти к выводу, что для рассматриваемого случая неоднородности поверхностей,

неоднородность поля не оказывает принципиального влияния в отличие от однородных поверхностей.

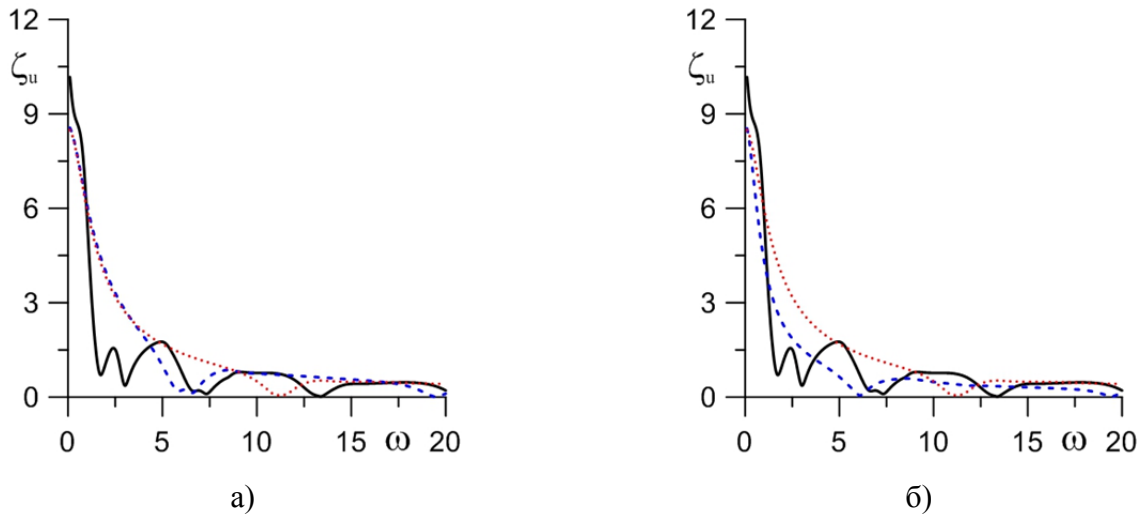


Рисунок 3.6 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $b$  ( $\lambda = 1$ ,  $a = 20$ ,  $\rho_i = 0.7$ ).  $b = 0.5$  – сплошная линия,  $b = 1$  – штриховая,  $b = 1.5$  – пунктирная;

(а)  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos \alpha|$ , (б)  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos(\cos \alpha)|$

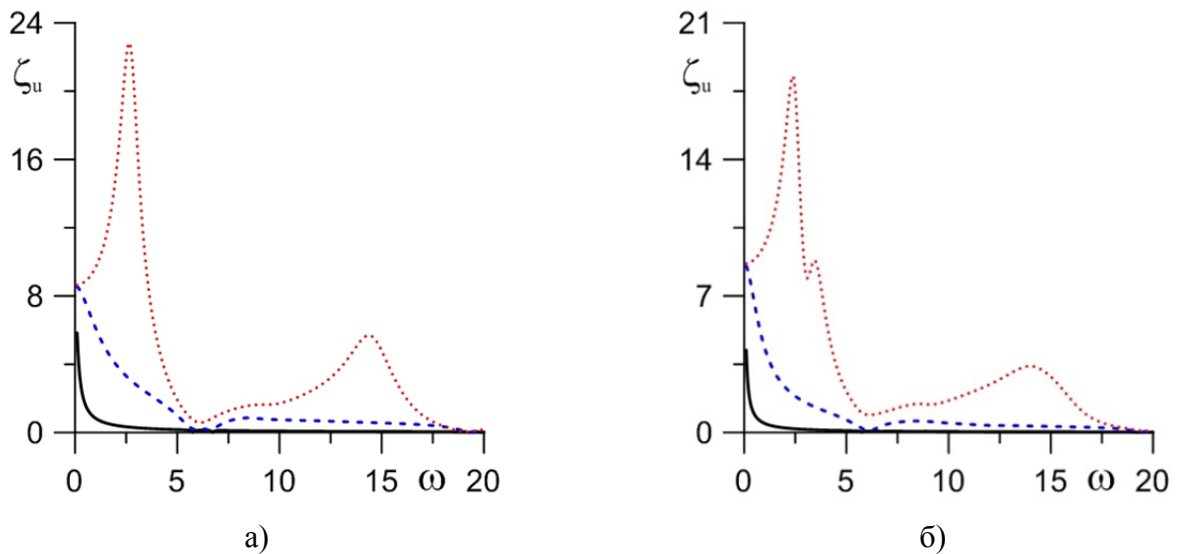


Рисунок 3.7 — Зависимость амплитуды линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda$  ( $b = 1$ ,  $a = 20$ ,  $\rho_i = 0.7$ ).  $\lambda = 1$  – сплошная линия,  $\lambda = 10$  – штриховая,  $\lambda = 20$  – пунктирная;

(а)  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos \alpha|$ , (б)  $\Lambda(\alpha) = \lambda|\cos(\cos \alpha)|$

На рис. 3.7 представлена зависимость амплитуды отклонения линии контакта от частоты  $\omega$  для трех разных значений параметра Хокинга  $\lambda$ . Появляются дополнительные азимутальные моды колебаний при больших

значениях  $\lambda$  – линия контакта слабо взаимодействует с поверхностью пластины. «Антирезонансные» частоты существуют только при малых значениях параметра Хокинга. В этом случае по боковой поверхности капли распространяется бегущая капиллярная волна.

Происходит изменение зависимости краевого угла от частоты электрического поля, существуют пороговые значения внешнего краевого угла капли (рис. 3.8). Дополнительные эффекты возникают за счет взаимодействия линии контакта с подложкой. Т.к. поверхность неоднородная – возникают дополнительные пики, соответствующие попаданием в такие точки, которых нет при однородных поверхностях. И только, когда  $\lambda$  становится настолько высокой, что взаимодействие уменьшается, поверхность становится однородной, и этот эффект исчезает. Пики соответствуют «антирезонансным» частотам.

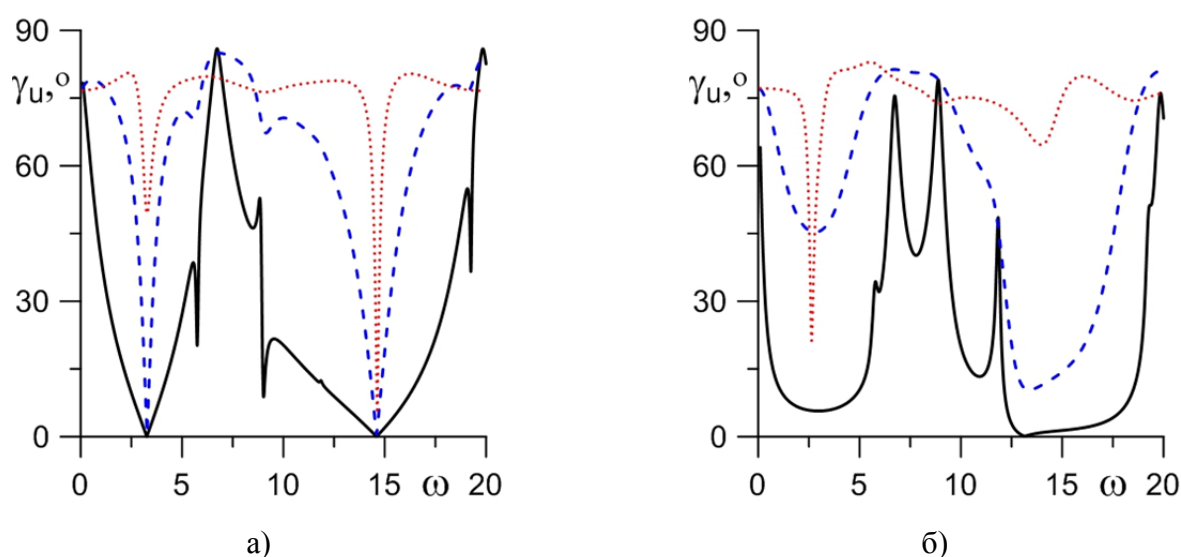


Рисунок 3.8 — Зависимость амплитуды краевого угла от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda$  ( $b=1$ ,  $a=20$ ,  $\rho_i=0.7$ ).  $\lambda=0.1$  – сплошная линия,  $\lambda=1$  – штриховая,  $\lambda=10$  – пунктирная;

$$(a) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos \alpha|, (б) \Lambda(\alpha) = \lambda |\cos(\cos \alpha)|$$

На рис. 3.9 представлена зависимость краевого угла от корня эффективной амплитуды для разных значений частоты  $\omega$  и параметра Хокинга  $\lambda$ . Как и для случая однородного поля, поведение угла принципиально зависит от параметра Хокинга. Полученные зависимости качественно подходят на экспериментальные результаты (см. рис. 1.2) в отличие от случая однородных пластин.

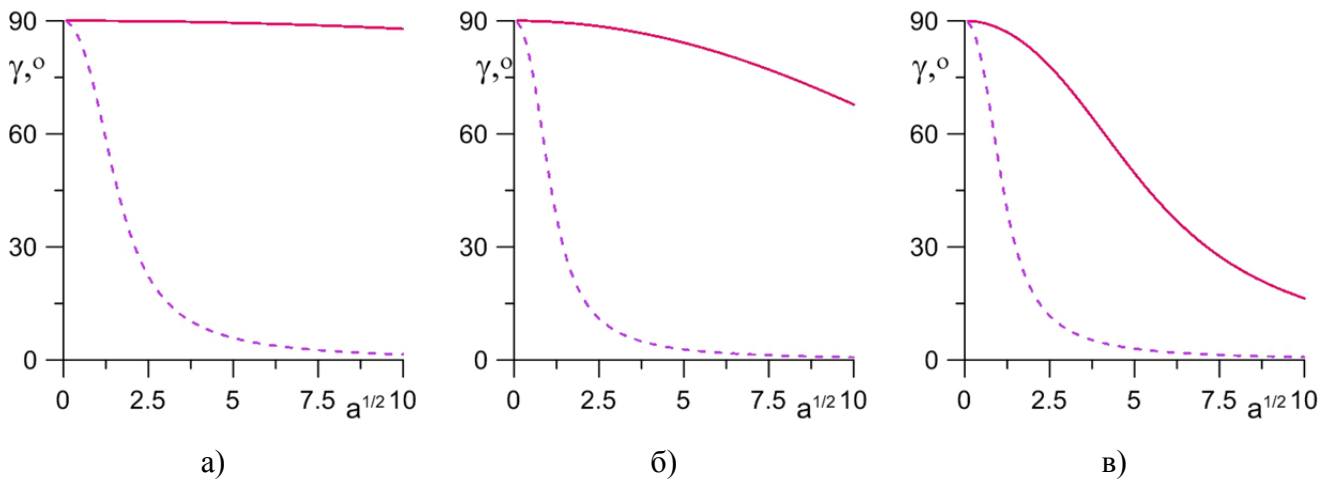


Рисунок 3.9 — Зависимость амплитуды краевого угла от  $\sqrt{a}$  для двух разных значений  $\omega$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\Lambda(\alpha)=\lambda|\cos\alpha|$ ).  $\omega=2.5$  – сплошная линия,  $\omega=6$  – штриховая; а) –  $\lambda=0.1$ , б) –  $\lambda=1$ , в) –  $\lambda=10$

На рис. 3.10 представлена форма боковой поверхности и контактной линии капли. Выше уже отмечалось, что неоднородность поля не оказывает существенного влияния на поведение капли. Напомним, что в равновесном состоянии форма линии контакта представляет собой окружность единичного радиуса. Из рис. 3.10б следует, что капля вытягивается вдоль оси  $y$ , т.е. вдоль направления неоднородности пластины.

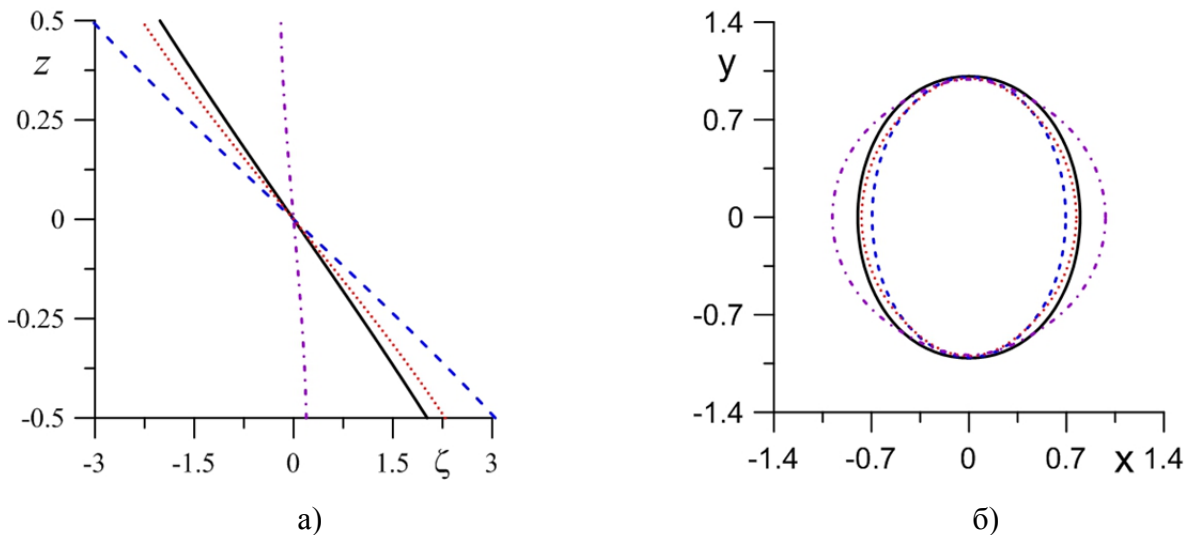


Рисунок 3.10 — Форма боковой поверхности (а) и линии контакта (б) в долях периода  $T$  ( $T=\pi/\omega$ ,  $\Lambda(\alpha)=\lambda|\sin(\cos\alpha)|$ ,  $\lambda=1$ ):  $t=0$  – сплошная,  $t=0.125T$  – штриховая,  $t=0.25T$  – пунктирная,  $t=0.375T$  – штрихпунктирная линия

В рассматриваемом случае неоднородного поля и неоднородной поверхности происходят азимутальные колебания. Резонансными являются частоты азимутальных мод, если такие возникают из-за неоднородности поверхности. В этом случае в них закачивается энергия из соответствующей азимутальной моды неоднородного переменного поля. «Антирезонансные» частоты существуют только при малых значениях параметра Хокинга.

### 3.4. Неоднородные различающиеся пластины

Рассмотрим вынужденные колебания, определяемые внешней периодической силой, действующей только на линии раздела (3.3) трех сред. Для детального изучения рассмотрим три случая неоднородностей поверхности пластин и электрического поля:

1. Неоднородные пластины, однородное электрическое поле (далее НПОП) –  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\sin(\cos(\alpha))|$ ,  $f(\alpha) = 1$ , соответственно;

2. Однородные пластины, неоднородное поле (ОПНП) –  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b}$ ,  $f(\alpha) = |\sin(\cos(\alpha))|$ ;

3. Неоднородные пластины, неоднородное электрическое поле (НПНП) –  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\sin(\cos(\alpha))|$ ,  $f(\alpha) = |\sin(\cos(\alpha))|$ .

Отметим, что в первом случае интегральная амплитуда внешнего воздействия больше, чем в других случаях. Следовательно, в том числе из-за этого, амплитуда вибраций будет отличаться. Кроме того, первый и третий случаи будут качественно похожи, т.к. неоднородность поверхности играет роль эффективной амплитуды вибраций.

Решение краевой задачи (3.1) – (3.4) ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (3.1). С учетом осевой симметрии решение уравнения Лапласа (3.1) с граничным условием (3.3) можно записать в виде:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re}(i2\omega e^{i2\omega t} \psi_i(r, \alpha, z)), \quad (3.12)$$

$$\psi_i(r, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) + a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha),$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega e^{i2\omega t} \psi_e(r, \alpha, z) \right), \quad (3.13)$$

$$\psi_e(r, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) + b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha),$$

где  $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_0(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$ . Используется разложение только по чётным азимутальным функциям, т.к. функции неоднородности являются чётными.

Кинематическое условие на поверхности раздела (второе граничное условие в (2.5) определяет выражение для отклонения поверхности:

$$\zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \xi(\alpha, z) e^{i2\omega t} \right), \quad (3.14)$$

$$\xi(\alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) + c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) +$$

$$+ d_1^{(0)} z^2 \cos(\alpha) + d_1^{(1)} z \cos(\alpha) + \sum_{m=2}^{\infty} \left( d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) + d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) \right) \cos(m\alpha).$$

Последние слагаемые представляют собой общее решение однородного уравнения – скачок давления на границе раздела (2.5).

Подставив решения (3.12) – (3.14) в систему уравнений (2.4) – (2.7), по аналогии с разделом 3.3, получим систему для нахождения неизвестных амплитуд  $a_{mk}$ ,  $b_{mk}$ ,  $c_{mk}$  и  $d_m$ :

$$2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left( d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{m1} \left( \frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \delta_{mn} \left( d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) =$$

$$= \mp \left( B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} \left( \mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{n1} \left( \pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left( \pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) + aC_m \right),$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(n\alpha) \cos(m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) f(\alpha) \cos(m\alpha) d\alpha.$$

Внешняя сила будет возбуждать азимутальные моды вынужденных колебаний капли, которые появляются из разложения в ряд функции неоднородности электрического поля  $f(\alpha)$ . Следовательно, если поле и пластины однородные, то у нас будут возбуждаться только осесимметричные колебания. Если пластины одинаковые, т.е.  $\lambda_u = \lambda_b = \lambda$ , то будут только нечетные гармоники осесимметричной моды, если разные, – то и нечетные и четные.

Для дальнейшего описания динамики боковой поверхности введём следующие обозначения:  $\zeta_u = |\zeta(0, 0.5, 0)|$  – амплитуда колебаний линии контакта на «верхней» пластине,  $\zeta_b = |\zeta(0, -0.5, 0)|$  – на «нижней»,  $\zeta_0 = |\zeta(0, 0, 0)|$  – в центре слоя и при  $z = 0.25$  –  $\zeta_q = |\zeta(0, 0.25, 0)|$ ; значение краевого угла  $\gamma$  на верхней пластине  $\gamma_u$ , а на нижней –  $\gamma_b$ . Частоты собственных колебаний  $\Omega_{mk}$ , где  $m$  – азимутальное число,  $k$  – волновое число.

На рис. 3.11 показаны амплитуды колебаний боковой поверхности и краевых углов для рассматриваемых случаев неоднородности. Отметим, что максимальные значения амплитуды колебаний достигаются в случае линейного резонанса. Двойные соседние пики соответствуют частотам четных и нечетных гармоник осесимметричной моды.

