

**ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК –
ФИЛИАЛ ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ НАУКИ
ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

A. Tsayukov

Цаюков Андрей Андреевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СОЛЯНЫХ МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКОВ**

Специальность 2.8.6 «Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
академик РАН, доктор технических наук
Барях Александр Абрамович

Пермь – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	11
1.1 Условия разработки Верхнекамского месторождения калийных солей	11
1.2 Опыт геомеханических расчётов устойчивости междокамерных целиков .	16
1.3 Методы математического моделирования геомеханических процессов	19
1.4 Цель и задачи исследований	25
ГЛАВА 2. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СОЛЯНЫХ ПОРОД.....	27
2.1 Экспериментальные исследования.....	28
2.2 Упругопластическая модель	32
2.3 Критерии пластичности.....	38
2.4 Выводы	55
ГЛАВА 3. УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СОЛЯНЫХ ПОРОД.....	56
3.1 Экспериментальные данные	56
3.2 Упруго-вязкопластическая модель.....	59
3.3 Законы вязкопластичности.....	65
3.4 Выводы	89
ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКОВ	90
4.1 Натурные исследования	92
4.2 Математическая модель ползучести в варианте плоско-деформированного состояния	96
4.3 Численная реализация вязкопластической модели Перича.....	101
4.4 Модифицированный метод проекции напряжений.....	108
4.5 Численная реализация модифицированного метода проекции напряжений	115

4.6 Выводы	155
ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКОВ К ОЦЕНКЕ БЕЗОПАСНЫХ УСЛОВИЙ ПОДРАБОТКИ ВОДОЗАЩИТНОЙ ТОЛЩИ.....	158
5.1 Прогноз состояния междукламерных целиков	158
5.2 Оценка и прогноз безопасных условий подработки водозащитной толщи	163
5.3 Выводы	174
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	175
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	177
ПРИЛОЖЕНИЕ А	195
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	196

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

При разработке калийных и соляных месторождений главной задачей является защита рудников от затопления. Как правило, безопасность ведения горных работ обеспечивается путём сохранения на протяжении всего срока эксплуатации рудников технологического элемента, известного в горной практике как водозащитная толща (ВЗТ). Для условий Верхнекамского месторождения солей (ВКМС) под ВЗТ понимается безводная и водонепроницаемая часть геологического разреза, расположенная между кровлей верхнего отрабатываемого пласта калийно-магниевых солей и кровлей верхнего пласта каменной соли. Нарушение целостности ВЗТ непосредственно связано с риском возникновения аварийных ситуаций, обусловленных прорывом пресных или слабонасыщенных вод в выработанное пространство. Деформации на земной поверхности при этом, как правило, начинают интенсивно развиваться вследствие растворения соляных пород с возможным образованием провалов, глубина которых может достигать сотен метров. Как следствие, возникает угроза разрушения инфраструктуры, расположенной на земной поверхности.

Отработка продуктивных пластов в условиях ВКМС осуществляется камерной системой с поддержанием вышележащей толщи, в том числе и ВЗТ, на междукамерных целиках (МКЦ). В этом случае междукамерные целики находятся под постоянной, мало изменяющейся во времени нагрузкой, что обуславливает активизацию процессов ползучести, в результате которых происходит нарастание деформаций во времени и потеря несущей способности МКЦ.

Существующие методы расчёта устойчивых размеров целиков, по сути, сводятся к сравнению нагрузки, действующей на целик, с его предельной несущей способностью. Применительно к камерной системе первым инженерным способом расчёта целиков, вероятно, является метод французского горного инженера Турнера Л.М. Впоследствии различные модификации его гипотезы были отражены в работах Гупиера Ж.Н.Х., Грюнера Л.Е., Шевякова Л.Д. и др. Основное отличие

состояло в оценки прочности целиков (введение коэффициентов запаса, формы и т.д.). Современные методы анализа устойчивости несущих элементов систем разработки используют аппарат механики деформируемого твёрдого тела и основываются на оценках напряженно-деформированного состояния подработанного массива. Исследованиями расчёта междукammerных целиков в этом направлении занимались отечественные учёные: Амусин Б.З., Андрейко С.С., Асанов В.А., Барях А.А., Ержанов Ж.С., Жихарев С.Я., Журавков М.А., Константинова С.А., Космодамианский А.С., Крайнев Б.А., Линьков А.М., Оловянный А.Г., Протосеня А.Г., Ревуженко А.Ф., Руппенейт К.В., Фадеев А.Б., Фисенко Г.Л., Шерман Д.И. и многие другие; а также зарубежные исследователи: Cook N.G.W., Doering T., Erichsen C., Hackett P., Jaeger J.C., Kiehl J.R., Knoll P., Minkley W., Reginald Hardy H., Wallner M., Wittke W. и др. Однако, в работах этих авторов при расчёте несущих конструктивных элементов не учитывается специфика деформирования и разрушения междукammerных целиков.