Параметр Хокинга описывает взаимодействие линии контакта с подложкой и, чем меньше его значение, тем сильнее взаимодействие. При  $\lambda = 0$  – линия контакта неподвижна. Следовательно, при рассматриваемых значениях параметров  $\lambda_u = 1$  и  $\lambda_b = 0.1$ , взаимодействие линии контакта с подложкой велико и основное влияние оказывает именно неоднородность поверхности (рис. 3.11). В результате, в случаях НПОП (сплошная линия) и НПНП (пунктирная) появляются дополнительные резонансные пики по сравнению со случаем ОПНП (штриховая).



Эти пики появляются на частотах азимутальных мод, которые возбуждаются главным образом из-за неоднородности подложек. Неоднородность поля в данном случае не является основополагающей.

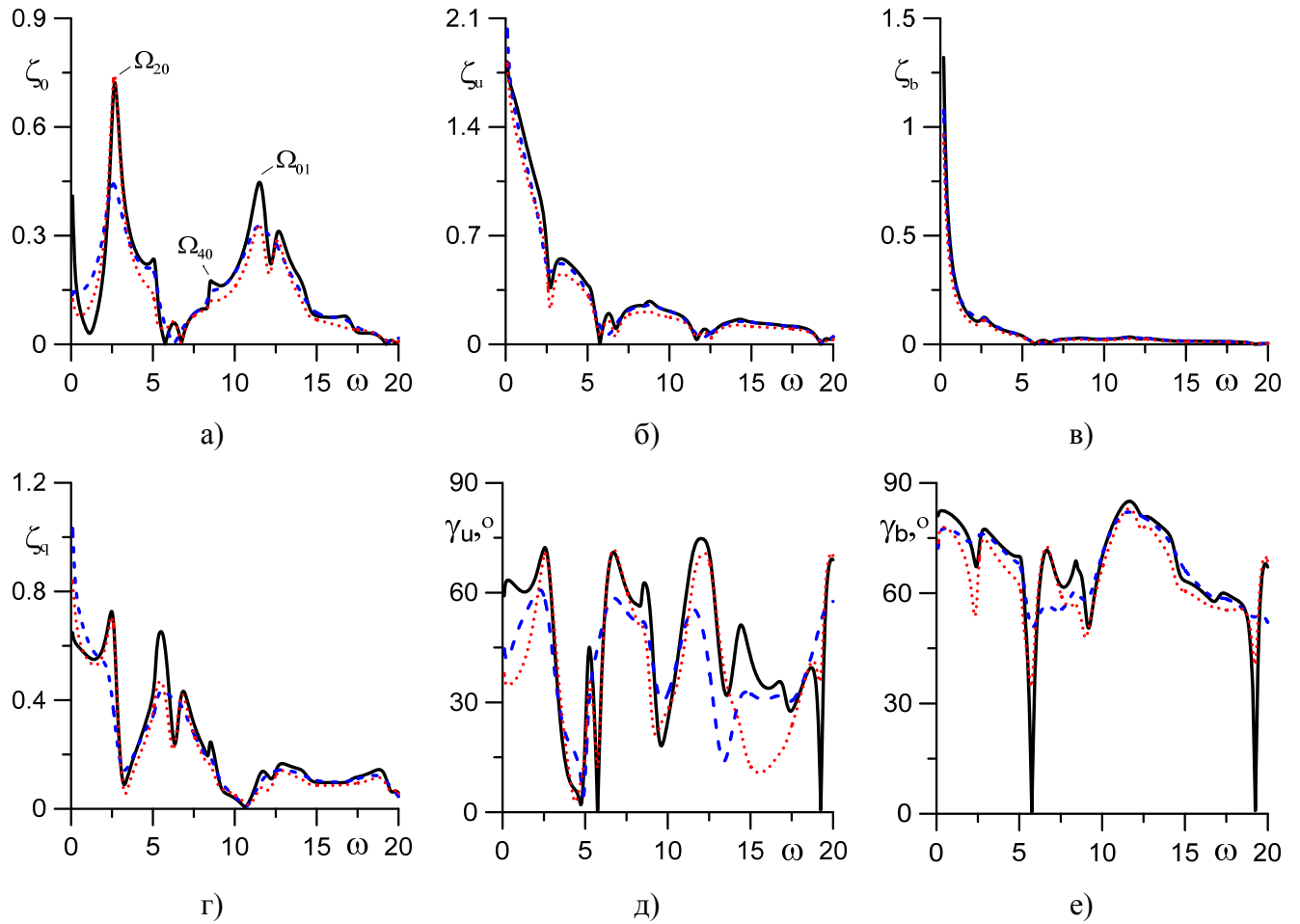


Рисунок 3.11 — Зависимость амплитуды боковой поверхности  $\zeta_0$  (а), контактных линий  $\zeta_u$  (б) и  $\zeta_b$  (в) и поверхности капли  $\zeta_q$  (г) и отклонения краевого угла  $\gamma$  (д, е) от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda_b$  ( $b=1$ ,  $a=5$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=1$ ,  $\lambda_b=0.1$ ): НПП – пунктирная, ОПНП – штриховая, НПОП – сплошная линия

На рис. 3.12 показана форма контактной линии капли на «верхней» пластине в разные моменты времени и значения краевого угла в течение периода для случаев НПОП и ОПНП. Форма линии контакта практически не отличаются (рис. 3.12а, б) в обоих случаях и их форма показывает на наличие азимутальных мод в спектре вынужденных колебаний. Значения краевого угла отличаются незначительно (рис. 3.12в).

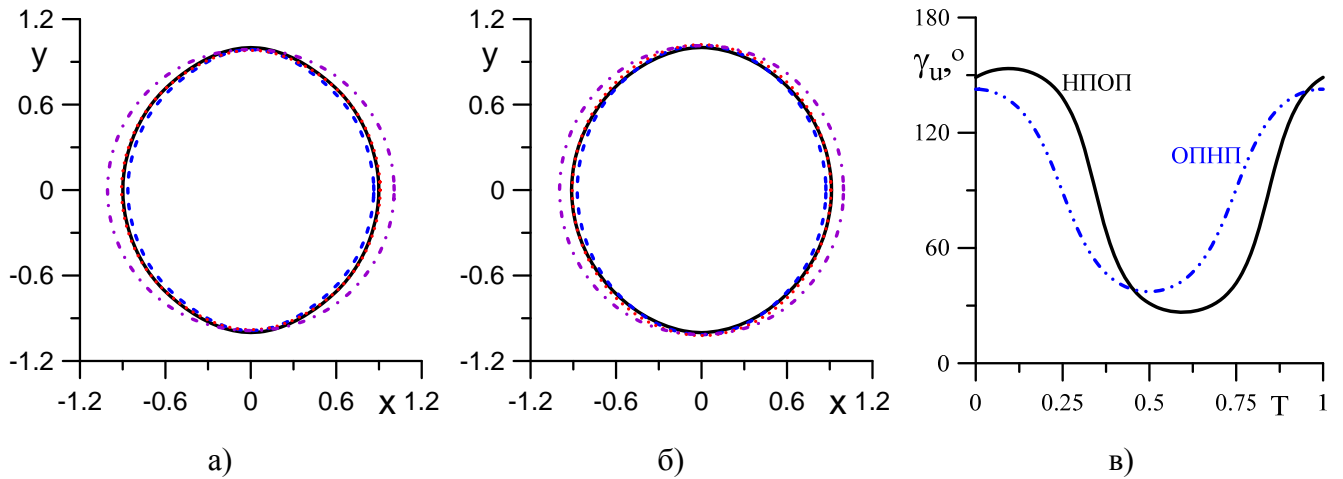


Рисунок 3.12 — Форма контактной линии  $1 + 0.1\zeta(z, t)$  (а, б) и значение краевого угла  $\gamma_u$  (в) на верхней поверхности в разные моменты периода колебаний капли  $T$  ( $T = \pi/\omega$ ,  $b = 1$ ,  $a = 5$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\lambda_u = 1$ ,  $\lambda_b = 0.1$ ,  $\omega = 1$ ). На рис. (а) – (б):  $t = 0$  – пунктирная,  $t = 0.125T$  – штриховая,  $t = 0.25T$  – штрихпунктирная,  $t = 0.375T$  – сплошная линия

С увеличением значения  $\lambda$  уменьшается сила взаимодействия линии контакта с подложкой, т.е. неоднородность электрического поля становится более значимой. С другой стороны, параметр Хокинга для рассматриваемой модели является эффективной амплитудой вибраций, что приводит к увеличению амплитуды колебаний. Таким образом, увеличение параметра Хокинга не приводит в данном случае к уменьшению влияния неоднородности подложки (рис. 3.13).

В большинстве случаев видно наличие дополнительных пиков на частотах азимутальных мод. Это подтверждают и динамические формы линии контакта на рис. 3.14. Отметим, что в случае однородных пластин ОПНП (рис. 3.14б), форма линии контакта наиболее близка к осесимметричной. Увеличение амплитуды в резонансе связано с уменьшением диссипации (см. рис. 3.11).

Выше уже отмечалось, что полученные результаты могут использоваться при проведении экспериментов для определения физических параметров системы, например, параметра Хокинга. Возможно, что этот параметр не является постоянным, а зависит от напряжения (см. раздел 2.4), в отличие от механического вибрационного воздействия.

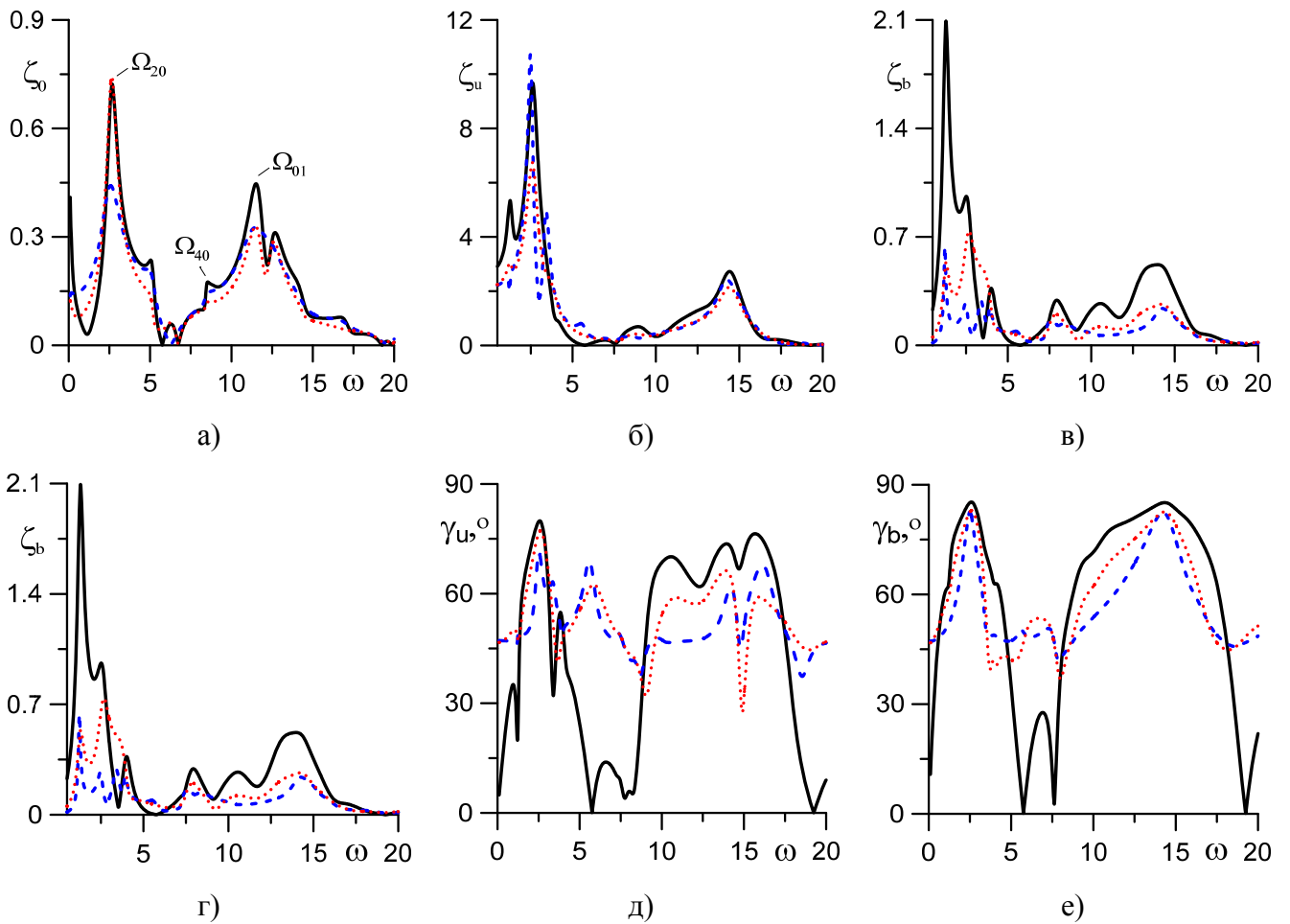


Рисунок 3.13 — Зависимость амплитуды боковой поверхности  $\zeta_0$  (а), контактных линий  $\zeta_u$  (б) и  $\zeta_b$  (в) и поверхности капли  $\zeta_q$  (г) и отклонения краевого угла  $\gamma$  (д, е) от частоты  $\omega$  для трех разных значений  $\lambda_b$  ( $b=1$ ,  $a=5$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\lambda_u=10$ ,  $\lambda_b=100$ ): НПНП – пунктирная, ОПНП – штриховая, НПОП – сплошная линия

Дополнительно необходимо изучить зависимость параметра смачивания от внутренних неоднородностей подложки, т.к. от этого, возможно будет меняться сила взаимодействия между линией контакта поверхностью подложки в электрическом поле. Это позволит выявлять внутренние неоднородности безоткатным методом. В дальнейшем необходимо учесть влияние гистерезиса краевого угла, который может оказывать существенно влияние на поведение капли как в случае электросмачивания [21], так и при вибрационном воздействии [62-64]. Также следует рассмотреть эффект насыщения и при высоких частотах  $\sim 5$  ГГц.

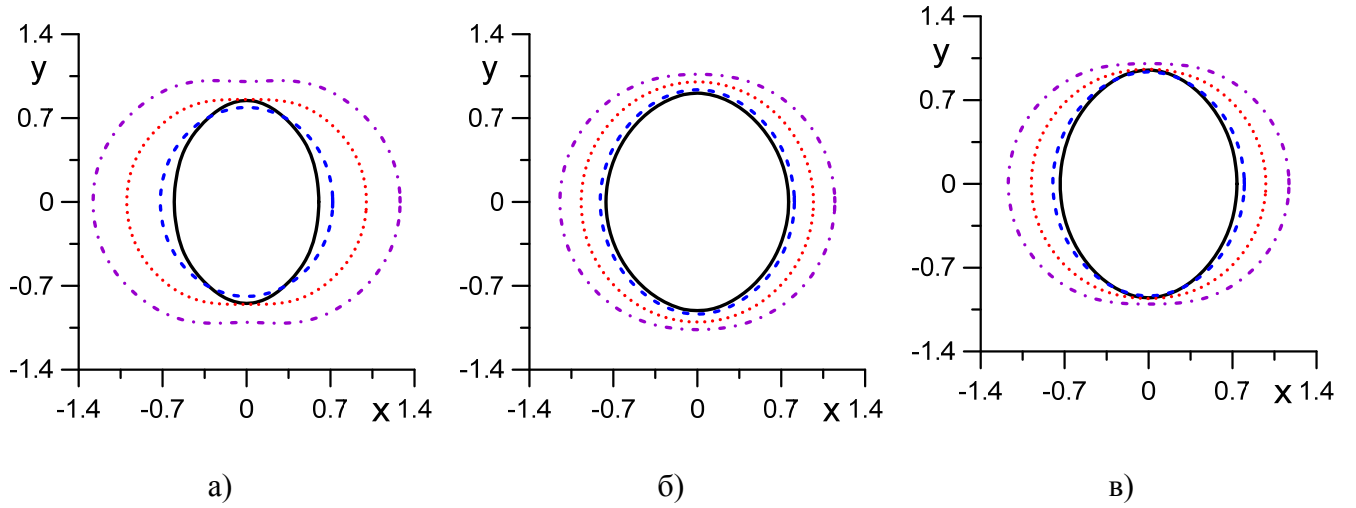


Рисунок 3.14 — Форма контактной линии  $1 + 0.1\zeta(z, t)$  на верхней поверхности в разные моменты периода колебаний капли  $T$  ( $T = \pi/\omega$ ,  $b = 1$ ,  $a = 5$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\lambda_u = 10$ ,  $\lambda_b = 100$ ,  $\omega = 1$ ).

(а) НПОП, (б) ОПНП, (в) НПНП;  $t = 0$  – пунктирная,  $t = 0.125T$  – штриховая,  $t = 0.25T$  – штрихпунктирная,  $t = 0.375T$  – сплошная линия

## ГЛАВА 4. ВИБРАЦИОННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Однородное электрическое поле приводит к возбуждению осесимметричных колебаний. Аналогичные колебания могут возникнуть под действием вибраций.

В данной главе рассматриваются собственные и вынужденные колебания цилиндрической капли, заключенной между твердыми пластинами, с учетом динамики линии контакта, под действием осесимметричных вибраций. Неоднородные твердые пластины имеют различные параметры Хокинга. Неоднородность данных пластин предполагается за счет зависимости от угла  $\alpha$ .

Все результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работах [6, 7].

### 4.1. Постановка задачи

Рассматривается динамическое поведение капли идеальной жидкости плотности  $\rho_i^*$ , окруженной другой жидкостью другой плотности  $\rho_e^*$  (здесь и далее

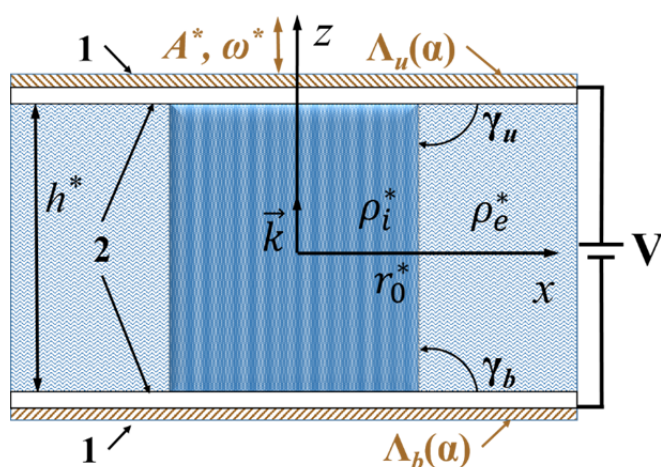


Рисунок 4.1 — Геометрия задачи (1 – электрод, 2 – диэлектрический слой)

величины с нижним индексом  $i$  относятся к капле, а величины с нижним индексом  $e$  – окружающей каплю жидкости). Система ограничена двумя параллельными твердыми поверхностями (рис. 4.1) с межпластинчатым расстоянием  $h^*$ . Равновесная форма капли представляет собой правильный круглый цилиндр с радиусом  $r_0^*$  и высотой  $h^*$ . Ось симметрии этого цилиндра перпендикулярна пластинам. Боковая поверхность капли является границей раздела между жидкостью капли и внешней жидкостью. Эта граница раздела деформируется вместе с изменением коэффициента поверхностного натяжения

Равновесная форма капли представляет собой правильный круглый цилиндр с радиусом  $r_0^*$  и высотой  $h^*$ . Ось симметрии этого цилиндра перпендикулярна пластинам. Боковая поверхность капли является границей раздела между жидкостью капли и внешней жидкостью. Эта граница раздела деформируется вместе с изменением коэффициента поверхностного натяжения

$\sigma^*$ . Равновесный краевой угол  $\vartheta_0$  между поверхностью капли и твердой пластиной равен  $0.5\pi$ . Другими словами, оба значения поверхностных натяжения между жидкостью и пластиной близки. Вибрационная сила, действующая на систему, имеет амплитуду  $A^*$  и частоту  $\omega^*$ . Она направлена вдоль оси симметрии равновесной формы капли. Амплитуда внешней вибрационной силы считается малой в том смысле, что  $A^* \ll r_0^*$ . Поэтому можно ввести малый параметр  $\varepsilon = A^*/r_0^*$  и использовать его позже при линеаризации уравнений. Оценки [7] показывают, что для корректного использования приближения вязкой несжимаемой жидкости для капли  $r_0^* \sim 1$  мм частота вибраций  $\omega^* \sim 10^{-2} - 10^2$  Гц.

Ввиду наличия симметрии задачи удобно ввести цилиндрические координаты  $r^*$ ,  $\alpha$ ,  $z^*$ . Азимутальный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $Ox$ . Поверхность капли описывается следующим уравнением  $r^* = r_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ . Предполагая потенциальное движение жидкости, вводим потенциал скорости  $v^* = \nabla \varphi^*$ . Предполагаем в качестве длины –  $r_0^*$ , высоты –  $h^*$ , плотности –  $\rho_e^* + \rho_i^*$ , времени –  $\sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3}}$ , потенциала скорости –  $A^* \sqrt{\sigma} ((\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3})^{-1/2}$ , давления –  $A^* \sigma (r_0^*)^{-2}$ , и отклонения поверхности –  $A^*$  в качестве характерных величин.

Переходя к безразмерным переменным, получаем следующую линейную задачу:

$$p_j = -\rho_j \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \omega^2 b z e^{i\omega t} \right), \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = i, e, \quad (4.1)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$r = 1: \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (4.2)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

$$r=1, z = \pm \frac{1}{2} : \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (4.4)$$

где  $\Lambda_u(\alpha)$  и  $\Lambda_b(\alpha)$  являются параметрами смачивания (или параметры Хокинга), которые описывают неоднородность верхней ( $z = 0.5$ ) и нижней ( $z = -0.5$ ) пластин, соответственно,  $p$  – давление жидкости. Граничное условие (4.4) является модифицированным условием Хокинга (1.2). Благодаря этому условию диссипацию энергии можно учитывать даже при использовании приближения невязкой жидкости [15, 52–61]. Это позволяет, согласно теореме Кельвина о циркуляции, рассматривать течение как потенциальное даже при наличии деформируемой поверхности раздела.

Краевая задача (4.1) – (4.4) включает в себя шесть безразмерных параметров: амплитуду колебаний –  $\varepsilon = A^*/r_0^*$ , соотношение сторон –  $b = r_0^*/h^*$  (геометрический параметр), параметр смачивания –  $\Lambda = b\Lambda^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^*/\sigma^*}$  (постоянная Хокинга), частоту внешнего воздействия –  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^{*3}/\sigma^*}$ , плотность жидкости в капле –  $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$ , плотность внешней жидкости –  $\rho_e = \rho_e^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$ , последние два параметра связаны соотношением  $\rho_i + \rho_e = 1$ .

## 4.2. Собственные колебания

Рассмотрим частный случай неоднородных пластин:  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$ . Функция  $\Lambda(\alpha)$  представлена в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. В этом случае в спектре будут более важны только четные азимутальные моды с  $\cos(2m\alpha)$  (где  $m$  – целые числа). Это связано с тем, что разложения в ряд по  $\cos(2m\alpha)$  и  $\cos((2m+1)\alpha)$  независимы друг от друга при разложении функции  $\Lambda_{u,b}(\alpha)\zeta_z$  (4.4), но осесимметричная внешняя сила (4.1) не зависит от угла  $\alpha$ . Поэтому в случае вынужденных колебаний возможно возбуждение только мод  $\cos(2m\alpha)$ , что ограничивает наше

рассмотрение только этими модами. Другими словами, изменение параметра Хокинга как функции влияет на силу взаимодействия на линии контакта. Поэтому скорость линии контакта будет разной в разных точках на неоднородной поверхности, в отличие от однородной. Это приводит к возбуждению различных азимутальных мод. Неоднородность поверхности определяет частотный спектр. Собственные колебания цилиндрической капли между однородными поверхностями были изучены в работах [2, 57].

Поля потенциалов скорости и отклонения поверхности могут быть представлены в виде:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) + a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\Omega t}, \quad (4.5)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) + b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\Omega t}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) + c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) + \right. \\ \left. + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left( d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\Omega t}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

где  $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(2)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(2)e}(r) = K_m(2k\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(2)i}(r) = r^m$ ,  $R_{m0}^{(2)e}(r) = r^{-m}$ ,  $I_m$  и  $K_m$  являются модифицированными функциями Бесселя  $m$ -ого порядка первого и второго рода, соответственно. Подставляя решения (4.5) – (4.7) в (4.1) – (4.4), получаем спектрально-амплитудную задачу, собственные значения которой являются значениями частоты собственных колебаний  $\Omega$ :



$$\begin{aligned}
& 2i\Omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left( d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\
& \left. + \delta_{m1} \left( \frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \delta_{mn} \left( d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \\
& = \mp B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} \left( \mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\
& \left. + \delta_{n1} \left( \pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left( \pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$b_{m0}^{(0)} = -a_{m0}^{(0)}, \quad b_{mk}^{(0)} = a_{mk}^{(0)} \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}, \quad b_{mk}^{(1)} = a_{mk}^{(1)} \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}, \quad ma_{mk}^{(0)} = c_{m0}^{(0)} + g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)},$$

$$a_{mk}^{(0)} R_{mkr}^{(0)i}(1) = c_{mk}^{(0)} + g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}, \quad a_{mk}^{(1)} R_{mkr}^{(1)i}(1) = c_{mk}^{(1)} + g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}, \quad c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{2b^2}{\Omega^2} d_1^{(0)},$$

$$c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, \quad c_{m0}^{(0)} = \frac{\Omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - \Omega^2}, \quad c_{mk}^{(0)} = \frac{\Omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - \Omega^2}, \quad c_{mk}^{(1)} = \frac{\Omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - \Omega^2},$$

$$\Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \quad \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{m^2 - 1 + (2\pi kb)^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(0)e}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}}, \quad \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{m^2 - 1 + (2k+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(1)e}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(0)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)i}(r), \quad R_{mkr}^{(1)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)i}(r), \quad R_{mkr}^{(0)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)e}(r), \quad R_{mkr}^{(1)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)e}(r),$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$g_{0k}^{(1)} = \frac{1}{\|\sin((2k+1)\pi z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \sin((2k+1)\pi z) dz,$$

$$g_{0k}^{(2)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos\left(\frac{z}{b}\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{1k}^{(1)} = \frac{1}{\|\sin((2k+1)\pi z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} z \sin((2k+1)\pi z) dz, \quad g_{1k}^{(2)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} z^2 \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(2)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} ch\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}z\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(1)} = \frac{1}{\|\sin((2k+1)\pi z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} sh\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}z\right) \sin((2k+1)\pi z) dz.$$

Данные алгебраические уравнения имеют комплексные решения, которые приводят к затуханию колебаний. Этот эффект вызван только условием на линии контакта (4.4), а не вязким течением жидкости [15, 52–61].

Система (4.8) решалась численно с параметрами  $m = 4$  и  $N = 20$ . Чтобы проверить точность, проведен тест с  $N = 10$  (относительная погрешность  $\sim 5\%$ ) и  $N = 50$  (относительная погрешность  $\sim 1\%$ ).

Уравнения спектрально-амплитудной задачи (4.8) решены численно с помощью метода двумерных секущих. Частоты четных мод обозначены как  $\Omega_{m,2k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), и частоты нечетных мод как  $\Omega_{m,2k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Здесь первый индекс  $m$  – азимутальное, а второй индекс  $2k$  (или  $2k+1$ ) – волновое число. Таким образом, частоты  $\Omega_{m,n}$  собственных колебаний с нечетным индексом  $n$  будут соответствовать нечетным модам, а четный индекс  $n$  соответствует четной моде.

На рис. 4.2 – 4.4 изображена действительная часть  $\Omega_r = \text{Re}(\Omega)$  (частота колебаний) и мнимая часть  $\Omega_i = \text{Im}(\Omega)$  (коэффициент затухания) комплексной собственной частоты. Типичные зависимости показаны на рис. 4.2: частота монотонно уменьшается с увеличением параметра  $\lambda_b$ , а скорость затухания максимальна для конечного параметра смачивания и уменьшается в предельных случаях свободной или неподвижной контактной линии. Обращаем внимание, что для частоты демонстрируется только одно решение, его сопряженное решение (даже относительно оси абсцисс) на графиках не показано. Необходимо отметить, что изменения параметра  $\lambda_u$  (или  $\lambda_b$ ) симметричны относительно друг друга, т.е. есть возможность изменить один из параметров с фиксированным другим.

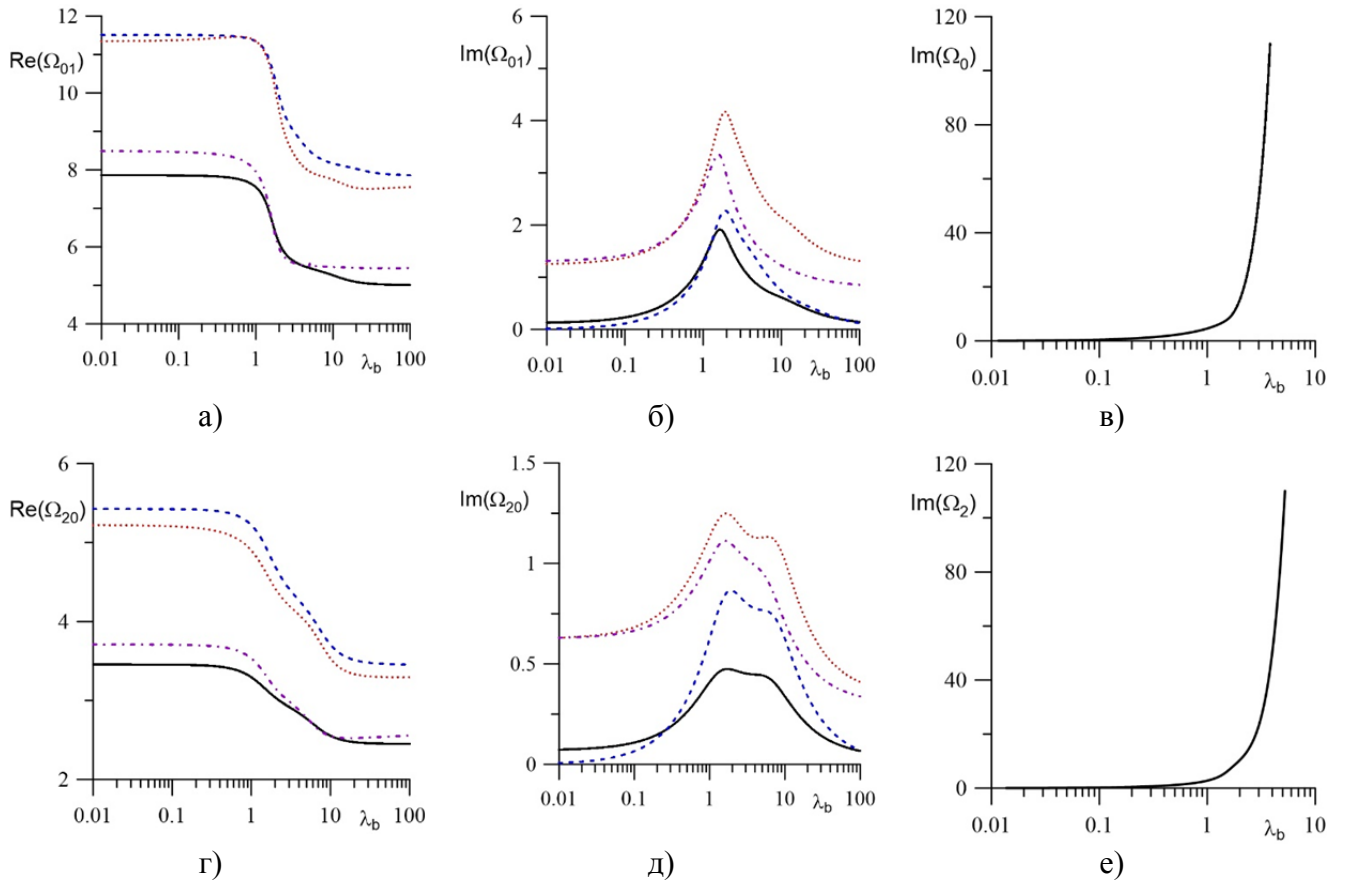


Рисунок 4.2 — Частота (а, г) и декремент затухания (б, в, д, е) собственных колебаний в зависимости от параметра смачивания  $\lambda_b$  для  $\Omega_{01}$  (а, б) и  $\Omega_{20}$  (в, г) ( $b = 1$ ,  $\rho_i = 0.7$ ). (а, б, г, д) – колебательный режим, (в, е) – аperiodический режим;  $\lambda_u = 0$  – пунктирная,  $\lambda_u = 1$  – штриховая,  $\lambda_u = 10$  – штрихпунктирная,  $\lambda_u = 100$  – сплошная линия

Общий декремент затухания определяется суммой индивидуальных коэффициентов для каждой пластины. Этот факт определяет конечное значение декремента затухания при малых  $\lambda_b$ , но конечных  $\lambda_u$  (рис. 4.2б, д). Неоднородность поверхности меняет монотонность кривых и приводит к появлению локальных экстремумов. Помимо колебательного (периодического) режима существует также монотонный (аperiodический) режим, при котором корни уравнения (4.8) имеют только мнимую часть (рис. 4.2в, е). Эти два процесса не взаимодействуют до тех пор, пока частота колебательного режима не станет равной нулю.

В определенном диапазоне  $\lambda_b$ , действительная часть частоты  $\text{Re}(\Omega_{01})$  может исчезнуть. Это зависит от значения геометрического параметра  $b$  и

параметра Хокинга  $\lambda_u$  (рис. 4.3а). Зануление  $\text{Re}(\Omega_{01})$  соответствует бифуркации ветви инкремента  $\text{Im}(\Omega_{01})$  (рисунок 4.б, с).

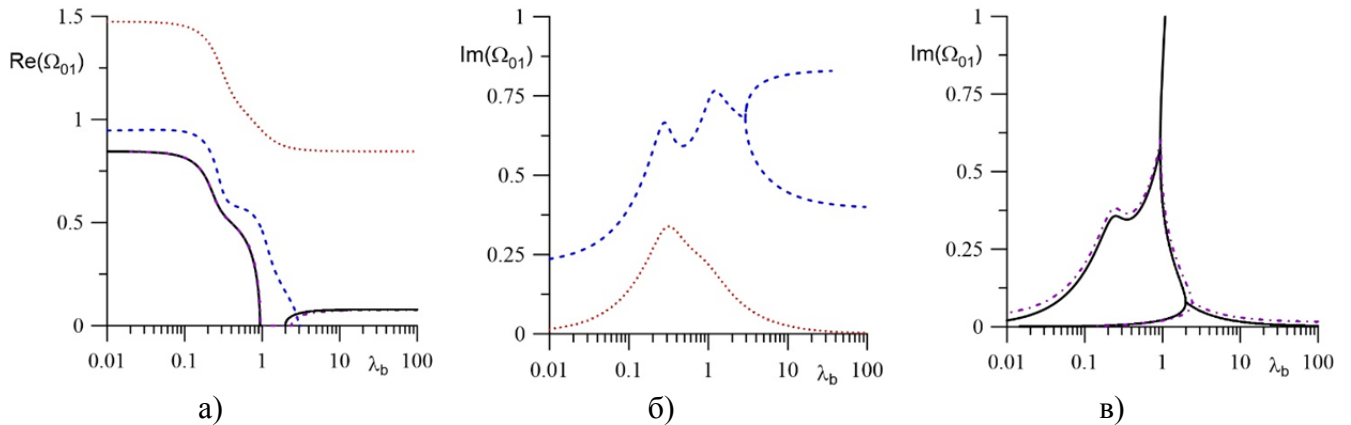


Рисунок 4.3 — Частота (а) и декремент затухания (б, в) собственных колебаний в зависимости от параметра смачивания  $\lambda_b$  для  $\Omega_{01}$  ( $b = 0.32$ ,  $\rho_i = 0.7$ ).  $\lambda_u = 0$  – пунктирная,  $\lambda_u = 1$  – штриховая,  $\lambda_u = 10$  – штрихпунктирная,  $\lambda_u = 100$  – сплошная линия

Причиной исчезновения частоты является величина диссипации (параметры  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$  конечны), которая настолько велика, что происходит монотонное затухание начальных возмущений, и свободные колебания не могут возникнуть. В этом случае диссипация пропорциональна площади боковой поверхности капли для поверхностных гармоник собственных колебаний (чем больше поверхность, тем больше энергии требуется для возбуждения поверхностных волн, а энергия колебаний капли пропорциональна объему).

Следовательно, можно сделать вывод о том, что увеличение соотношения сторон  $b$  соответствует уменьшению боковой поверхности капли при ее постоянном объеме, т.е. диссипация уменьшает колебания поверхности (рис. 4.2,  $b = 1$ ). При геометрическом параметре  $b < \pi^{-1}$  коэффициент затухания первой формы частоты становится отрицательным [57], что соответствует возникновению неустойчивости Рэля-Плато.