На сегодняшний день существует много различных систем анализа напряжённо-деформированного состояния твёрдых тел, основанных на численных методах решения систем дифференциальных уравнений. Одним из самых популярных и универсальных методов является метод конечных элементов. Инженерные программные комплексы, базирующиеся на нём, в основном используют стандартные геомеханические модели, которые не отражают в полной мере особенности деформирования и разрушения соляных пород, вмещающих горные выработки. Более того, возникают сложности с параметрическим обеспечением этих моделей. В связи с чем возникает необходимость разработки новых методов математического моделирования и их численных реализаций для конкретного класса задач геомеханики.

Цель диссертационной работы

Построение математических моделей и разработка методов их численной реализации, адекватно отражающих процесс деформирования и разрушения соляных пород и междукammerных целиков.

Идея работы

Поэтапное построение математических моделей деформирования и разрушения соляных образцов и междукамерных целиков, базирующихся на лабораторных экспериментах и натурных наблюдениях, с учётом особенностей продольно-поперечного деформирования соляных пород и временных эффектов.

Задачи исследований:

1. Выполнить анализ результатов лабораторных экспериментов по физическому моделированию процесса деформирования и разрушения междукамерных целиков, основанных на одноосном сжатии крупномасштабных соляных образцов с контролем продольных и поперечных деформаций.

2. На базе изотропной упругопластической модели среды построить модель деформирования и разрушения крупных соляных образцов и подобрать критерии разрушения/пластичности, а также связанные с ними законы пластического течения, наилучшим образом описывающие одновременно диаграмму нагружения и кривые продольно-поперечных деформаций образцов.

3. Провести анализ результатов физического моделирования одноосного сжатия соляных образцов малых размеров в режиме релаксации и ползучести с оценкой влияния временных эффектов на процессы деформирования и разрушения соляных пород.

4. Включить в построенную модель деформирования и разрушения крупных соляных образцов вязкую составляющую и подобрать с помощью многовариантного моделирования вязкопластические законы, адекватно описывающие кривые релаксации и ползучести малых соляных образцов и имеющие простое и стабильное параметрическое обеспечение.

5. Адаптировать упруго-вязкопластическую модель деформирования и разрушения соляных образцов на случай плоского деформированного состояния и применить её для описания процессов деформирования междукамерных целиков в двухпластовом камерном блоке.

6. Продемонстрировать возможность использования построенной математической модели деформирования междукамерных целиков для оценки и прогноза их состояния, оценки оседаний земной поверхности, а также параметрического обеспечения анализа безопасных условий подработки водозащитной толщи.

Методы исследований предусматривали комплексный подход к решению поставленных задач и включали: анализ результатов лабораторных экспериментов и натурных наблюдений, математическое моделирование, основанное на методах механики деформируемого твёрдого тела, использование современных численных методов в связке с многовариантным математическим моделированием и высокопроизводительными вычислительными технологиями.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. Построена трёхмерная упругопластическая модель деформирования и разрушения соляных пород, основанная на неассоциированном критерии Кулона-Мора и ассоциированном объёмном критерии прочности, адекватно описывающая результаты лабораторных испытаний крупномасштабных образцов в условиях одноосного сжатия.

2. Разработана трёхмерная упруго-вязкопластическая модель деформирования соляных пород, базирующаяся на принятых критериях пластичности (критерий Кулона-Мора и объёмный критерий), совмещённых с вязкопластическим законом Перича, которая характеризуется относительно простым, стабильным параметрическим обеспечением и приемлемо описывает стадию установившейся ползучести и релаксацию напряжений.

3. Предложен модифицированный метод проекции напряжений, реализованный для объёмного критерия пластичности и критерия Кулона-Мора в связке с вязкопластической моделью подобной закону Перича, который позволяет адекватно отразить нарастание во времени деформаций междукамерных целиков, развитие зон разрушения вмещающих пород и может быть включён в методическую схему оценки и прогноза безопасных условий подработки водозащитной толщи.

Достоверность научных положений и выводов обеспечивается представительным объёмом лабораторных и натурных исследований, корректным применением методов механики деформируемого твёрдого тела и численных методов, сходимостью численных решений, приемлемым качественным и количественным соответствием полученных результатов экспериментальным данным и специфике деформирования соляных пород.

Научная новизна

1. На основе экспериментальных данных построена трёхмерная математическая модель упруго-вязкопластического деформирования и разрушения соляных образцов во времени, учитывающая особенности их продольно-поперечного деформирования.

2. Для моделирования процессов ползучести в соляных породах, вмещающих горные выработки, разработан метод, основанный на введении в вязкопластическую модель дополнительного внутреннего параметра, предела ползучести, и соответствующего метода вычисления эквивалентного напряжения ползучести.

3. В качестве закона вязкопластичности для модели ползучести, построенной с применением модифицированного метода проекции напряжений, предложен закон подобный модели Перича.

4. Построен алгоритм численной реализации модифицированного метода проекций напряжений, основанный на неявной схеме Эйлера локального интегрирования методом обратного отображения.

5. Разработан алгоритм реализации модифицированного метода проекции напряжений для критерия пластичности Кулона-Мора, учитывающий особенности вычисления предела ползучести и эквивалентного напряжения ползучести.

6. Предложена методика анализа безопасных условий подработки водозащитной толщи, основанная на оценке оседаний земной поверхности по прогнозным скоростям горизонтальной конвергенции очистных камер, описываемым разработанной упруго-вязкопластической моделью деформирования и разрушения междукамерных целиков с применением модифицированного метода проекции напряжений.