На рис. 4.4 приведены зависимости частоты колебаний и коэффициента затухания комплексной собственной частоты  $\Omega_{20}$  для второй азимутальной моды от параметра смачивания  $\lambda_b$ . Действительная часть частоты  $\text{Re}(\Omega_{20})$  может исчезать в определенном диапазоне  $\lambda_b$  (рис. 4.4а), как и  $\text{Re}(\Omega_{01})$  при

$b = 4$  (рис. 4.3а). Этот диапазон отсутствует для малых значений геометрического параметра  $b$  (ср. случай при  $b = 1$  на рис. 4.2г, д). В этом случае диссипация пропорциональна длине линии контакта, потому что это просто взаимодействие между линией контакта и твердой пластиной, которое вызывает диссипацию энергии. Следовательно, увеличение параметра  $b$  приводит к увеличению длины линии контакта при постоянном объеме капли, т.е. увеличивает диссипацию энергии. Разрыв декремента затухания происходит в точке равенства двух различных режимах колебаний (рис. 4.4в). Это можно продемонстрировать другим способом. Основная частота  $\Omega_m$   $m$ -й азимутальной моды ( $m \geq 2$ ) не зависит от вертикальной координаты  $z$ , поэтому в данном случае  $\zeta_z \ll 1$ . В результате, используя уравнение Бернулли и граничные условия, можем получить аналог уравнения затухающего осциллятора для конечных  $\lambda$ :

$$\zeta_{tt} + \Omega_m^2 \zeta = \lambda b \zeta_{zt}, \quad \Omega_m^2 = m(m^2 - 1).$$

Таким образом, коэффициент затухания (в правой части этого уравнения) увеличивается с увеличением значения  $b$ . Другой механизм затухания существует при рассмотренном выше затухании капиллярных волн (см. рис. 4.3), т.к. зависимость функции  $\zeta$  от координаты  $z$  является в этом случае принципиальной.

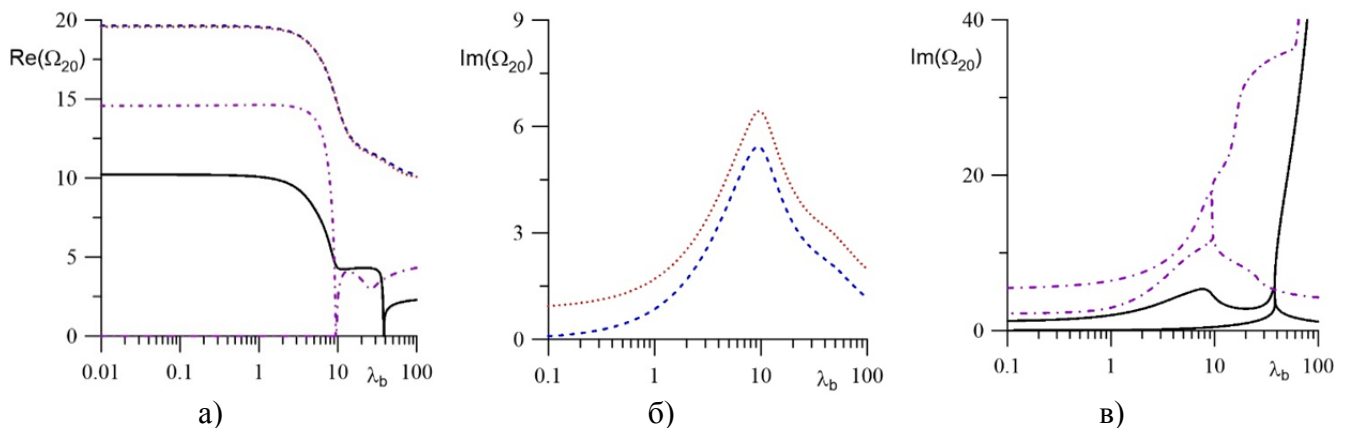


Рисунок 4.4 — Частота (а) и декремент затухания (б, в) собственных колебаний в зависимости от параметра смачивания  $\lambda_b$  для  $\Omega_{20}$  и  $\Omega_{20}$ , ( $b = 4$ ,  $\rho_i = 0.7$ ):  $\lambda_u = 0$  – штриховая,  $\lambda_u = 1$  – пунктирная,  $\lambda_u = 10$  – штрихпунктирная,  $\lambda_u = 100$  – сплошная линия

### 4.3. Вынужденные колебания

Рассмотрим также случай вынужденных колебаний, определяемых внешней периодической силой, которая действует только на линии раздела трех сред. По аналогии с рассмотренными выше собственными колебаниями, решение краевой задачи (4.1) – (4.4) ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) + a_{mk}^{(2)} R_{mk}^{(2)i}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\omega t} \right), \quad (4.9)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( b_{mk}^{(1)} R_{1mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) + b_{mk}^{(2)} R_{mk}^{(2)e}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\omega t} \right), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) + c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) + \right. \\ \left. + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left( d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i\omega t} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(2)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(2)e}(r) = K_m(2k\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(2)i}(r) = r^m$ ,  $R_{m0}^{(2)e}(r) = r^{-m}$ ,  $I_m$  и  $K_m$  являются модифицированными функциями Бесселя  $m$ -ого порядка.

Для удобства введем следующие обозначения:  $\zeta_u = \zeta(0, 0.5, 0)$  и  $\zeta_b = \zeta(0, -0.5, 0)$  – амплитуды колебаний контактной линии на «верхней» и «нижней» пластинах соответственно,  $\zeta_0 = \zeta(0, 0, 0)$  – амплитуда колебаний поверхности при  $z = 0$ ,  $\zeta_q = \zeta(0, 0.25, 0)$  – амплитуды колебаний поверхности при  $z = 0.25$ ,  $\gamma_u$  и  $\gamma_b$  – внутренние контактные углы, т. е. контактный угол внутри капли на «верхней» и «нижней» пластинах соответственно.

Зависимость амплитуды колебаний поверхности и краевого угла в зависимости от частоты внешних колебаний приведена на рис. 4.5 для различных значений параметра смачивания  $\lambda_b$ .

Внешняя сила (4.1) возбуждает в основном осесимметричные колебания. В случае однородных и гладких пластин возбуждаются только осесимметричные нечетные гармоники, которые пропорциональны  $\sin((2k+1)\pi z)$ , входящей в решения (4.9) – (4.11) [58, 69]. Поскольку в нашем случае поверхности разные и неоднородные, также возбуждается четный спектр. Четность решения относительно оси  $Oz$  теряется, четная / нечетная симметрия нарушается, и возбуждается осесимметричный режим, но как четные, так и нечетные гармоники ( $\cos(2k\pi z)$  и  $((2k+1)\pi z)$ ) [2].

Амплитуда колебаний поверхности капли и краевого угол достигают максимальных значений в режиме линейного резонанса (рис. 4.5). Из рисунков также видно, что значения резонансных частот уменьшаются с увеличением  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$ .

Диссипация энергии ограничивает высоту резонансных пиков. Несмотря на слабую диссипацию при малых значениях параметра  $\lambda_b$  ( $\lambda_u = 1$ ), амплитуда колебаний контактной линии на «верхней» пластине больше, чем на «нижней» пластине (рис. 4.5а, г, пунктирные линии). В противоположном случае, при  $\lambda_b = 100$ , амплитуда колебаний «нижней» контактной линии выше, поскольку общая диссипация меньше. Краевой угол изменяется в широком диапазоне (рис. 4.5д, е). Однако можно увидеть, что амплитуда краевого угла уменьшается с увеличением параметра  $\lambda_b$  (рис. 4.5е). Это происходит из-за уменьшения силы взаимодействия между линией контакта и поверхностью подложки.

Следует отметить, что когда хотя бы один из параметров  $\lambda_u$  или  $\lambda_b$  конечен, амплитуда колебаний поверхности всегда ограничена. Другими словами, коэффициент затухания свободных колебаний максимален при конечных значениях параметров смачивания  $\lambda_u$  и  $\lambda_b$ . Следовательно, диссипация определяется суммарным вкладом коэффициентов затухания, и

кривые имеют форму резонансной кривой (рис. 4.5б, в). Амплитуда колебаний линии контакта стремится к бесконечности при  $\lambda \rightarrow \infty$ , тогда как амплитуда колебаний поверхности капли ограничивается бесконечностью при  $\lambda \rightarrow 0$ . Коэффициенты затухания в этих предельных случаях невелики.

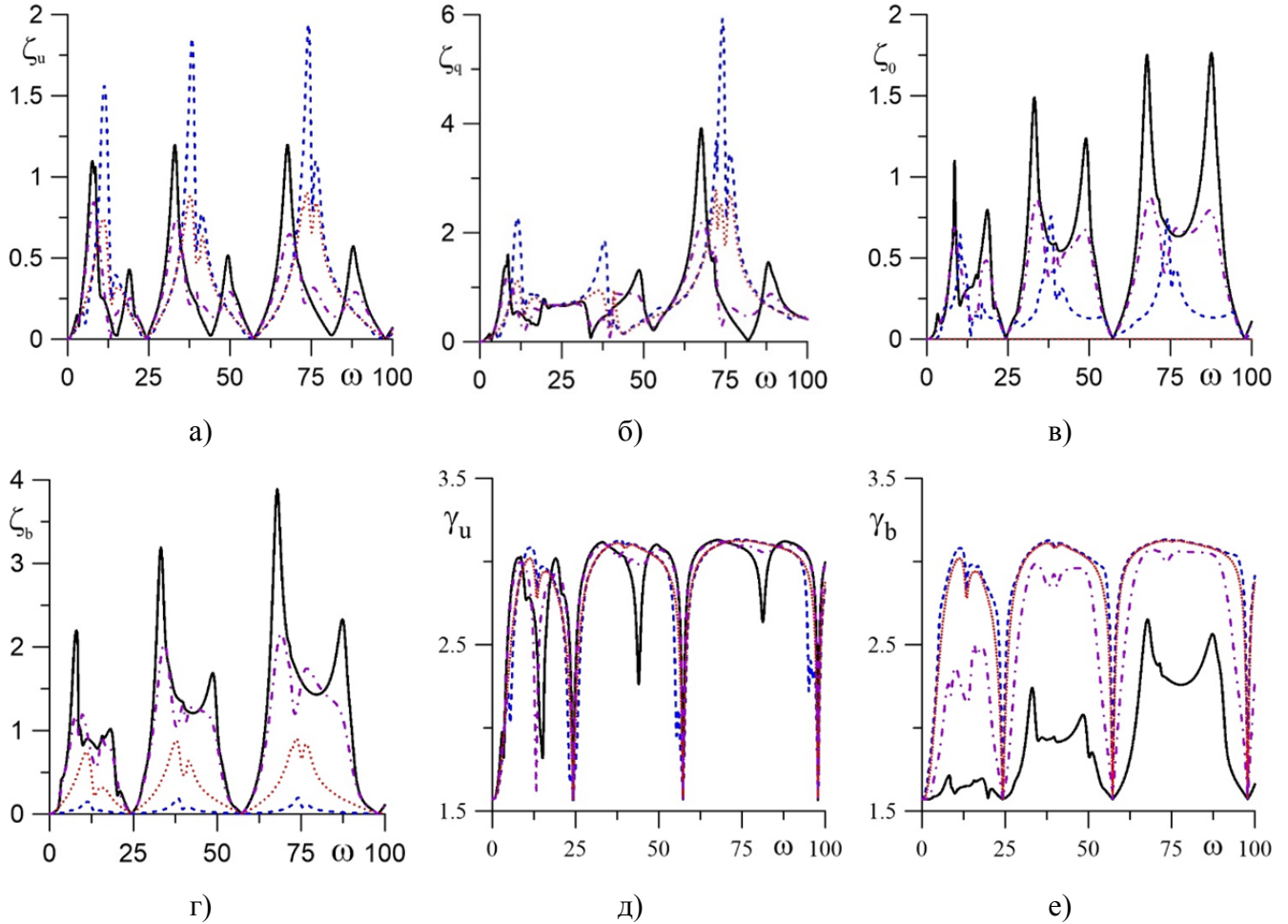


Рисунок 4.5 — Амплитуда боковой поверхности  $\zeta_u$  (а),  $\zeta_q$  (б),  $\zeta_0$  (в),  $\zeta_b$  (г), краевой угол  $\gamma_u$  (д) и  $\gamma_b$  (е) как функция частоты  $\omega$  внешней вибрационной силы для четырех значений параметра Хокинга  $\lambda_b$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$  и  $\lambda_u=1$ ). Случаи при  $\lambda_b=0.1, 1, 10$  и  $100$  соответствуют штриховой, пунктирной, штрихпунктирной и сплошной линиям

При определенных частотах  $\omega$  движение капли не зависит от параметров смачивания  $\lambda_{u,b}$ : линия контакта выглядит неизменной при любых значениях  $\lambda_{u,b}$  (рис. 4.5). Значения таких «антирезонансных» частот определяются из решения (4.11):  $\zeta(0, \pm 0.5, 0) = 0$ .



Результаты для одинаковых пластин более подробно обсуждаются в работах [57, 58, 69]. Например, нулевая амплитуда колебаний поверхности капли наблюдается в центре слоя при  $\lambda_u = \lambda_b = 1$  (рис. 4.5в), т.к. в этой ситуации внешняя сила возбуждает только нечетные гармоники.

Как было отмечено выше, при отличающихся друг от друга поверхностях пластинах внешняя вибрационная сила возбуждает как нечетные, так и четные продольные моды (вдоль оси симметрии  $Oz$ ). В результате каждая мода колебаний имеет два близких резонансных пика (см. рис. 4.5). Амплитуда первого «нечетного» пика больше, чем амплитуда второго «четного» пика, потому что вибрационная сила перекачивает энергию в нечетные моды формы. Эта энергия перераспределяется в равномерный режим из-за разницы в свойствах поверхностей (фактически, из-за отсутствия симметрии относительно координаты  $z$ ). Резонансные амплитуды могут быть сопоставимы в центре слоя (при  $z = 0$ ), поскольку амплитуда «нечетного» пика равна нулю при равных параметрах Хокинга. Более того, эти пики более выражены при больших значениях параметра  $\lambda$ .

Неоднородность поверхности дополнительно возбуждает азимутальные моды. В этом случае наблюдаются дополнительные резонансные пики (рис. 4.5). Два основных пика соответствуют возбуждению четного и нечетного режимов вибраций, но небольшие пики соответствуют частотам азимутальной моды (см. рис. 4.2, 4.4, 4.5). Внешняя колебательная сила возбуждает только нечетные гармоники осесимметричной моды. Четные гармоники этого режима возникают из-за разницы в свойствах поверхности, т.е. энергия передается им от нечетных гармоник. Азимутальные моды возбуждаются из-за неоднородности поверхности, т.е. в этом случае энергия передается из осесимметричной моды. Основные колебания происходят на частотах осесимметричных мод.

На рис. 4.6 показана форма боковой поверхности капли и линия контакта на верхней и нижней подложках в разное время периода колебаний. В качестве

примера рассматривается первая резонансная частота внешнего вибрационного воздействия равная  $\omega = 11.5$  ( $b = 1$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\lambda_u = \lambda_b = 0.1$ ).

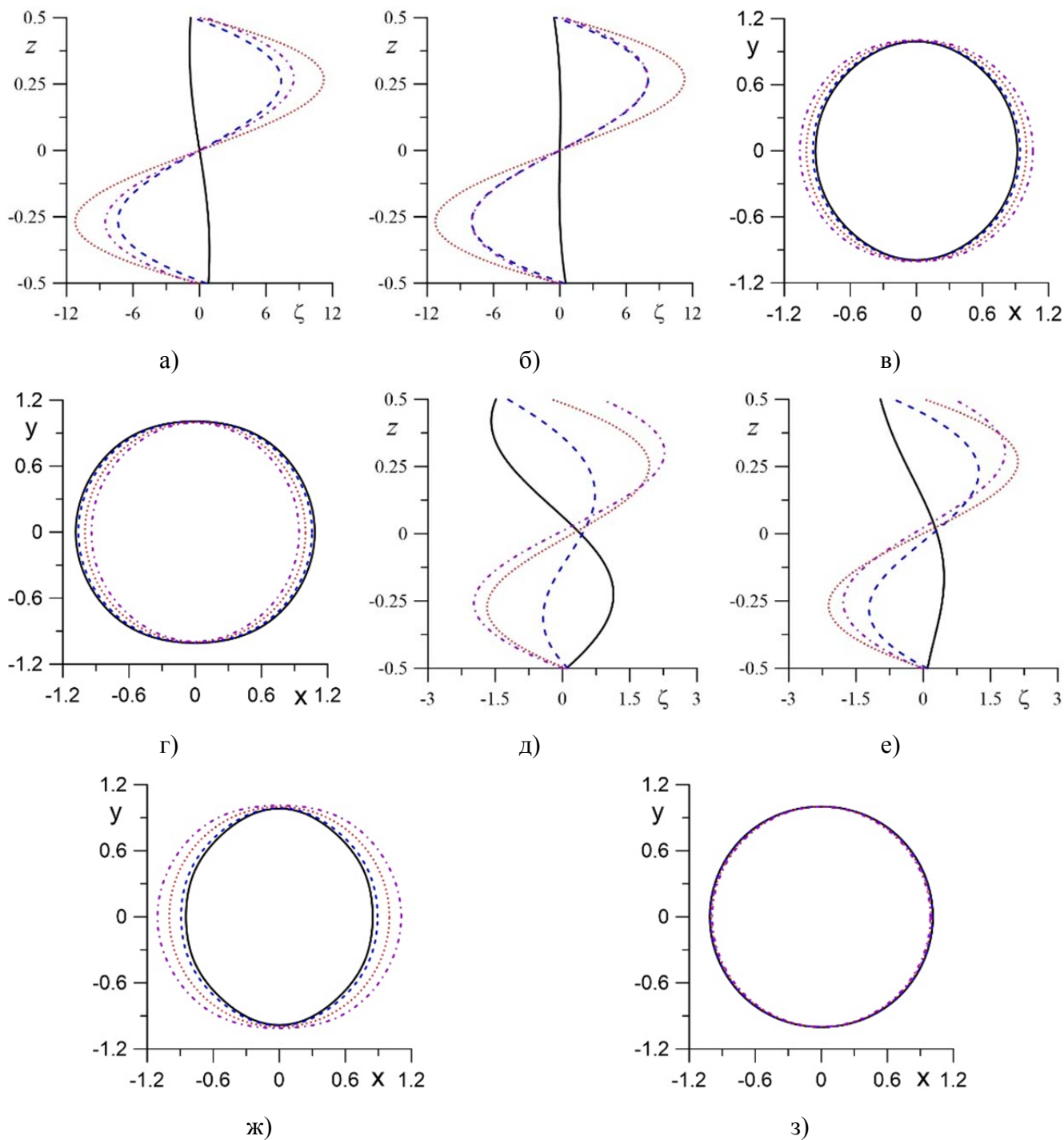


Рисунок 4.6 — Форма боковой поверхности  $\zeta(0, z, t)$  (а, д),  $\zeta(0.5\pi, z, t)$  (б, е) и контактной линии капли  $1 + 0.1\zeta(\alpha, 0.5, t)$  (в, г),  $1 + 0.1\zeta(\alpha, -0.5, t)$  (ж, з) в разные моменты времени.

$T = 2\pi\omega^{-1}$  — период колебаний. ( $b = 1$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\omega = 11.5$ ,  $\lambda_b = 0.1$ ,  $\lambda_u = 0.1$  ((а)–(г)),  $\lambda_u = 1$  ((д)

– (з)). Случаи при  $t = 0, 0.125T, 0.25T$  и  $0.375T$  соответствуют сплошной, штриховой,

пунктирной, штрихпунктирной линиям

Амплитуда колебаний линии контакта (рис. 4.6а, б) довольно велика, несмотря на малые значения параметра  $\lambda_u = \lambda_b = 0.1$ , которые соответствуют низкой подвижности линии контакта в результате эффекта линейного резонанса. В нерезонансном случае (рис. 4.6д, е) амплитуда колебаний контактной линии на «нижней» подложке мала при том же значении параметра  $\lambda_b = 0.1$ , в то время как амплитуда «верхней» контактной линии увеличивается из-за увеличения параметра  $\lambda_u$ . Ясно, что резонансная амплитуда колебаний боковой поверхности больше, чем нерезонансная (сравнивая рис. 4.6а и рис. 4.6г). Динамика формы контактных линий свидетельствует о наличии азимутальных мод ( $m = 2$  является наиболее заметной), как упоминалось выше. Также форма границы не имеет четко определенной ровности для  $\lambda_u \neq \lambda_b$  (рис. 4.6д, е) в отличие от  $\lambda_u = \lambda_b$  (рис. 4.6а, б). Форма контактной линии демонстрирует слабое присутствие азимутальных мод (см. рис. 4.6в, г, ж, з).

На рис. 4.7 представлены графики амплитуды колебаний отклонения боковой поверхности в центре слоя  $\zeta_0$  на нижней пластине  $\zeta_b$ , на верхней пластине  $\zeta_u$ , в четверти слоя  $\zeta_q$ , краевого угла  $\gamma_b$  на нижней пластине и на верхней пластине  $\gamma_u$  как функции частоты внешних колебаний  $\omega$  при различных значениях параметра Хокинга  $\lambda_b$ . Геометрический параметр  $b$  равен 0.32. В случае симметрии возбуждаются только нечетные гармоники.

Собственная частота первой гармоники осесимметричного режима ( $m = 0$ ) может обращаться в ноль в определенном интервале значений параметра Хокинга  $\lambda_u$  ( $\lambda_b$  фиксируется) при уменьшении соотношения сторон  $b$  (см. рис. 4.3). В результате первый резонансный максимум исчезает при минимальном значении  $b = 0.32$  (рис. 4.7) и появляется при  $b = 1$  (рис. 4.5).

Как упоминалось выше, частоты собственных колебаний зависят от геометрического параметра  $b$ . Значения собственных частот уменьшаются с уменьшением геометрического параметра  $b$ , что вызывает смещение резонансных пиков влево, вдоль оси  $\omega$  (сравнивая рис. 4.5 и рис. 4.7). Графики (рис. 4.7е) наглядно демонстрируют зависимость краевого угла от параметра

смачивания: краевой угол изменяется в широком диапазоне при малых значениях параметра  $\lambda_b$  (пунктирная линия) и фактически остается постоянным при больших значениях этого параметра (сплошная линия). Резонансные пики осесимметричной моды более отчетливы по сравнению с азимутальными модами.

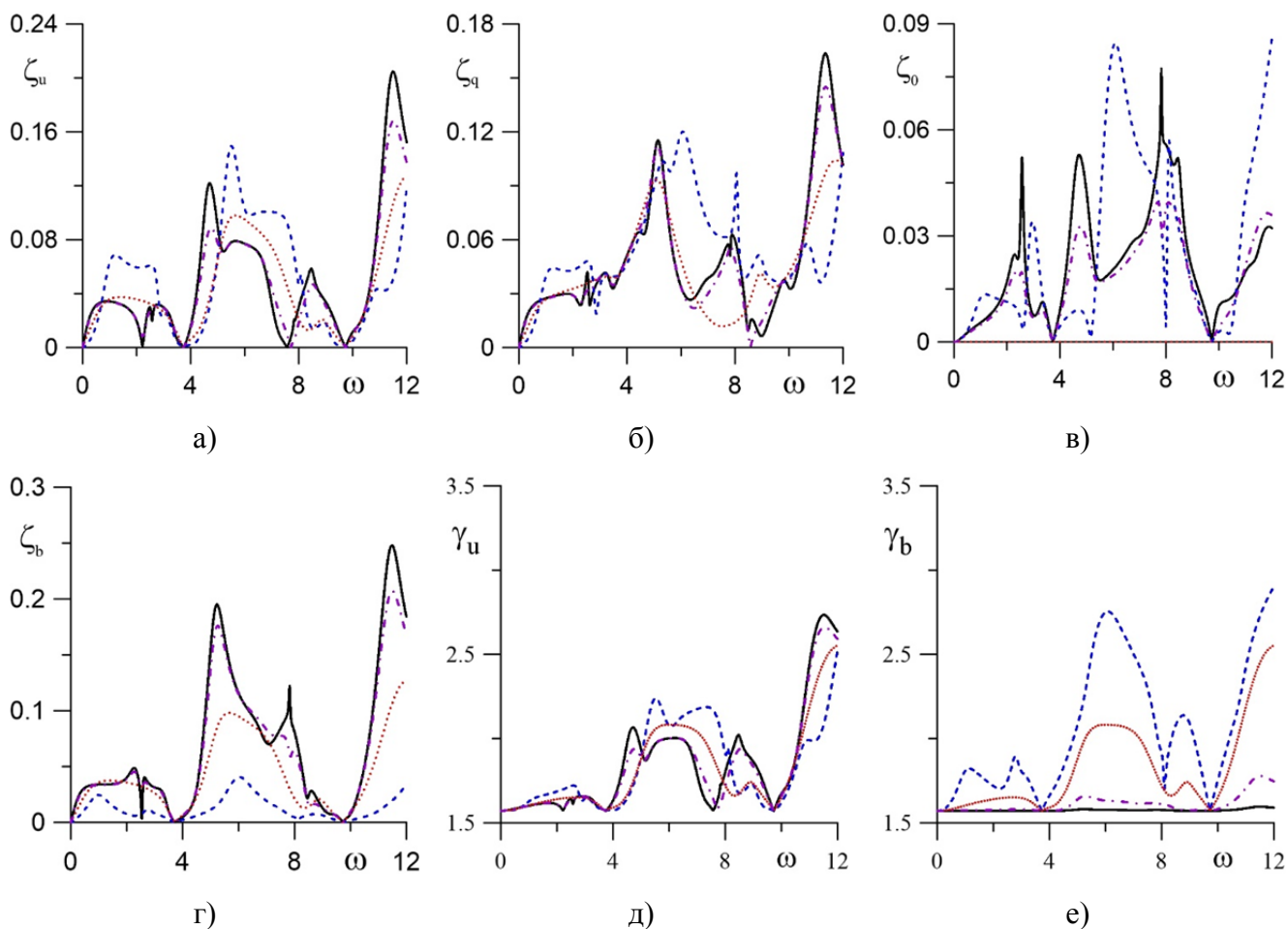


Рисунок 4.7 — Амплитуда боковой поверхности  $\zeta_u$  (а),  $\zeta_q$  (б),  $\zeta_0$  (в),  $\zeta_b$  (г), краевой угол  $\gamma_b$  (д) и  $\gamma_u$  (е) как функция частоты  $\omega$  внешней вибрационной силы для различных значений параметра Хокинга  $\lambda_b$  ( $b = 0.32$ ,  $\rho_i = 0.7$  и  $\lambda_u = 1$ ). Случаи при  $\lambda_b = 0.1, 1, 10$  и  $100$  соответствуют штриховой, пунктирной, штрихпунктирной и сплошной линиям.

Основная частота любой моды также может исчезать по мере увеличения объема капли, т.е. с увеличением параметра смачивания  $\lambda$  (рис. 4.4). Это происходит из-за диссипации на линии контакта, как это сказано выше. Следует отметить, что механизм отличается для трансляционного режима (подробнее см. [57]). Амплитуда колебаний и формы капель показаны на рис. 8 – 9 при большем

значении соотношения сторон  $b=4$ . При этом значении геометрического параметра резонансные пики смещаются вправо, значения частот при этом увеличиваются (рис. 4.8).

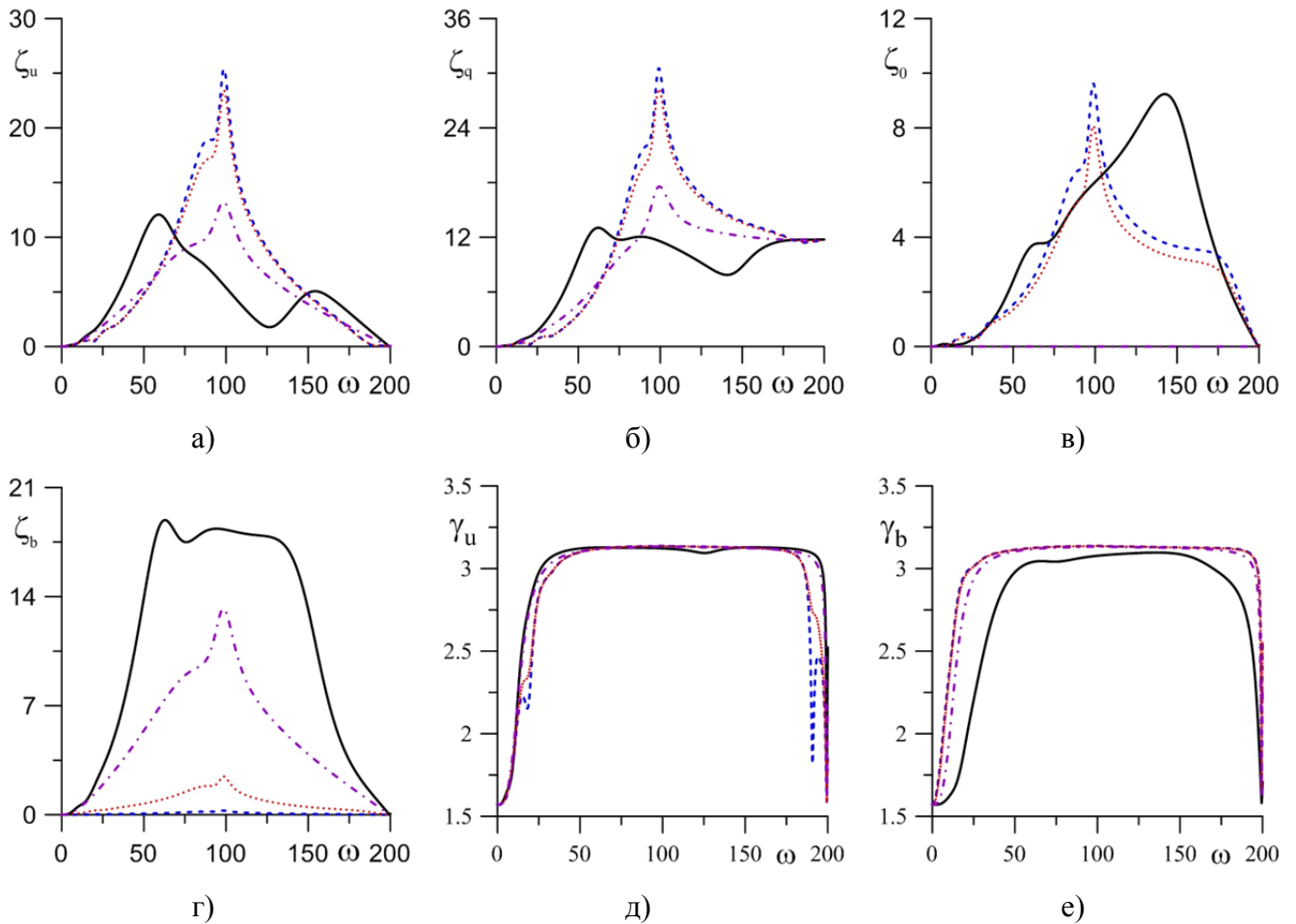


Рисунок 4.8 — Амплитуда боковой поверхности  $\zeta_u$  (а),  $\zeta_q$  (б),  $\zeta_0$  (в),  $\zeta_b$  (г), краевой угол  $\gamma_u$  (д) и  $\gamma_b$  (е) как функция частоты  $\omega$  внешней вибрационной силы для различных значений параметра Хокинга  $\lambda_b$  ( $b=4$ ,  $\rho_i=0.7$  и  $\lambda_u=10$ ). Случаи при  $\lambda_b=0.1, 1, 10$  и  $100$  соответствуют штриховой, пунктирной, штрихпунктирной и сплошной линиям

Для основной частоты азимутальной моды  $m=2$  резонансный пик наблюдается только при малых и конечных значениях параметра  $\lambda_b$  ( $\lambda_u=10$  рис. 4.8) и отсутствует при больших значениях  $\lambda_b$ , поскольку сила взаимодействия между линией контакта и подложкой становится меньше и неоднородность поверхности подложки не влияет на ее перемещение. Это приводит к

осесимметричным колебаниям линии контакта (рис. 4.9ж, з) в отличие от случая малых  $\lambda_b$ , когда появляются заметные азимутальные моды (рис. 4.9в, г).

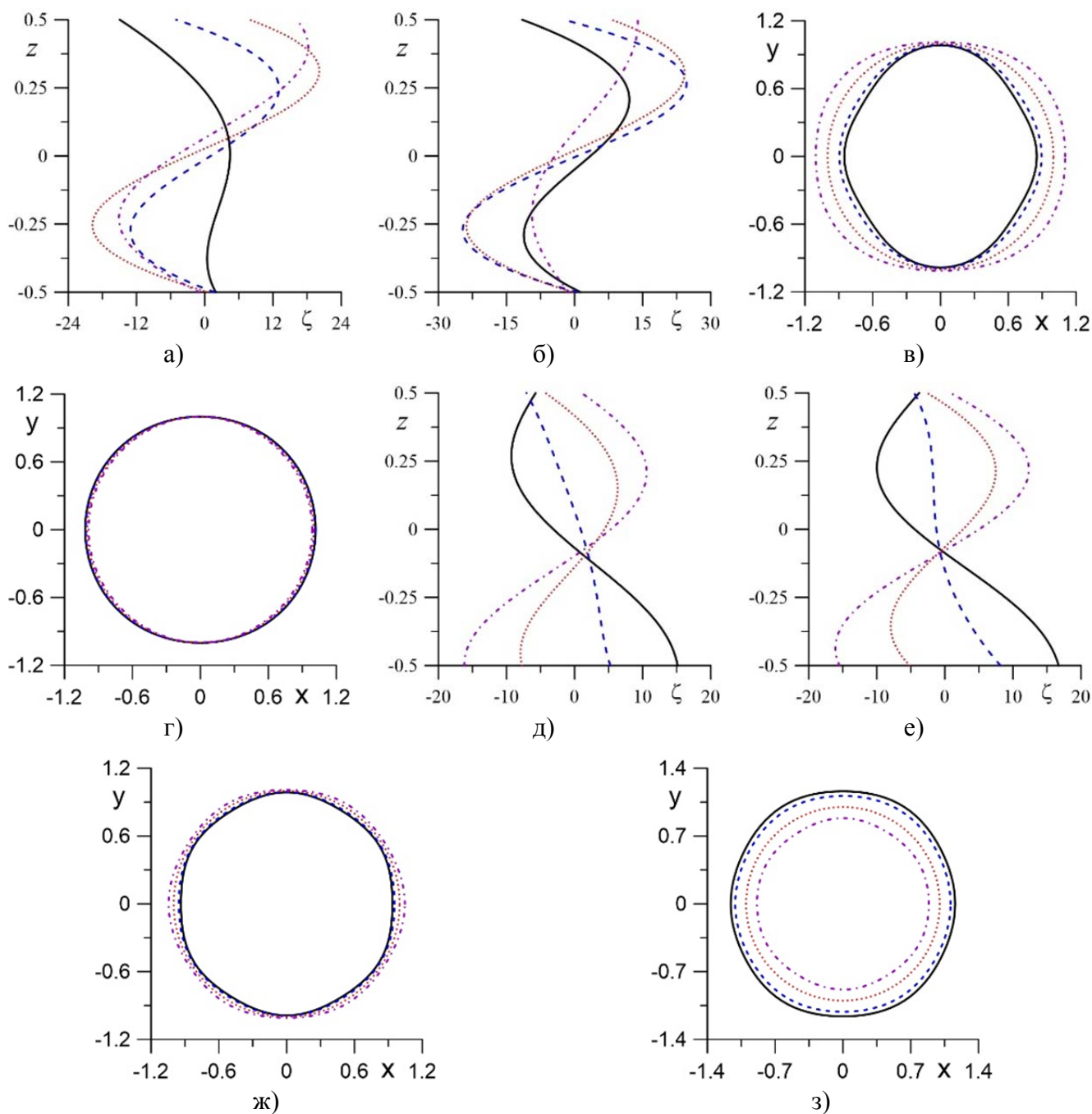


Рисунок 4.9 — Форма боковой поверхности  $\zeta(0, z, t)$  (а, д),  $\zeta(0.5\pi, z, t)$  (б, е) и контактной линии капли  $1 + 0.1\zeta(\alpha, 0.5, t)$  (в, г),  $1 + 0.1\zeta(\alpha, -0.5, t)$  (ж, з) в разные моменты времени.

$T = 2\pi\omega^{-1}$  — период колебаний. ( $b = 4$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $\omega = 90$ ,  $\lambda_u = 10$ ,  $\lambda_b = 1$  ((а) – (г)),  $\lambda_b = 100$  ((д) – (з))). Случаи при  $t = 0, 0.125T, 0.25T$  и  $0.375T$  соответствуют сплошной, штриховой, пунктирной, штрихпунктирной линиям

## ГЛАВА 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ КРУГОВЫХ ВИБРАЦИЯХ

В данной главе рассматриваются вынужденные колебания и параметрическая неустойчивость цилиндрической капли, а также ансамбля капель при круговых вибрациях. Круговые вибрации являются общим случаем трансляционных вибраций и возбуждают азимутальные колебания. Аналогичные колебания могут возникать в неоднородном электрическом поле (см. гл. 3).

Все результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работе [10].