Личный вклад автора

При непосредственном участии автора проведены: постановка задач, анализ и обработка результатов лабораторных и натурных исследований, разработка и численная реализация математических моделей, разработка программного кода, многовариантные численные эксперименты, обработка и анализ полученных результатов, разработка методики практической реализации, формулировка основных выводов и научных положений.

Практическая значимость

Разработанная методика оценки и прогноза оседаний земной поверхности на основе математического моделирования горизонтальной конвергенции очистных камер при помощи построенной упруго-вязкопластической модели деформирования и разрушения междукammerных целиков в режиме ползучести, базирующейся на предложенном модифицированном методе проекции напряжений, может использоваться на участках калийных рудников, где невозможны маркшейдерские наблюдения и инструментальные измерения горизонтальной конвергенции ввиду ограниченного доступа в выработки.

Реализация работы

Основные положения диссертационной работы использованы при анализе напряженно-деформированного состояния междукammerных целиков, оценке развития процесса сдвижения во времени и прогнозе безопасных условий подработки водозащитной толщи на участках шахтных полей рудников ПАО «Уралкалий».

Апробация работы

Основные положения и результаты диссертационной работы были представлены на международных Европейских симпозиумах по геомеханике «EUROCK 2018» (г. Санкт-Петербург, 2018 г.) и «EUROCK 2020» (г. Тронхейм, Норвегия, 2020 г.), научных сессиях ГИ УрО РАН (г. Пермь, 2017, 2018, 2023, 2024 гг.), XXIII Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2023 г.),

отчётной конференции по итогам 1 этапа выполнения проекта «Фундаментальная механика в новых материалах, конструкциях, технологиях» (г. Пермь, 2024 г.), II Всероссийской конференции «Разрушение горных пород и минералов» (г. Екатеринбург, 2025 г.).

Связь работы с крупными научными программами и темами

Диссертационная работа выполнена в соответствии с грантами Российского фонда фундаментальных исследований (грант №17-45-590681) и Российского научного фонда (грант №19-77-30008), а также в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение №075-15-2024-535 от 23 апреля 2024 г.).

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 8 печатных работ в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, в том числе 6 в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Объём диссертационной работы и её структура

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения, изложенных на 199 страницах машинописного текста, содержит 78 рисунков, 26 таблиц и 2 приложения. Список используемых источников состоит из 166 наименований, в том числе 72 зарубежных.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю академику РАН, д-ру техн. наук Баряху А.А. за формирование научного направления работы, консультации при выполнении работы и за создание уникальной среды для исследований, сотрудникам лабораторий механики горных пород и физических проблем освоения георесурсов «ГИ УрО РАН» за плодотворное сотрудничество, ценные советы и проявленный интерес.

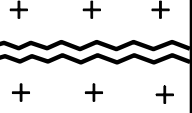
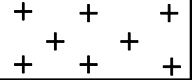
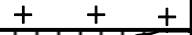
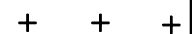
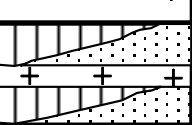
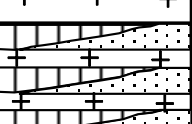
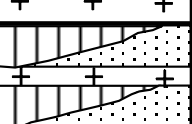
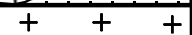
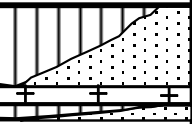
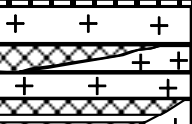
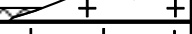
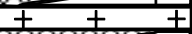
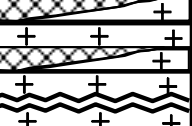
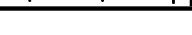
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1 Условия разработки Верхнекамского месторождения калийных солей

Расположенное на севере Пермского края Верхнекамское месторождение калийных и калийно-магниевых солей (ВКМС) является одним из крупнейших в мире. Месторождение находится в Предуральском краевом прогибе, который на западе граничит с Русской платформой, а на востоке переходит в Западно-Уральскую зону складчатости. Также как и все структуры Урала, месторождение вытянуто в меридиональном направлении. Калийные пласты распространены на площади 3.6 тыс. км² и располагаются внутри соляной толщи площадью 6.5 тыс. км². Оработка месторождения ведётся с 1932 года.

Исследование геологического строения Верхнекамского месторождения представлено во многих работах [1-6]. В пределах соляной толщи выделяют снизу вверх следующие слои: подстилающая каменная соль (ПдКС) мощностью от 50 до 515 м, сильвинитовая зона средней мощностью 21 м, сильвинито-карналлитовая – мощностью от 21 до 115 м и покровная каменная соль (ПКС) (рис. 1.1). Над ПКС залегает соляно-мергельная толща (СМТ), представленная чередованием пластов каменной соли с мергелями и глинами [2,4]. Мощность надсолевой толщи, которая представлена терригенно-карбонатными отложениями (ТКТ), пестроцветной толщей и четвертичными отложениями, колеблется от 100 до 300 м. Глубина залегания кровли калийной залежи в пределах месторождения изменяется от 150 до 500 м.