### 5.1. Постановка задачи

Рассматриваются вынужденные колебания цилиндрической капли (или капиллярного моста) несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$  и кинематической вязкостью  $\nu_i^*$ , окруженной другой жидкостью другой плотности  $\rho_e^*$  и кинематической вязкостью  $\nu_e^*$ , под действием круговых вибраций  $f^* = (A^* \omega^{*2} \cos(\omega^* t^*) e_x + B^* \omega^{*2} \sin(\omega^* t^*) e_y)$  (рис. 5.1). Вся система в осевом направлении ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями. В

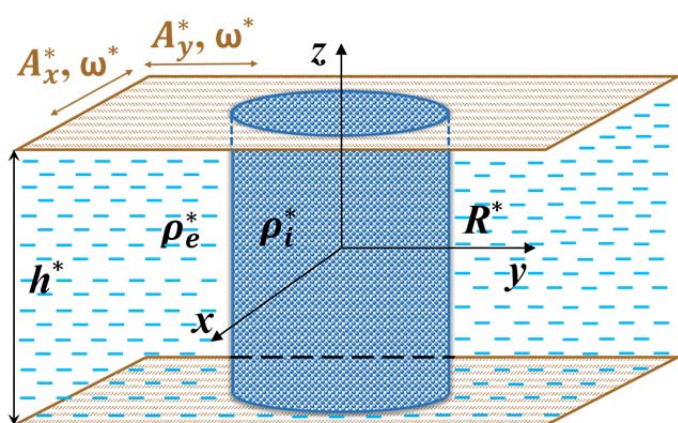


Рисунок 5.1 — Геометрия задачи

отсутствие вынуждающей силы, капля имеет форму круглого цилиндра радиуса  $R^*$ , равновесный краевой угол прямой. Будем предполагать только двухмерное движение в плоскости  $(x, y)$ , т.е. линии контакта двигаются свободно, не взаимодействуя с подложками.

Следовательно, в процессе движения капля всегда имеет форму цилиндра, поперечное сечение которого меняется, а краевой угол постоянен и равен  $90^\circ$ . На боковой поверхности капли, т.е.

деформированной поверхности раздела капля – внешняя жидкость, учитывается поверхностное натяжение  $\sigma^*$ .

Жидкости рассматриваются как идеальные, т.е. невязкие и несжимаемые. Для выполнения первого условия необходимо, чтобы выполнялось условие малости толщины вязкого пограничного слоя  $l^* = \sqrt{\nu_{i,e}^*/\omega_{x,y}^*} \ll R^*$ . Второе приближение о несжимаемости жидкости выполняется при больших скоростях звука  $c^* \gg \omega_{x,y}^* R^*$ . Оценки, приведенные выше, а также в работах [69, 70], показывают, что для капель радиуса  $R^* \sim 1$  мм эти приближения являются вполне оправданными.

Удобно ввести полярные координаты  $(r^*, \alpha)$ , в которых поверхность капли описывается соотношением  $r^* = R^* + \zeta^*(\alpha, t^*)$ , где  $\zeta^*(\alpha, t^*)$  – отклонение боковой поверхности капли от равновесного положения. Амплитуда колебаний капли мала по сравнению с равновесным радиусом  $R^*$ . Движение рассматривается безвихревым, поэтому удобно ввести потенциалы скорости  $\mathbf{v}_{i,e} = \nabla \varphi_{i,e}$ . Выберем в качестве единиц измерения длины –  $R^*$ , времени –  $t_0$ , скорости –  $v_0$ , плотности –  $\rho_0$ , давления –  $p_0$  и характерной амплитуды колебаний –  $A_0$ , где  $A_0 = A^* + B^*$ ,  $t_0 = \sqrt{(\rho_i^* + \rho_e^*)R^{*3}/\sigma^*}$ ,  $v_0 = A_0 \sqrt{\sigma^*/((\rho_i^* + \rho_e^*)R^{*3})}$ ,  $\rho_0 = \rho_i^* + \rho_e^*$ ,  $p_0 = A_0^* \sigma^*/R^{*2}$ .

В безразмерных параметрах получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{i,e} &= 0, \\ p_j &= -\rho_j \left( \varphi_{jt} + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi_j)^2 + r \omega^2 (a \cos(\alpha) \cos(\omega t) + b \sin(\alpha) \sin(\omega t)) \right), \\ r &= 1 + \varepsilon \zeta : [\varphi_n] = 0, \quad \varepsilon [p] = -\operatorname{div} \mathbf{n}, \quad \zeta_i = \nabla \varphi \nabla F, \\ r \rightarrow \infty : \varphi_e &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей,  $\varepsilon = A_0/R \ll 1$  – характерная амплитуда вибраций,

$\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$  – плотность жидкости в капле,  $\rho_e + \rho_i = 1$  – соотношение



плотностей,  $\rho_e + \rho_i = 1$  – частота вибраций,  $a = A^* A_0^{-1}$  и  $b = B^* A_0^{-1}$  – амплитуды вибраций.

## 5.2. Вынужденные колебания одиночной капли

Рассмотрим вынужденные колебания. Решение системы (5.1) будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  – малой безразмерной амплитуде вибраций:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon \varphi^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots, \quad \zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon \zeta^{(1)} + \dots$$

В нулевом порядке разложения получаем задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi^{(0)} &= 0, \\ p_j &= -\rho_j \left( \varphi_{jt}^{(0)} + \omega^2 r \left( a \cos(\alpha) \cos(\omega t) + b \sin(\alpha) \sin(\omega t) \right) \right), \\ r=1: \quad \left[ \varphi_r^{(0)} \right] &= 0, \quad \left[ p^{(0)} \right] = \zeta^{(0)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad \zeta_t^{(0)} = \varphi_r^{(0)}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \varphi_e^{(0)} &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(0)} &= r \left( C_t(t) \cos \alpha + S_1(t) \sin \alpha \right), \quad \varphi_e^{(0)} = -\frac{1}{r} \left( C_t(t) \cos \alpha + S_1(t) \sin \alpha \right), \\ \zeta^{(0)} &= C(t) \cos \alpha + S(t) \sin \alpha, \\ C(t) &= (\rho_i - \rho_e) a \cos \omega t, \quad S(t) = (\rho_i - \rho_e) b \sin \omega t. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Положение и форма поперечного сечения капли показана на рис. 5.1a. Из решения (5.3) следует, что форма этого сечения представляет собой окружность, центр которой двигается по эллиптической траектории. Система будет совершать твердотельное движение при равенстве плотностей  $\rho_i = \rho_e$ .

В первом порядке получаем задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi^{(1)} &= 0, \quad p^{(1)} = -\rho \left( \varphi_t^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \varphi_r^{(0)} \right)^2 \right), \\ r=1: \quad \left[ \varphi_r^{(1)} + \varphi_{rr}^{(0)} \zeta^{(0)} - \varphi_{\alpha\alpha}^{(0)} \zeta_{\alpha}^{(0)} \right] &= 0, \quad \zeta_t^{(1)} = \varphi_r^{(1)} + \varphi_{rr}^{(0)} \zeta^{(0)} - \varphi_{\alpha\alpha}^{(0)} \zeta_{\alpha}^{(0)}, \\ \left[ p^{(1)} \right] + \left[ p_r^{(0)} \right] \zeta^{(0)} &= \zeta^{(1)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(1)} - \left( \zeta^{(0)2} + \zeta^{(0)} \zeta_{\alpha\alpha}^{(0)} + \frac{1}{2} \zeta_{\alpha}^{(0)2} \right), \\ r \rightarrow \infty: \quad \varphi_e^{(1)} &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

решение которой имеет вид:

$$\varphi_i^{(1)} = a_0(t) + \frac{1}{2}r^2(a_1(t)\cos 2\alpha + a_2(t)\sin 2\alpha), \quad (5.5)$$

$$\varphi_e^{(1)} = \frac{1}{2r^2}(b_1(t)\cos 2\alpha + b_2(t)\sin 2\alpha), \quad (5.6)$$

$$\zeta^{(1)} = c_0(t) + c_1(t)\cos 2\alpha + c_2(t)\sin 2\alpha, \quad (5.7)$$

$$\Omega_2^2 = 6, \quad \Pi^2 = (\rho_i - \rho_e)^2, \quad a_0(t) = \frac{\omega(\rho_i - 2\rho_e)}{4\rho_i}\Pi^2(A^2 - B^2)\sin 2\omega t,$$

$$a_1(t) = -\frac{\rho_e\omega^3}{4\omega^2 - \Omega_2^2}\Pi^2(A^2 + B^2)\sin 2\omega t, \quad a_2(t) = \frac{2\rho_e\omega^3}{4\omega^2 - \Omega_2^2}\Pi^2 AB \cos 2\omega t,$$

$$b_1(t) = -\frac{\omega(\omega^2(4 + \rho_e) - 6)}{4\omega^2 - \Omega_2^2}\Pi^2(A^2 + B^2)\sin 2\omega t,$$

$$b_2(t) = \frac{2\omega(\omega^2(4 + \rho_e) - 6)}{4\omega^2 - \Omega_2^2}\Pi^2 AB \cos 2\omega t,$$

$$c_0(t) = -\frac{1}{8}\Pi^2(A^2 - B^2)\cos 2\omega t + \frac{\rho_i}{2}\omega^2\Pi^2(A^2 + B^2),$$

$$c_1(t) = \frac{2\omega^2(1 + \rho_e) - 3}{4(4\omega^2 - \Omega_2^2)}\Pi^2(A^2 + B^2)\cos 2\omega t + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4} - \rho_e\omega^2\right)\Pi^2(A^2 - B^2),$$

$$c_2(t) = \frac{\omega^2(2 + \rho_e) - 3}{4\omega^2 - \Omega_2^2}\Pi^2 AB \sin 2\omega t.$$

Здесь  $\Omega_m = \sqrt{m(m^2 - 1)}$  – частота  $m$ -ой азимутальной моды собственных колебаний капли со свободной контактной линией [71]. Независящая от времени часть функции  $\zeta^{(1)}$  (5.7) описывает эффект изменения средней формы капли. Знаменатель  $4\omega^2 - \Omega_2^2$  демонстрирует наличие нелинейного резонанса, который происходит на половине собственной частоты квадрупольной азимутальной моды. Аналогичные эффекты были получены в работе [71] для линейных вибраций.

Динамическая форма капли (5.7) в первом порядке разложения показана на рис. 5.2б. Независимо от соотношения плотностей имеет место эффект сжатия

капли вдоль оси вибраций, что согласуется с результатами работы [71]. Учет взаимодействия линии контакта с поверхностью пластин продемонстрировал принципиальную возможность вытягивания тяжелой капли, что согласуется с экспериментами.

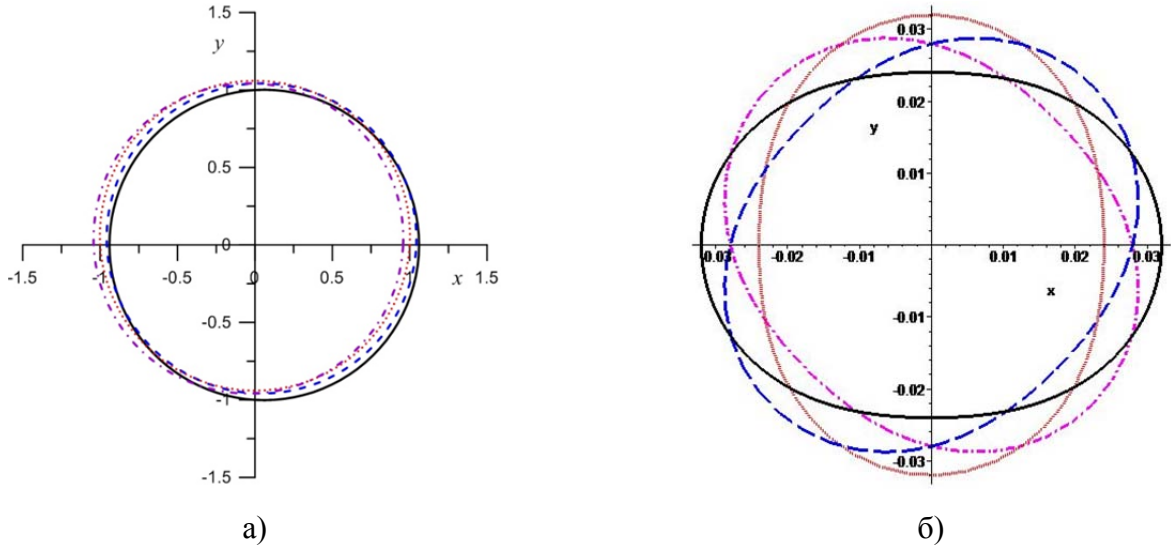


Рисунок 5.2 — Форма линии контакта в главном (а) и первом порядке (б) разложения для различных фаз периода колебаний  $T$  ( $T = \pi/\omega$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $a = b = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ).  $t = 0$  – сплошная,  $t = 0.125T$  – пунктирная,  $t = 0.25T$  – штриховая,  $t = 0.325T$  – штрихпунктирная,  $t = 0.5T$  – разомкнутая линии

### 5.3. Устойчивость вынужденных колебаний

Рассмотрим устойчивость вынужденных колебаний, полученных выше, относительно малых возмущений. Введем возмущения основного течения в виде

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon\psi, \quad p' = p + \varepsilon q, \quad \zeta' = \zeta + \varepsilon\xi,$$

где  $\varphi'$ ,  $p'$ ,  $\zeta'$  – возмущенные поля,  $\varphi$ ,  $p$ ,  $\zeta$  – основное решение,  $\psi$ ,  $q$ ,  $\xi$  – малые

нестационарные возмущения ( $\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon\psi^{(1)} + \dots$ ,  $q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \dots$ ,

$\xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)} + \dots$ ). Подставляя возмущенные поля в исходную систему (5.1) и

линеаризуя, получим для возмущений систему уравнений и граничных условий:

$$\Delta\psi = 0, \quad q = -\rho(\psi_t + \nabla\varphi\nabla\psi),$$

$$r=1: \quad [\psi_n] = 0, \quad [q] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)} - (\xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)}) + \dots, \quad \xi_t^{(0)} = \nabla\psi\nabla F - \nabla\varphi\nabla\xi,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi \rightarrow 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^2)\xi \cos\alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \xi d\alpha = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \xi\xi d\alpha.$$

Решение этой задачи будем искать методом многих масштабов:

$$\psi_i = \sum_m S_{1m} r^m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \quad \psi_e = \sum_m S_{2m} \frac{1}{r^m} e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \quad \xi = \sum_m T_m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots$$

где  $m$  – номер моды собственных колебаний.

Таким образом, в нулевом порядке разложения получаем задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{(0)} &= 0, \quad q^{(0)} = -\rho\psi_t^{(0)}, \\ r=1: \quad [\psi_r^{(0)}] &= 0, \quad [q^{(0)}] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad \xi_t^{(0)} = \psi_r^{(0)}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \psi_e^{(0)} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(0)} &= \sum_m \frac{i\Omega_m}{m} A_m(t_1, \dots) r^m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c., \\ \psi_e^{(0)} &= -\sum_m \frac{i\Omega_m}{m} A_m(t_1, \dots) \frac{1}{r^m} e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c., \\ \xi^{(0)} &= \sum_m A_m(t_1, \dots) e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c. \end{aligned}$$

Собственные частоты колебаний капли являются решением задачи в нулевом порядке и представляют собой выражение  $\Omega_m^2 = m(m^2 - 1)$ , как указывалось выше. В случае монохроматических вибраций резонансное нарастание амплитуды происходит при частоте, которая вдвое меньше наименьшей частоты собственных колебаний.

В первом порядке получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{(1)} &= 0, \quad q^{(1)} = -\rho(\psi_{t_0}^{(1)} + \psi_{t_1}^{(0)}) - \rho\nabla\psi^{(0)}\nabla\varphi^{(0)}, \\ r=1: \quad [\psi_r^{(1)}] &+ \zeta^{(0)}[\psi_{rr}^{(0)}] + \xi^{(0)}[\varphi_{rr}^{(0)}] - \zeta_\alpha^{(0)}[\psi_\alpha^{(0)}] - \xi_\alpha^{(0)}[\varphi_\alpha^{(0)}] = 0, \\ \xi_{t_0}^{(1)} + \xi_{t_1}^{(0)} &= \psi_r^{(1)} + \zeta^{(0)}\psi_{rr}^{(0)} + \xi^{(0)}\varphi_{rr}^{(0)} - \zeta_\alpha^{(0)}\psi_\alpha^{(0)} - \xi_\alpha^{(0)}\varphi_\alpha^{(0)}, \\ [q^{(1)}] &+ \xi^{(0)}[p_r^{(0)}] + \zeta^{(0)}[q_r^{(0)}] = \xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)} - 2\zeta^{(0)}\xi_{\alpha\alpha}^{(0)} - \zeta_\alpha^{(0)}\xi_\alpha^{(0)}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

При монохроматическом вибрационном воздействии параметрическая неустойчивость для главных резонансов появляется при выполнении условия синхронизма  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m\pm 1}$ . Чтобы описать близость внешних частот к сумме  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$  количественно, введем параметр расстройки  $\omega - \Omega_m - \Omega_{m+1} = \varepsilon\gamma$ .

При решении системы первого порядка для возмущений уничтожение секулярных слагаемых дает дифференциальные уравнения для амплитуд с учетом расстройки частоты  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_m}{\partial t_1} + i\gamma A_m = K_1 A_{m+1}^*, \\ \frac{\partial A_{m+1}^*}{\partial t_1} - i\gamma A_{m+1}^* = K_2 A_m, \end{cases}$$

$$K_1 = -i \frac{m\rho_e(\rho_i - \rho_e)\omega}{2}(A+B), \quad K_2 = -i \frac{(m+1)\rho_e(\rho_i - \rho_e)\omega}{2\Omega_{m+1}}\Omega_m(A+B).$$

Решение для амплитуд  $A_m$  и  $A_{m+1}^*$  ищем в виде  $\exp(\lambda t_1)$  и получаем решение для инкремента  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = \gamma^2 + K_1 K_2$$

Вид нейтральной кривой  $\varepsilon(\omega)$  определяется выражением  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1} \pm \varepsilon\sqrt{K_1 K_2}$  и представлен на рис. 5.3.