Обводнённость пород, покрывающих соляную залежь, является одной из особенностей Верхнекамского месторождения. Водоносность покрывающих отложений изменчива как в вертикальном, так и в горизонтальных направлениях. Трещиноватость и невыдержанность глинистых прослоев по простиранию обуславливает наличие единого горизонта подземных вод, водупором для

Стратигра- фический горизонт	Индекс пласта	Литология	Средняя мощность, м
Покровная каменная соль	ПКС		22,0
Сильвинитово - карналлитовый	К		1,10/0,75
	И-К		6,10
	И		1,65/0,55
	З-И		2,25
	З		0,75/0,50
	Ж-З		3,25
	Ж		0,90/0,70
	Е-Ж		4,20
	Е		7,40/3,10
	Д-Е		3,45
	Д		8,10/2,75
	Г-Д		2,90
	Г		7,70/2,50
	В-Г		2,20
	В		6,60/2,20
	В-В'		0,35
	В'		0,40/0,25
	Б-В'		1,66
	Б		2,80/1,40
Сильвинитовый	А		1,40
	А'-КрI		2,00
	КрI		1,15
	КрI-КрII		1,45
	КрII		6,10
	КрII-КрIII а		1,80
	КрIII а		0,95
	КрIII а-б		0,85
	КрIII б		1,35
	КрIII б-в		1,60
Подстилаю- щая камен- ная соль			25,0
	Марки- рующая пачка		2,0
			260,0

 1 - каменная соль
 2 - карналлит
 3- пестрый сильвинит
 4 - полосчатый сильвинит
 5 - красный сильвинит
 6 - соленосная глинисто-ангидрито-карбонатная маркирующая пачка

Рисунок 1.1 – Стратиграфический разрез соляной толщи ВКМС [7]

которого является соляная толща. При разработке ВКМС, как и большинства других калийных и соляных месторождений, защита рудников от затопления обеспечивается технологическим элементом, получившим в горной практике название – водозащитная толща (ВЗТ). Для условий ВКМС под ВЗТ понимается безводная и водонепроницаемая часть геологического разреза, расположенная между кровлей верхнего отрабатываемого пласта калийно-магниевых солей и кровлей верхнего пласта каменной соли [8].

Установлено, что мощность водозащитной толщи на отдельных участках снижается до 30 метров. Обводнённость надсолевой толщи и лёгкая растворимость солей накладывают ограничения на деформации водозащитной толщи. Таким образом, основной особенностью разработки Верхнекамского месторождения калийных солей является необходимость сохранения сплошности водозащитного целика, для избежания проникновения пресных или слабоминерализованных вод в подземные горные выработки. В связи с этим, пласты калийных солей на Верхнекамском месторождении отрабатываются камерно-столбовой системой. В этом случае главные функции по обеспечению сохранности ВЗТ выполняют несущие конструкции – междуканальные целики (МКЦ).

Промышленными пластами на Верхнекамском месторождении являются сильвинитовые АБ и Красный-II и карналлитовый пласт В, представленный на отдельных участках месторождения сильвинитом. В сильвинитово-карналлитовой зоне средняя мощность единого пласта АБ – 3.5 м. В сильвинитовой зоне средние мощности пластов составляют: Красный-III – 3.2 м, Красный-II – 5.5 м, Красный-I – 1.3 м, пласт А – 1.4 м. Средняя мощность пласта В при карналлитовом составе составляет – 15 м. Все пласты калийно-магниевых и калийных солей отделяются друг от друга межпластовой каменной солью мощностью 1.5-6.0 м. Число отрабатываемых пластов определяется условиями залегания пород, особенностями геологического строения и регламентируется действующими нормативными документами [9].

Параметры камерной системы разработки весьма разнообразны и определяются горно-геологическими условиями залегания пластов, их физико-

механическими свойствами, условиями безопасного ведения очистных работ. В частности, ширина камер должна обеспечивать устойчивость кровли, которая зависит от её геологического строения, причём значительно от наличия глинистых прослоев. Так на участках с устойчивыми породами ширина камер достигает 16 м, а на участках со слабоустойчивой кровлей уменьшается до 3 м. Высота камер, в основном, определяется мощностью вынимаемых пластов. Ширина междукamerных целиков, в связи с широким разнообразием горно-геологических и горнотехнических условий, изменяется от 3 до 20 м, и для каждого участка определяется, исходя из расчётов. При многопластовой отработке (рис. 1.2) междукamerные целики располагаются соосно. Такой способ выемки полезных ископаемых представляет наибольшую опасность, т.к. при обрушении междупластий режим деформирования МКЦ значительно меняется – отношение их высоты к ширине становится больше единицы. Для уменьшения негативного влияния горного производства на окружающую природную среду и в целях обеспечения защиты рудников от затопления производится закладка отработанных камер солеотходами [10].