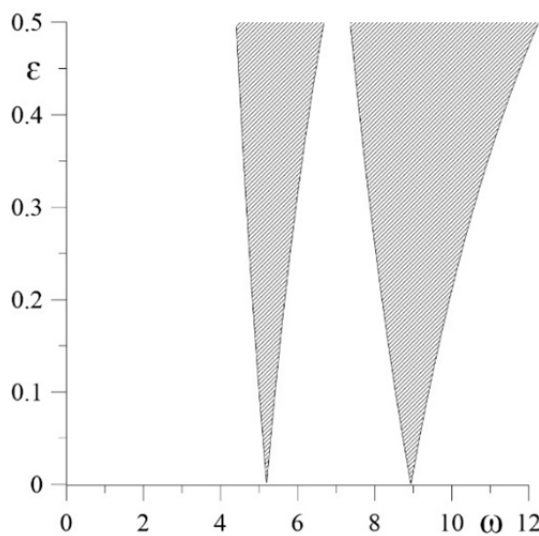


Рисунок 5.3 — Области параметрического резонанса для  $m = 3$  и  $m = 4$

## 5.4. Ансамбль капель

Исходя из полученных результатов в предыдущих разделах, можем перейти к рассмотрению ансамбля, состоящего из  $N$  числа взаимодействующих между собой капель (рис. 5.4). Учитывая взаимодействие капли с ансамблем, можно считать, что данные капли являются осцилляторами. Предполагается, что параметры осцилляторов в ансамбле одинаковы, но

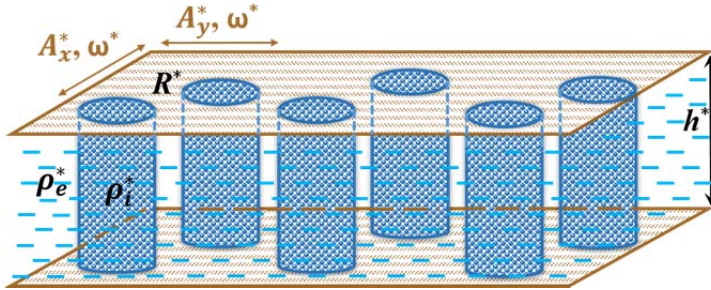


Рисунок 5.4 — Геометрия ансамбля капель

параметрическое возбуждение, имеет разные фазы  $\tau$  для разных осцилляторов. По аналогии с рассмотренными выше вынужденными колебаниями одиночной капли, запишем систему уравнений для ансамбля взаимодействующих капель с учетом трения и нелинейных слагаемых для амплитуд двух соседних азимутальных мод при параметрическом возбуждении:

$$\frac{\partial a_m^j}{\partial t} = A e^{-i\tau_j} a_{m+1}^j - r_m a_m^j - i\omega a_m^j + i\alpha_m a_m^j |a_m^j|^2 + i\beta_m a_m^j |a_{m+1}^j|^2 - i\kappa_m \langle a_m \rangle, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial a_{m+1}^j}{\partial t} = A e^{i\tau_j} a_m^j - r_{m+1} a_{m+1}^j + i\omega a_{m+1}^j + i\alpha_{m+1} a_{m+1}^j |a_{m+1}^j|^2 + i\beta_{m+1} a_{m+1}^j |a_m^j|^2 - i\kappa_{m+1} \langle a_{m+1} \rangle, \quad (5.9)$$

$$\tau_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 1..N, \quad |\kappa_{m+1}| \ll |\kappa_m|,$$

$$\langle a_m \rangle = \sum_{j=1}^N a_m^j = \sum_j \operatorname{Re}(a_m^j) + i \sum_j \operatorname{Im}(a_m^j),$$

где  $j$  – номер капли,  $r_m$  – коэффициент трения,  $A$  – амплитуда,  $\tau_j$  – сдвиг фазы,  $\omega$  – частота внешнего воздействия,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  – коэффициенты, характеризующие консервативное взаимодействие,  $\kappa_m$  – параметр взаимодействия капли с ансамблем. Предполагается, что фазы возбуждения  $\tau_j$  распределены равномерно на отрезке  $[0, 2\pi)$ .

При исследовании линейной неустойчивости удобно переписать уравнения (5.8) и (5.9) в терминах «пространственных» гармоник, т.е. перейдем в Фурье-пространство:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_m(\tau) e^{-ik\tau} d\tau,$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{m+1}(\tau) e^{-ik\tau} d\tau.$$

Следовательно, система (5.8) – (5.9) для коэффициентов Фурье принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{C}_0 = (-r_m - i(\gamma + \kappa))C_0 + AB_1 \\ \dot{B}_1 = (-r_{m+1} + i\gamma)B_1 + AC_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \dot{C}_{-1} = (-r_m - i\gamma)C_{-1} + AB_0 \\ \dot{B}_0 = (-r_{m+1} + i(\gamma + \kappa))B_0 + AC_{-1} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \dot{C}_{k-1} = (-r_m - i\gamma)C_{k-1} + AB_k \\ \dot{B}_k = (-r_{m+1} + i\gamma)B_k + AC_{k-1} \end{cases} \quad (5.12)$$

где  $B_k$ ,  $C_k$  – коэффициенты Фурье  $m$  и  $m+1$  гармоник,  $A$  – амплитуда,  $\kappa$  – параметр взаимодействия капли с ансамблем, также здесь введена расстройка частоты  $\gamma = \omega - \Omega_m - \Omega_{m+1}$ . Отметим, что вся система распадается на пары связанных гармоник  $k \leftrightarrow k-1$ . Более того, уравнения для всех пар с  $k \neq 0$  одинаковы, а для  $k=0$  имеется дополнительный член из-за связи среднего поля. Другими словами,  $\langle a_m \rangle = C_0$  и  $\langle a_{m+1} \rangle = B_0$ .

Система (5.10) – (5.12) описывает три области неустойчивости, отдельные для каждой пары, и собственные значения  $\lambda$  для  $C_k$ ,  $B_k \sim e^{\lambda t}$  определяются следующим образом, соответственно:

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \mp i\kappa_m) \pm \frac{1}{2} \left( (r_{m+1} - r_m)^2 + 4A^2 - (2\gamma + \kappa_m)^2 \pm 2i(2\gamma + \kappa_m)(r_{m+1} - r_m) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \pm i\kappa_{m+1}) \pm \frac{1}{2}\left(\left(r_m - r_{m+1}\right)^2 + 4A^2 - (2\gamma - \kappa_{m+1})^2 \pm 2i(2\gamma - \kappa_{m+1})(r_m - r_{m+1})\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + (r_{m+1} - r_m \pm 2i\gamma)^2}.$$

Области неустойчивости показаны на рис. 5.5. Из представленных графиков видно, что в некоторых случаях неустойчивость для первых двух пар  $C_0, B_1$  (5.10) и  $C_{-1}, B_0$  (5.11) (т.е. для  $k=0$ ) возникает раньше, чем для всех остальных гармоник (5.12) ( $k \neq 0$ ).

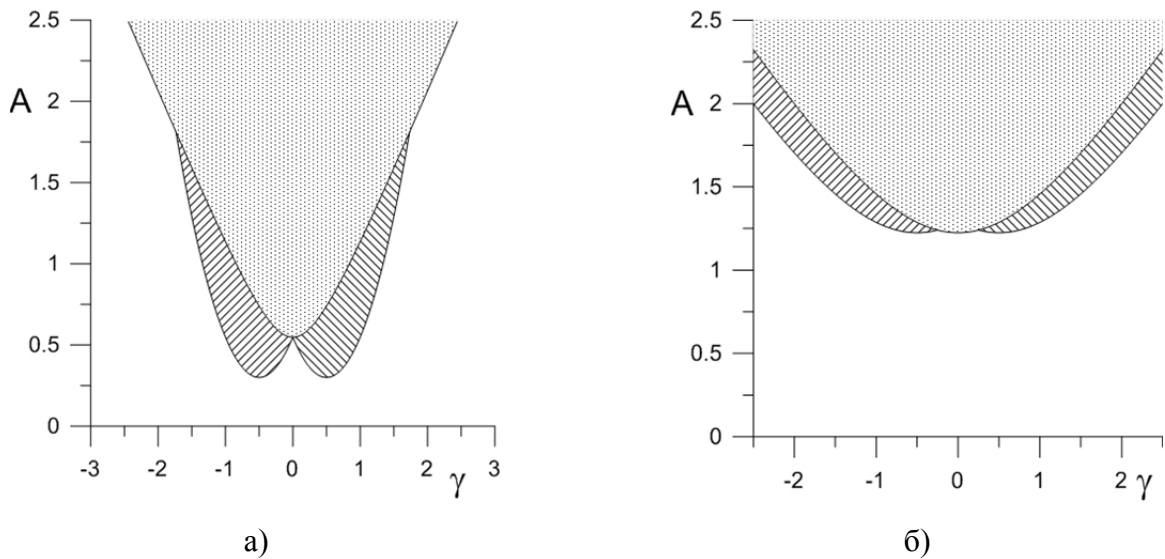


Рисунок 5.5 — Области параметрического резонанса ансамбля капель

При рассмотрении нелинейных уравнений у нас существует три режима (колебания формы) (рис. 5.6).

1. Первый режим возникает на границе устойчивости, вблизи которой происходит затухание колебаний, и в данном случае нелинейность стабилизирует систему (рис. 5.6в).

2. Существует слабосинхронизированный режим – это режим бегущей волны, когда между отдельными каплями, по их характеристикам пробегает бегущая волна (при этом ось  $Oy$  – время, ось  $Ox$  –  $\tau$ , которое отвечает за фазу) (рис. 5.6б).



3. Возникает и синхронный режим, при этом режим бегущей волны полностью разрушается, и все капли ведут себя одинаково, и возникает режим строгой синхронизации (рис. 5.6г).

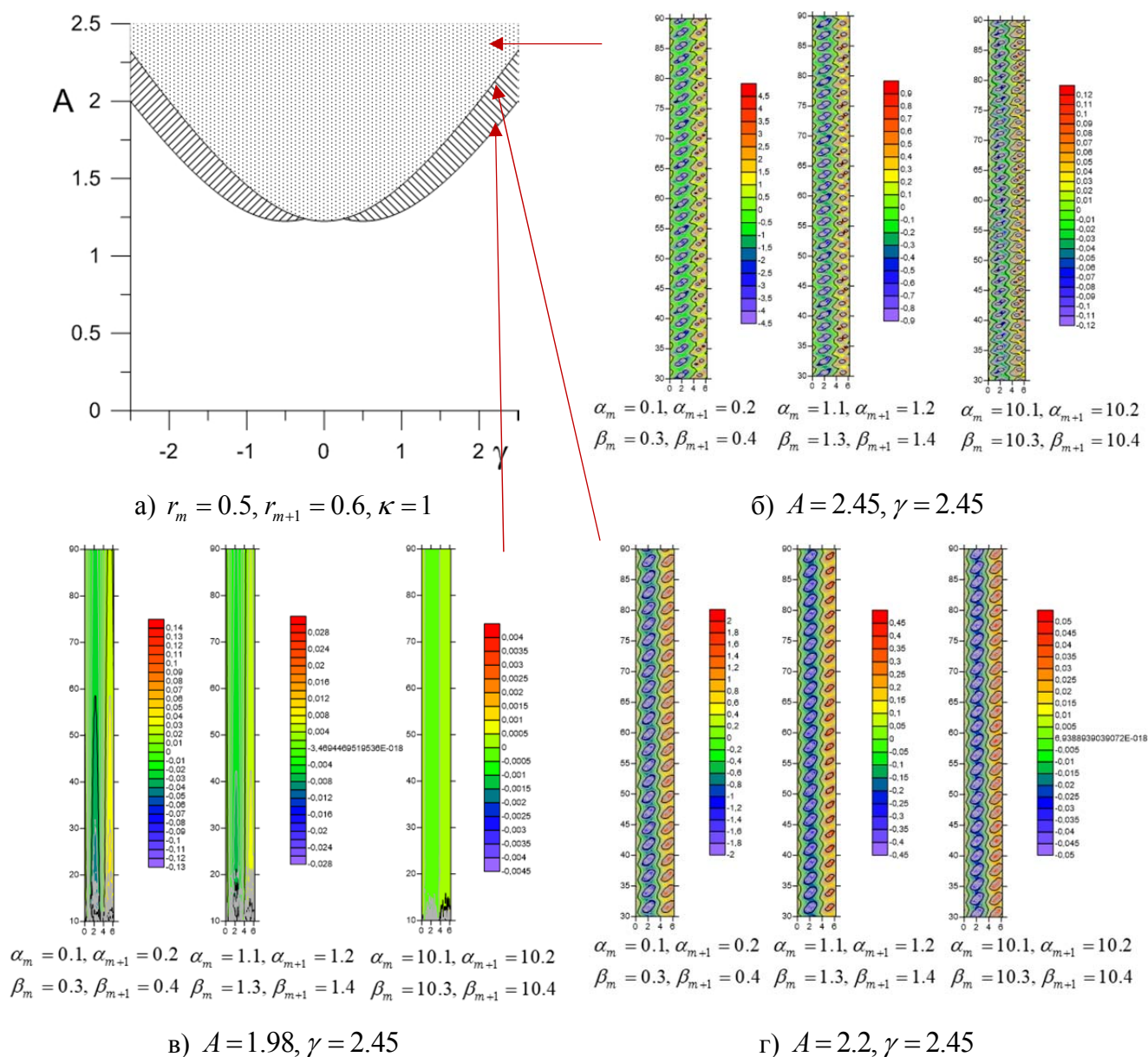


Рисунок 5.6 — Области параметрического резонанса и существующие режимы

При малом взаимодействии или отсутствии взаимодействия будут происходить несинхронизированные режимы. Добавим, что в рассматриваемом случае ансамбля капель невозможны осредненные корпоративные эффекты взаимодействия частиц в вибрационном поле. В таких случаях важно взаимодействие со стенками сосуда (границами области), влиянием которых пренебрегаем.

## Заключение

### Итоги выполненного исследования

В главах 2 и 3 рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли в плоском конденсаторе под действием внешнего переменного электрического поля, которое воздействует на каплю как внешняя периодическая сила, приводящая к движению контактную линию. Рассматриваются случаи как неоднородных поверхностей пластин, так и случай пространственной неоднородности электрического поля.

Скорость движения линии контакта пропорциональна сумме отклонения краевого угла и внешней силы. Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  (параметр Хокинга, параметр смачивания) свой для каждой пластины и описывает взаимодействие между линией контакта и подложкой. В случае неоднородных пластин этот параметр Хокинга рассматривается как функция координат, в данном случае, как функция полярного угла. Неоднородность электрического поля также моделируется амплитудой внешней силы как функцией координат.

Граничное условие, действующее на линию контакта, приводит к затуханию колебаний. Кроме того, происходит сдвиг фазы между колебаниями различных частей жидкости, что приводит к появлению бегущих поверхностных капиллярных волн. Диссипация энергии происходит из-за условия Хокинга, даже несмотря на то, что рассматривается модель невязкой жидкости. Это позволяет нам использовать потенциальный поток в соответствии с теоремой Кельвина о циркуляции.

Показано, что в случае отличных друг от друга поверхностей пластин, но при этом однородных, возбуждаются как четные, так и нечетные гармоники. Отметим, что однородное переменное электрическое поле возбуждает только нечетные гармоники осесимметричной моды. Из-за взаимодействия линий контакта с поверхностями, имеющими разные свойства, нарушается симметрия относительно середины капли, и появляются четные гармоники.

Обнаружено, что в случае пространственно-неоднородных пластин возбуждаются азимутальные моды, спектр которых зависит от формы неоднородности поверхности. Это приводит к появлению дополнительных резонансных пиков при любом типе неоднородности, т.е. энергия из осесимметричной переходит в азимутальные моды из-за неоднородности подложек. Однако резонансные пики на частотах осесимметричной моды являются наиболее выраженными. Эти эффекты существенны только при конечных значениях суммарного параметра смачивания, т.е., когда сила взаимодействия движущейся контактной линии достаточно велика. Если он мал, то линия контакта малоподвижна, и неоднородность подложки оказывает незначительное влияние. В случае больших значений параметра смачивания движущаяся контактная линия слабо взаимодействует с подложкой, и неоднородность подложки также не оказывает влияния.

Показано, что в случае пространственно-неоднородного переменного электрического поля также возбуждаются азимутальные моды. В этом случае спектр этих азимутальных мод определяется неоднородной амплитудой внешней силы, и энергия в них передается напрямую в соответствующие азимутальные моды колебаний капли.

Найдено, что зависимость краевого угла от амплитуды может достигать конечного значения и достигать насыщения подобно экспериментальным результатам. Это определяется свойствами поверхности пластин (параметр Хокинга, неоднородность) и не зависит от дополнительных предположений в отличие от других моделей электросмачивания. Сравнение с экспериментальными результатами [48] показало хорошее согласие для значений резонансных частот и амплитуды.

Дополнительно было рассмотрено влияние механических вибраций на такую систему, т.к. переменное электрическое поле возбуждает осесимметричные колебания капли, а неоднородность поверхности пластин или поля приводит к появлению азимутальных колебаний.

В 4 главе рассмотрены собственные и вынужденные колебания цилиндрической капли, заключенной между твердыми пластинами, с учетом динамики линии контакта, под действием осесимметричных вибраций. Поверхности пластин неоднородные и параметры Хокинга для каждой отличаются между собой. Неоднородность данных пластин предполагается за счет зависимости от угла  $\alpha$  и в качестве примера описывается функцией  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$ .

Показано, что суммарный коэффициент затухания свободных колебаний определяется суммой отдельных коэффициентов для каждой пластины. Основные частоты могут исчезать, в зависимости от параметров задачи, которые связаны с монотонным затуханием свободных колебаний. Это соответствует бифуркации ветви коэффициента затухания.

Существует только три типа основной частоты. Во-первых, основная частота любой азимутальной моды (кроме поступательного) может обращаться в ноль. Эта частота исчезает по мере увеличения объема капли, т.е. с увеличением соотношения сторон (геометрического параметра), что приводит к увеличению длины контактной линии и, соответственно, к увеличению диссипации энергии. Это справедливо и для радиальных колебаний сжимаемой капли (пузырька) [57]. Во-вторых, основная частота любой гармоники затухает с увеличением поверхности капли, т.е. с уменьшением соотношения сторон. Однако эти значения лежат за пределами предела неустойчивости Рэля-Плато для большинства гармоник. Также основная частота трансляционного режима обнуляется после достижения определенного значения. Этот эффект подробно обсуждается в работе [57].

Вышеуказанные эффекты могут исчезнуть в случае разных свойств между верхней и нижней пластинами и, как установлено, зависят от суммарного значения обоих параметров смачивания. Неоднородность поверхности влияет на монотонное поведение кривых и приводит к появлению локальных экстремумов для любых гармоник.

Аналогично рассмотренному выше случаю электросмачивания, неоднородность поверхности пластин приводит к возбуждению азимутальных мод при осесимметричных вибрациях. Такие вибрации возбуждают только осесимметричные колебания, если пластины однородные: нечетные гармоники при одинаковых пластинах и четные – отличных друг от друга.

В 5 главе рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли в поле круговых вибраций, которые являются общим случаем трансляционных. Построена динамическая форма капли. Обнаружено явление нелинейного резонанса на удвоенной частоте внешнего воздействия для квадрупольной моды. Получена система амплитудных уравнений для возмущений и исследована параметрическая неустойчивость вынужденных колебаний одиночной капли.

По аналогии написана система уравнений для исследования параметрической неустойчивости для произвольной капли в ансамбле взаимодействующих капель. Построены области неустойчивости как для взаимодействующих мод, так и для мод более высокого порядка. Показано, что в случае ненулевого взаимодействия нижние моды более опасны при наличии расстройки частоты.