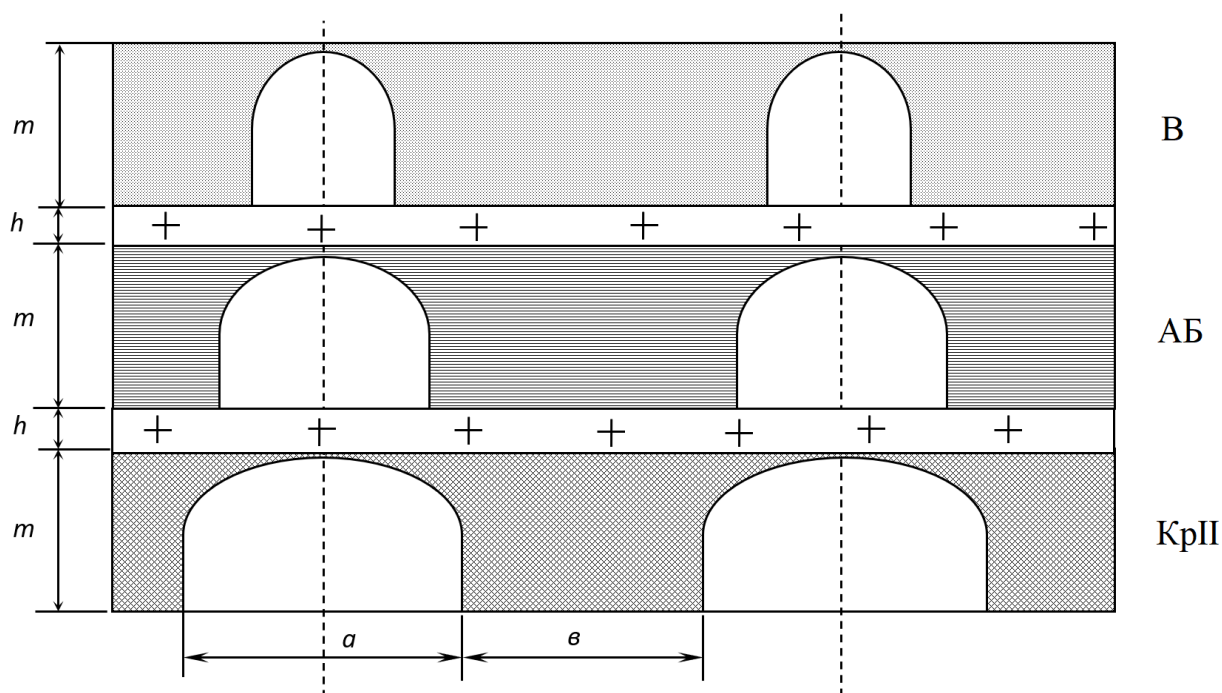


Рисунок 1.2 – Камерная система отработки пластов АВ, КрII и В (a – ширина камеры, b – ширина междукamerного целика, m – вынимаемая мощность, h – мощность междупластья)

Основным показателем, регламентирующим расчёт ширины междокамерных целиков, является степень их нагружения, определение которой производится по формуле [9]:

$$C = \xi \gamma H_0 \frac{a+b}{\sigma_m k_f b}, \quad (1.1)$$

где ξ – коэффициент, учитывающий изменение нагрузки на междокамерные целики вследствие влияния горнотехнических факторов; γ – удельный вес налегающей толщи пород; H_0 – максимальное значение расстояния от земной поверхности до кровли отрабатываемого пласта на рассматриваемом участке шахтного поля; σ_m – агрегатная прочность пород в массиве в пределах расчётной высоты междокамерных целиков; a и b – ширина очистных камер и ширина междокамерных целиков, соответственно; k_f – коэффициент формы.

В настоящее время, согласно нормативным документам [9], степень нагружения в основном не должна превышать $C \leq 0.4$ для нормальных геологических условий разработки и $C \leq 0.3$ при наличии различных групп аномального строения ВЗТ.

Наиболее постоянным параметром системы является длина камеры, которая составляет 180-200 метров. Выбор её осуществляется из условия эффективного использования применяемых транспортных средств.

Основным способом очистной выемки руды на ВКМС является механизированный с использованием следующих типов добычных комбайнов: Урал-20 и Урал-61. Размеры выработки, проходимой комбайном Урал-20, в сечении составляют 3.1 м в высоту и 5.1 м в ширину. Соответствующие проходческому комбайну Урал-61 размеры выработки: высота 3.2 м и ширина 3.1 м.

Разнообразие горно-геологических условий, встречающихся на Верхнекамском месторождении калийных солей, обусловленное изменчивостью строения вмещающих и рудосодержащих пород, их механических свойств, гипсометрии, глубин залегания в сочетании с различными горнотехническими

условиями ведения очистных работ, применяемых технологий отбойки руд и горнотехнических мероприятий, обуславливают многообразие механизмов взаимодействия междокамерных целиков с вмещающими породами и их протекании во времени.

В настоящее время невозможно достаточно точно прогнозировать сроки сохранения эксплуатационной устойчивости междокамерных целиков, что затрудняет, а иногда делает невозможным применение дополнительных мер охраны ВЗТ в виде закладки очистных камер. В связи с этим остаётся актуальным вопрос разработки новых геомеханических методов оценки и прогноза несущей способности существующих целиков и разработки расчётных методик, позволяющих обеспечить оптимальный заданный срок их службы.