### **Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы**

Основная цель данной работы – продемонстрировать возможность эксперимента со сжатой каплей не только при изучении электросмачивания, но и для вибрационного воздействия. Основная цель эксперимента – измерить параметры системы, такие как параметр Хокинга для конкретной подложки. При такой постановке экспериментаторам не нужно беспокоиться об испарении жидкости. Кроме того, можно измерить относительный параметр смачивания при замене одной из подложек и определить неоднородность поверхности подложки. Значения собственных частот могут быть использованы в будущем для определения и измерения вибрационного ускорения.

## Список литературы

1. Kashina, M.A. The dynamics of oblate drop between heterogeneous plates under alternating electric field / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // *Microgravity Sci. Technol.* – 2018. – Vol. 30. – P. 11–17. (Q2)
2. Алабужев, А.А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле / А.А. Алабужев, М.А. Кашина // *Изв. Вузов. Радиофизика.* – 2018. – Т. 61, № 8–9. – С. 662–676. (Перевод: Alabuzhev A.A. Influence of Surface Properties on Axisymmetric Oscillations of an Oblate Drop in an AC Electric Field / A.A. Alabuzhev, M.A. Kashina // *Radiophys. Quantum El.* – 2019. – Vol. 61. – P. 589–602).
3. Kashina, M.A. The forced axisymmetric oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under AC vibrational force / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2019. – Vol. 1268: 012003.
4. Kashina, M.A. The influence of difference in the surface properties on the axisymmetric vibrations of an oblate drop in an AC field / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2019. – Vol. 1163: 012017.
5. Kashina, M.A. The Forced Oscillations of an Oblate Drop Sandwiched Between Different Inhomogeneous Surfaces under AC Vibrational Force / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // *Microgravity Sci. Technol.* – 2021. – Vol. 33: 35. (Q2)
6. Kashina, M.A. Influence of the Properties of the Plate Surface on the Natural Oscillations of the Clamped Drop / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2021. – Vol. 1945: 012014.
7. Pyankova, M.A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop / M.A. Pyankova, A.A. Alabuzhev // *Phys. Fluids.* – 2022. – Vol. 34: 092015. (Q1)
8. Алабужев, А.А. Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле / А.А. Алабужев, М.А. Кашина // *Вестник Пермского университета. Физика.* – 2019. – № 4. – С. 33–43.

9. Алабужев, А.А. Влияние пространственной неоднородности подложек и электрического поля на динамику зажатой капли / А.А. Алабужев, М.А. Пьянкова // Вестник Пермского университета. Физика. – 2022. – № 2. – С. 56–65.
10. Алабужев, А.А. Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях / А.А. Алабужев, М.А. Пьянкова // Вестник Пермского университета. Физика. – 2022. – № 3. – С. 56–65.
11. Де Жен, П.Ж. Смачивание: статика и динамика / П.Ж. Де Жен // УФН. – 1987. – Т. 151, № 4. – С. 619–681.
12. Andreotti, B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions / B. Andreotti, J. H. Snoeijer // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2013. – Vol. 45. – P. 269–292.
13. Andreotti, B. Statics and dynamics of soft wetting / B. Andreotti, J. H. Snoeijer // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2020. – Vol. 52. – P. 285–308.
14. Noblin, X. Brochard-Wyart F. Vibrated sessile drops: Transition between pinned and mobile contact line oscillations / X. Noblin, A. Buguin // *Eur. Phys. J. E.* – 2004. – Vol. 14 (4). – P. 395–404.
15. Любимов, Д.В. Неосесимметричные колебания полусферической капли / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, С.В. Шкляев // *Изв. РАН. МЖГ.* – 2004. – № 6. – С. 8–20.
16. Mettu, S. Vibration spectroscopy of a sessile drop and its contact line / S. Mettu, M.K. Chaudhury // *Langmuir.* – 2012. – Vol. 28 (39). – P. 14100–14106.
17. Mugele, F. Electrowetting: from basics to applications / F. Mugele., J.-C. Baret // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2005. – Vol. 17(28). – P. 705–774.
18. Oh, J.M. Shape oscillation of a drop in ac electrowetting / J.M. Oh., S.H. Ko, K.H. Kang // *Langmuir.* – 2008. – V. 24 (15). – P. 8379–8386.
19. Chen, J. Size-variable droplet actuation by interdigitated electrowetting electrode / J. Chen, Y. Yu, J. Li, Y. Lai, J. Zhou // *Appl. Phys. Lett.* – 2012. – Vol. 101: 234102.
20. Goohpattader, P.S. Stochastic rolling of a rigid sphere in weak adhesive contact with a soft substrate / P.S. Goohpattader, S. Mettu, M.K. Chaudhury // *Eur. Phys. J. E.* – 2011. – Vol. 34(11): 120.

21. Luo, M. Modulating contact angle hysteresis to direct fluid droplets along a homogenous surface / M. Luo, R. Gupta, J. Frechette // ACS Appl. Mater. Interfaces. – 2012. – Vol. 4(2). – P. 890-896.
22. Bostwick, J.B. Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 1. Inviscid motions / J.B. Bostwick, P.H. Steen // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 714. – P. 312–335.
23. Bostwick, J.B. Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 2. Viscous motions / J.B. Bostwick, P.H. Steen // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 714. – P. 336–360.
24. Oron, A. Long-scale evolution of thin liquid films / A. Oron, S.H. Davis, S.G. Bankoff // Rev. Mod. Phys. – 1997. – Vol. 69. – P. 931–980.
25. Craster, R.V. Dynamics and stability of thin liquid films / R.V. Craster, O.K. Matar // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 11310–1198.
26. Shklyaev, S. Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field / S. Shklyaev, M. Khenner, A.A. Alabuzhev // Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77: 036320.
27. Chen, L. Electrowetting - From statics to dynamics / L. Chen, E. Bonaccorso // Adv. Colloid Interface Sci. – 2014 – Vol. 210. – P. 2–12.
28. Mugele, F. Fundamental challenges in electrowetting: from equilibrium shapes to contact angle saturation and drop dynamics / F. Mugele // Soft Matter – 2009. – Vol. 5. – P. 3377–3384.
29. Royal, M. W. Droplet-Based Sensing: Optical Microresonator Sensors Embedded in Digital Electrowetting Microfluidics Systems / M.W. Royal, N.M. Jokerst, R.B. Fair // IEEE Sensors Journal – 2013. – Vol. 13. – P. 4733–4742.
30. Zhao, Y.-P. Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review / Y.-P. Zhao, Y. Wang // Rev. Adhesion Adhesives – 2013. – Vol. 1 – P. 114–174.
31. Klarman, D. A Model of Electrowetting, Reversed Electrowetting, and Contact Angle Saturation / D. Klarman, D. Andelman, M. Urbakh // Langmuir – 2011. – Vol. 27(10). – P. 6031–6041.



32. Chung, S.K. Bubble actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD) and its applications: A review / S.K. Chung, K. Rhee, S.K. Cho // *Int. J. Precis. Eng. Manuf.* – 2010. – Vol. 11 – P. 991–1006.
33. Nelson, W.C. Droplet actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD): a review / W.C. Nelson, C.-J. Kim // *J. Adhes. Sci. Technol.* – 2012. – Vol. 26. – P. 1747–1771.
34. Kuiper, S. Variable-focus liquid lens for miniature cameras / S. Kuiper, B.H.W. Hendriks // *Appl. Phys. Lett.* – 2004. – Vol. 85. – P. 1128-1130.
35. Li, C. Fabrication and characterization of flexible electrowetting / C. Li, H. Jiang // *Micromachines* – 2014. – Vol. 5 – P. 432–441.
36. Hua, Z. Multiplexed real-time polymerase chain reaction on a digital microfluidic platform / Z. Hua, J.L. Rouse, A.E. Eckhardt, et al. // *Anal. Chem.* – 2010. – Vol. 82 – P. 2310–2316.
37. Li, J. Electrowetting-on-dielectrics for manipulation of oil drops and gas bubbles in aqueous-shell compound drops / J. Li, Y. Wang, H. Chen, J. Wan // *Lab Chip.* – 2014. – Vol. 14 – P. 4334 – 4337.
38. Mampallil, D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates / D. Mampallil, H.B. Eral, A. Staicu, F. Mugele, D. Van den Ende // *Phys. Rev. E.* – 2013. – Vol. 88 (5): 053015.
39. Ferrera, C. Experimental study of small-amplitude lateral vibrations of an axisymmetric liquid bridge / C. Ferrera, J.M. Montanero // *Phys. Fluids* – 2007. – Vol. 19(11): 118103.
40. Demin, V.A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge / V.A. Demin // *Fluid Dyn.* – 2008. – Vol. 43, No 4. – P. 524–532.
41. Shen, H.-H. EWOD microfluidic systems for biomedical applications / H.-H. Shen, S.-K. Fan, C.-J. Kim, D.-J. Yao // *Microfluid. Nanofluidics.* – 2014. – Vol. 16. – P. 965–987.
42. Li, J. Current commercialization status of electrowetting-on-dielectric (EWOD) digital microfluidics / J. Li, C.-J. Kim // *Lab Chip.* – 2020. – Vol. 20. – P. 1705–1712.

43. Lippmann, G. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires / G. Lippmann // *Ann. Chim. Phys.* – 1875. – Vol. 5 – P. 494-549.
44. Berge, B. Electrocapillarite et mouillage de films isolants par l'eau / B. Berge // *Comptes Rendus Acad. Sci. II* – 1993. – Vol. 317 – P. 157–163.
45. Quilliet, C. Electrowetting: A recent outbreak / C. Quilliet, B. Berge // *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* – 2001. – Vol. 6 – P. 34 –39.
46. Chevalliot, S. Experimental validation of the invariance of electrowetting contact angle saturation / S. Chevalliot, S. Kuiper, J. Heikenfeld // *J. Adhes. Sci. Technol.* – 2012. – Vol. 26. – P. 1909–1930.
47. Pollack, M. G. Electrowetting-based actuation of liquid droplets for microfluidic applications / M. G. Pollack, R.B. Fair, A.D. Shenderov // *Appl. Phys. Lett.* – 2000. – Vol. 77(11). – P. 1725–1726.
48. Lee, C.-P. Electrowetting on dielectric driven droplet resonance and mixing enhancement in parallel-plate configuration / C.-P. Lee, H.-C. Chen, M.-F. Lai // *Biomicrofluidics*. – 2012. – Vol. 6(1): 012814.
49. Wei, Q. Modeling, simulation, and optimization of electrowetting-on-dielectric (EWOD) devices / Q. Wei, W. Yao, L. Gu, etc. // *Biomicrofluidics*. – 2021. – Vol. 15: 014107.
50. Wang, Q. Manipulation of a Nonconductive Droplet in an Aqueous Fluid with AC Electric Fields: Droplet Dewetting, Oscillation, and Detachment / Q. Wang, L. Li, J. Gu, etc. // *Langmuir*. – 2021. – Vol. 37 (41). – P. 12098–1221.
51. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. / Г. Шлихтинг; пер. Г.А. Вольперт. – М.: Наука, гл.ред. физ.-мат. литературы, 1962. – 478 с.
52. Hocking, L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary / L.M. Hocking // *J. Fluid Mech.* – 1987. – Vol. 179. – P. 253–266.
53. Lyubimov, D.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate / D.V. Lyubimov, T. P. Lyubimova, S.V. Shklyaev // *Phys. Fluids*. – 2006. – Vol. 18: 012101.
54. Shklyaev, S. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate / S. Shklyaev, A.V. Straube // *Phys. Fluids* – 2008. – Vol. 20: 052102.

55. Keulegan, G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins / G.H. Keulegan // *J. Fluid Mech.* – 1959. – Vol. 6(1). – P. 33–50.
56. Borkar, A. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges / A. Borkar, J. Tsamopoulos // *Physics of Fluids A.* – 1991. – Vol. 3(12). – P. 2866–2874.
57. Алабужев, А.А. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли / А.А. Алабужев, Д.В. Любимов // *ПМТФ.* – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 78–86.
58. Алабужев, А.А. Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной контактной линией / А.А. Алабужев // *ПМТФ.* – 2016. – Т. 57, № 6. – С. 53–63.
59. Алабужев, А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций / А.А. Алабужев // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 151–161.
60. Ting, C.-L. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation / C.-L Ting., M. Perlin // *J. Fluid Mech.* – 1995. – Vol. 295. – P. 263–300.
61. Perlin, M. High Reynolds number oscillating contact lines / M. Perlin, W.W. Schultz, Z. Liu // *Wave Motion.* – 2004. – Vol. 40. – P. 41–56.
62. Hocking, L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate / L. M. Hocking // *J. Fluid Mech.* – 1987. – Vol. 179. – P. 267–281.
63. Fayzrakhmanova, I. S. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop / I. S. Fayzrakhmanova, A.V. Straube // *Physics of Fluids* – 2009. – Vol. 21(7): 072104.
64. Fayzrakhmanova, I. S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis / I. S. Fayzrakhmanova, A.V. Straube, S. Shklyaeв // *Phys. Fluids* – 2011. – Vol. 23: 102105.
65. Alabuzhev, A.A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field / A.A. Alabuzhev, M.A. Kashina // *J. Phys. Conf. Ser.* – 2016. – Vol. 681: 012042.

66. . Alabuzhev, A.A. The oscillations of oblate drop under the influence of a alternating electric field / A.A. Alabuzhev, M.A. Kashina // J. Phys. Conf. Ser. – 2017. – Vol. 929: 012107.
67. Kashina, M.A. Effect of a contact line dynamics on oscillations of oblate bubble in a non-uniform electric field / M.A. Kashina, A.A. Alabuzhev // J. Phys. Conf. Ser. – 2018. – Vol. 1135: 012084.
68. Блехман, И. И. Вибрационная механика и вибрационная реология: теория и приложения / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 2017. – 752 с.
69. Алабужев, А.А. Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости / А.А. Алабужев // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т.9, № 3. – С. 316–330.
70. Алабужев, А.А. Трансляционные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости / А.А. Алабужев // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т.9, № 4. – С. 453–465.
71. Алабужев, А.А. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях / А.А. Алабужев, Д.В. Любимов // Известия РАН. МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 18–28.
72. Иванцов, А.О. Акустические колебания полусферической капли / А.О. Иванцов // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2012. – № 3. – С. 16–23.
73. Miles, J.W. The capillary boundary layer for standing waves / J.W. Miles // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 222 – P. 197–205.
74. Alabuzhev, A.A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop / A.A. Alabuzhev // Microgravity Sci. Technol. – 2018. – Vol. 30(1–2). – P. 25–32.
75. Мандельштам, Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельшам. – М.: Наука. – 1972. – С. 470.
76. Картавых, Н.Н. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке / Н.Н. Картавых, С.В. Шкляев // Вестник Пермского университета. – 2007. – № 1 (6). – С. 23–28.

77. Pucci, G. Faraday instability in floating drops / G. Pucci, M. Ben Amar, Y. Couder // *Phys. Fluids*. – 2016. – Vol. 27: 091107.
78. Alabuzhev, A.A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid / A.A. Alabuzhev // *J. Fluid Mech. Res.* – 2019. – Vol. 46(5). – P. 441-457.
79. Неволин, В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн / В.Г. Неволин // *Инженерно-физический журнал*. – 1985. – Т. 47. – С. 1028–1042.
80. Miles, J. Parametrically forced surface waves / J. Miles, D. Henderson // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1990. – Vol. 22. – P. 143–165.
81. Любимов, Д.В. Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях / Д.В.Любимов, М.В. Хеннер, М.М. Шоц // *Изв. РАН. МЖГ*. – 1998. – № 3. – С. 25–31.
82. Pototsky, A. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface / A. Pototsky, M. Bestehorn // *Phys. Rev. Fluids*. – 2016. – Vol. 1: 023901.
83. Bestehorn, M. Faraday instability and nonlinear pattern formation of a two-layer system: A reduced model / M. Bestehorn, A. Pototsky // *Phys. Rev. Fluids*. – 2016. – Vol.1: 063905.
84. Koshel, K.V. Vortex Interactions Subjected to Deformation Flows: A Review / K.V Koshel, E.A. Ryzhov, X.J. Carton // *Fluids*. – 2019. – Vol. 4: 14.
85. Коновалов, В.В. Влияние вибраций на поведение пузырей и капель: дис. на соиск. учён. степ. / Коновалов Владимир Владиславович. – Пермь, к.ф.-м.н.: ИМСС УрО РАН, 2003. – 115 с.
86. Kuramoto, Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence / Y. Kuramoto // Berlin: Springer. – 1984. – 158 pp.
87. Пиковский, А. Синхронизация.Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртц // М.: Техносфера, 2003. – 496 с.
88. Афраймович, В.С. Устойчивость структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / В.С. Афраймович, В.И. Некоркин, Г.В. Осипов, В.Д. Шалфеев // Горький: ИПФ РАН СССР, 1989. – 256 с.

89. Bena, I. Coupled parametric oscillators / I. Bena, C. Van den Broeck // *Europhys. Lett.* – 1999. – Vol. 48. – P. 498–504.
90. Copelli, M. Phase-induced stability in a parametric dimer /M. Copelli, K. Lindenberg // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63: 036605.
91. Bena, I. Collective behavior of parametric oscillators / I. Bena, C. Van den Broeck, R. Kawai, M. Copelli, K. Lindenberg // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 6: 036611.
92. Farago, J. Parametric phase transition in one dimension / J. Farago, C. Van den Broeck // *EPL.* – 2001. – Vol. 54. – P. 411–416.
93. Nichols, S. Forbidden bifurcations and parametric amplification in a Josephson-junction array / S. Nichols, K. Wiesenfeld // *Phys. Rev. E.* – 1993. – Vol. 48(4): 2569–2574.
94. Goldobin, D.S. Resonances and multistability in a Josephson junction connected to a resonator / D.S. Goldobin, L.S. Klimenko // *Phys. Rev. E.* – 2018. – Vol. 97: 022203.
95. Goldobin, D. Collective modes in parametrically excited oscillator arrays / D. Goldobin, A. Pikovsky // *Europhys. Lett.* – 2002. – Vol. 59. – P. 193–198.
96. Долматова, А.В. Притяжение и отталкивание частот при синхронизации связанных активных ротаторов общим шумом / А.В. Долматов, Д.С. Голдобин, А.С. Пиковский // *Известия вузов. ПНД.* – 2019. – Т. 27, №. 6. – С. 91–112.
97. Долматова, А.В. Обрывание и замыкание разложений по круговым кумулянтам / А.В. Долматова, Д.С. Голдобин // *Вестник Пермского университета. Физика.* – 2020. – № 2. – С. 5–9.
98. Голдобин, Д.С. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов / Д.С. Голдобин, И.В. Тюлькина, Л.С. Клименко, А. Пиковский // *Вестник Пермского университета. Физика.* – 2018. – № 3(41). – С. 5–7.
99. Долматова, А.В. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов / А.В. Долматова, И.В. Тюлькина, Д.С. Голдобин // *Вестник Пермского университета. Физика.* – 2021. – № 3. – С. 5–12.