1.2 Опыт геомеханических расчётов устойчивости междокамерных целиков

Междокамерные целики широко используются в горной практике, как способ управления горным давлением для поддержания отработанного пространства на период проведения очистных работ и эксплуатации месторождения полезных ископаемых. Устойчивость целиков определяется различными факторами, учёт которых влияет на их напряжённо-деформированное состояние и предельную несущую способность. Это, в свою очередь, обуславливает эффективность применения того или иного метода расчёта устойчивости междокамерных целиков.

Все известные методы расчёта устойчивости целиков в основном сводятся к определению так называемой степени их нагружения, где сравнивается нагрузка, действующая на целик, с его предельной несущей способностью. Отсюда, как правило, вытекают две задачи решения этого неравенства: определение нагрузки на целик и его несущей способности. Действующая нагрузка чаще всего определяется теоретически, исходя из принятых гипотез. Напротив, оценка несущей способности целиков проводится на основе эмпирических данных о

прочностных свойствах пород, составляющих целик, его геометрических параметров, наличие контактов, глинистых прослоев и т.д.

Вероятно, первым методом оценки «прочных размеров» целиков применительно к камерной системе является инженерный метод Турнера [11]. Идея метода основывается на том, что опорные целики несут нагрузку от веса налегающей породной толщи, которая сравнивается с прочностью кубических образцов. Впоследствии появилось много различных инженерных модификаций гипотезы Турнера [12-15]. Фактически отличие состояло только в оценки прочности целиков (введение коэффициентов запаса, формы и т.д.).

Несмотря на присущие ограничения различных модификаций метода, такие инженерные подходы широко используются для расчёта параметров камерной системы разработки. Так, методика расчёта устойчивых размеров междукammerных целиков на Верхнекамском месторождении, регламентированная в нормативных документах [9], базируется на методе Турнера-Шевякова и обеспечивает вполне приемлемую для практики точность оценок. Многолетняя горная практика подтверждает работоспособность данного метода. Однако, использование формулы Турнера-Шевякова справедливо только для простых горно-геологических и горнотехнических условий разработки (субгоризонтальное залегание рабочих пластов, одинаковые размеры целиков, их каноническая форма и т.д.). Успешное применение этих подходов в основном определяется тем, насколько учитываемая нагрузка соответствует действительности. Все эти методы работают пока деформации целиков происходят в рамках линейной упругости.

В настоящее время с помощью аппарата механики деформируемого твёрдого тела получены аналитические решения ряда двумерных задач, учитывающие основные закономерности деформирования и разрушения целиков. Так на основе теории упругости исследовались напряжённые состояния полуплоскостей, ослабленных различными видами (прямоугольными, эллиптическими) [16,17] и разным количеством (ограниченным, бесконечным) [18-21] отверстий. Ряд аналитических исследований были проведены с учётом различия материалов

перемычек (целиков) между отверстиями и плоскостью (массивом) [21-23], а также взаимодействия целика с кровлей и почвой [24,25]. Рассматривались случаи, когда междуканальные целики находятся на стадии пластического деформирования и в предельном состоянии [27-30], где решаются упругопластические задачи. Несмотря на свою привлекательность и явные достоинства, возможности применения аналитических методов для решения горнотехнических задач сильно ограничены. Они не позволяют одновременно отразить в расчётах ряд особенностей строения подработанного массива: трещиноватость, слоистость, форму выработок, их протяжённости, наличие закладки и т.д.

В последние десятилетия для расчёта целиков всё шире применяются численные методы такие, как вариационно-разностные [31], метод граничных элементов [32,33,34], метод конечных элементов. Последний получил наибольшее распространение в геомеханических расчётах [35-41]. Применительно к расчётам соляных междуканальных целиков выполнен целый ряд работ [36,37,42,43], где анализируется изменение напряжённо-деформированного состояния целиков и их окрестностей в различных конфигурациях, а также влияние закладки очистных выработок. В рамках упругих постановок даётся оценка коэффициента безопасности для целиков [44,45]. В работе [46] оценивается влияние наклона залеганий рабочих пластов и межхоровых целиков на степень нагружения междуканальных целиков. Несмотря на относительную простоту, эти подходы позволяют сохранить для горняков-практиков привычную идеологию расчёта устойчивости целиков. Для стандартной двухпластовой отработки на Верхнекамском месторождении авторы [47] проводят анализ изменения степени нагружения междуканальных целиков во времени в процессе разрушения конструктивных элементов канальной системы разработки, где учитывалось изменение контура очистных камер. Также для свиты силвинитовых пластов на Верхнекамье проведена оценка степеней нагружения междуканальных целиков двухпластового канального блока при соосном и несоосном размещении камер [48]. Полученные результаты сравнивались с методом Турнера-Шевякова.

Используются и более сложные модели, основанные на критериях Кулона-Мора, Хука-Брауна в сочетании с различным поведением геоматериалов под нагрузкой [49-51].

Современные методы расчётов опорных целиков, набирающие популярность, используют дискретный и гибридный методы анализа их устойчивости [52,53]. Несмотря на их привлекательность, численная реализация этих подходов требует существенных вычислительных затрат и устойчивого параметрического обеспечения.

Рассмотренные методы расчёта несущей способности междукамерных целиков позволяют заключить, что численные методы являются наиболее универсальными и перспективными. Также существующие в настоящее время методы расчёта целиков не охватывают в полной мере специфику деформационных процессов, протекающих в целиках и околоразработанном пространстве. В этой связи сохраняется актуальность разработки новых методик оценки напряжённо-деформированного состояния междукамерных целиков и подработанного массива.

1.3 Методы математического моделирования геомеханических процессов

Применительно к моделированию геомеханических процессов существующие аналитические решения не выходят за рамки элементарных расчётных схем для объектов канонической формы [54-56]. Это не позволяет учитывать более сложные горно-геологические и горнотехнические условия в задачах геомеханики. В связи с чем для такого рода задач наиболее широкое распространение получили численные методы моделирования.

Один из хорошо развитых численных методов решения дифференциальных уравнений, метод конечных разностей [57-59], чья суть заключается в замене производных соответствующими разностными аналогами. С помощью МКР удобно решать задачи, которые можно свести к двумерной постановке: плоское напряжённое состояние, плоское деформированное состояние. Также в число

успешно решаемых входят задачи об изгибе плит и о напряжённом состоянии пологих оболочек [60]. В качестве рассматриваемой области решения могут быть области произвольной формы. Однако, сходимость решения для получаемых при этом разностных схем сильно замедляется. К недостаткам метода также можно отнести учёт граничных условий, при котором создаются дополнительные узлы конечно-разностной сетки, что бывает затруднительно для областей произвольной формы. В связи с чем, МКР не пользуется особой популярностью при моделировании геомеханических процессов. Несмотря на это, развитие метода продолжается [61-64].

Метод граничных элементов [65-67], получивший стремительное развитие в конце XX века, заключается в нахождении связи значений искомых функций внутри области решения с их значениями на границе. Проводится такая процедура путём перехода от дифференциальных уравнений к соответствующим интегральным выражениям. Таким образом, значения искомых функций в них на границе рассматриваемой области являются неизвестными, которые требуется найти. Отсюда вытекает одно из преимуществ данного метода – дискретизация только границы области решения, что в свою очередь облегчает ввод исходных данных. Также к преимуществам можно отнести непрерывность искомых величин внутри рассматриваемой области. В геомеханике МГЭ широко применяется для решения контактных задач о трещинах [68]. Ряд его существенных недостатков делает метод менее привлекательным для моделирования масштабных и сложных геомеханических процессов. К ним относятся несимметричность и плотная упаковка системы линейных алгебраических уравнений, получаемой в результате применения МГЭ, а также учёт сил гравитации и неоднородность решаемых задач геомеханики.

На сегодняшний день наибольшую популярность и универсальность приобрёл метод конечных элементов [69-73]. Сложно определить точное происхождение метода. На его развитие повлияли работы многих математиков, учёных и инженеров. Так основные идеи позаимствованы из математического

аппарата конечных разностей, вариационных исчислений и метода взвешенных невязок, а также инженерных подходов, выраженных в интуитивной замене рассматриваемой непрерывной области конечным числом упрощённых частей [73]. Стандартная методология МКЭ была разработана уже во второй половине XX века, где для решения различных задач были сформированы общие процедуры метода: разбиение области решения на конечное число элементов, поведение которых определяется конечным числом параметров, сборка всех элементов в единую систему (процедура ансамблирования), и определение из её решения неизвестных параметров конечных элементов. Для задач механики конечные элементы представляют собой упругие элементы, деформации которых связаны определённым образом, сохраняя непрерывность деформации модели. К основным преимуществам МКЭ перед другими методами численного моделирования можно отнести: симметричность глобальной матрицы жёсткости системы, получаемой в результате процедуры ансамблирования, возможность задания области решения и граничных условий сложной конфигурации, а также простота учёта различного рода неоднородностей. Всё это позволяет моделировать достаточно сложные геомеханические процессы [36,37]. Имеются и недостатки МКЭ. Так, например, при моделировании областей с высоким градиентом поля напряжений необходимо существенно сгущать конечно-элементную сетку, что в итоге приводит к увеличению размера получаемой системы уравнений, либо использовать элементы высоких порядков аппроксимации, что усложняет построение локальных матриц жёсткости и процедур локального интегрирования. Матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений при использовании МКЭ получается сильно разрежённой. Однако, в свете современных высокопроизводительных вычислительных технологий [74-78] наряду с алгоритмами работы с разрежёнными матрицами [79-83] делает эту особенность больше достоинством, чем недостатком.

Одна из модификаций метода конечных элементов – полуаналитическая схема МКЭ, которая нашла широкое применение в трёхмерных геомеханических расчётах, была разработана во времена, когда вычислительные ресурсы были

сильно ограничены. Идея модификации метода состоит в исключении зависимости рассматриваемой геометрии и свойств материала от одной из координат. Таким образом, вдоль этой координаты искомые величины раскладываются в ряд Фурье на определённое количество членов гармонического ряда, число которых можно регулировать, получая при этом необходимую точность аппроксимации. Так трёхмерная задача сводится к набору двумерных решений. Полуаналитическая схема МКЭ хорошо ложится под условия камерной системы разработки, что позволяет моделировать достаточно широкий класс задач геомеханики [84].

Существует также ряд методов сведения краевых задач теории упругости для области произвольной формы к задаче для канонической области. Один из таких методов, метод геометрического погружения (МГП) [85], хорошо согласуется с особенностями постановки широкого класса задач геомеханики [43,86]. Процедура погружения может быть реализована с использованием вариационно-разностного метода, метода граничных элементов, метода конечных элементов. Последний является наиболее простым для реализации МГП. При моделировании геомеханических процессов в качестве канонической области удобно использовать нетронутый горными работами массив.

В современном мире горная промышленность нуждается в высокотехнологичных и высокопроизводительных решениях широкого круга задач, возникающих при добыче полезных ископаемых. Большинство таких решений производится в инженерных программных комплексах. Крупнейшие производители инжиниринговых систем анализа предлагают довольно обширный спектр решений различного рода задач, в том числе задач механики деформируемого твёрдого тела. Некоторые разработчики даже предлагают набор готовых инструментов, предназначенных для горнодобывающей промышленности. В основном системы численного анализа основываются на МКЭ, среди которых можно отметить иностранные пакеты Ansys (www.ansys.com) и Abaqus FEA (www.3ds.com/products/simulia/abaqus), а также отечественный – CAE Fidesys (cae-fidesys.com). Существует специализированный набор

инструментов Itasca FLAC (www.itascacg.com/software/FLAC) для решения различных геотехнических задач, основывающийся на методе конечных разностей/контрольных объёмов (МКР/МКО).

Модуль Ansys Mechanical программного комплекса Ansys включает в себя набор средств для решения задач геомеханики [87] таких как моделирование механического поведения грунтов, горных пород, материалов заполнителей. Основные направления применения — это расчёты фундамента и свай, туннелирований, экскаваций, сейсмических событий, консолидации грунтов, а также разрушения различных структур, включая ненарушенные и трещиноватые горные породы, каменные кладки и бетон. Поведение материалов при этом описывается с помощью пластических моделей, среди которых модифицированная Cam-clay, Кулон-Мор, Друкер-Прагер и Менетри-Уильям. Стоит отметить, что, как и в большинстве коммерческих систем анализа, в качестве модели Кулона-Мора используется её непрерывный аналог, построенный на инвариантах тензора напряжений. Временные эффекты в материале в виде ползучести могут быть описаны только в связке с пластической моделью Друкера-Прагера (расширенная модель Друкера-Прагера). Скорости нарастания деформаций при этом возможно задать с помощью различных вязкопластических законов, учитывающих этапы неустановившейся и установившейся ползучести.

Пакет численного анализа Abaqus FEA не имеет специализированных инструментов для решения задач геомеханики. Однако, набор моделей поведения материалов [88], с помощью которых возможно решать многие из них, практически аналогичен Ansys. Так в арсенале Abaqus FEA присутствуют пластические модели Друкера-Прагера и Кулона-Мора, а также модифицированный вариант модели Друкера-Прагера, дополненный Cap-моделью для учёта консолидации материала. Ползучесть так же, как и в Ansys, может быть смоделирована только в связке с моделью Друкера-Прагера.

Отечественная система компьютерного инжиниринга CAE Fidesys далеко шагнула в развитии с самого своего начала. Пользовательская среда

геометрического моделирования в сочетании с высокопроизводительными решателями делает численное моделирование удобным. К тому же в системе есть интегрированная среда сценариев на скриптовом языке Python, с помощью которой можно автоматизировать работу в системе. Касаясь задач геомеханики, здесь представлены следующие направления: оптимизация маршрутов проходки в горной породе, анализ вероятности аварий в результате горнопроходческих работ, устойчивость скважин и бортов карьеров, прогноз нефтеотдачи пластов в результате накопления деформаций и др. Используемые пластические модели при этом ограничиваются моделями Друкера-Прагера и Кулона-Мора [89]. Для описания процессов ползучести возможно использовать только один вязкопластический закон, степенной закон Нортон, и только в паре с пластичностью по Мизесу.

Специализированная система решения различного рода геотехнических задач Itasca FLAC [90] предлагает широкий спектр возможностей: от описания лабораторных испытаний до крупномасштабного моделирования геомеханических процессов. В перечень решаемых задач входят также расчёт целиков и выработок, оседаний земной поверхности. Пластическое поведение материалов может быть описано с помощью таких моделей, как Друкер-Прагер, Кулон-Мор, Хук-Браун и др. Также представлены модели контактов и деформационного упрочнения/разупрочнения. Различные вязкоупругие и вязкопластические законы, среди которых двухпараметрический закон Нортон, позволяют учитывать ползучесть материала.

Многие производители систем численного анализа предоставляют программный интерфейс для разработки собственных моделей поведения материалов, что позволяет учитывать специфику деформирования и разрушения горных пород, присущую разрабатываемым месторождениям полезных ископаемых.

Таким образом, текущее развитие методов моделирования и средств анализа позволяет решать широкий круг практических задач геомеханики. Однако, их

специфика в большей мере определяет эффективность того или иного подхода. Отсюда возникает необходимость разработки новых методов математического моделирования и их численных реализаций для конкретного класса задач геомеханики.

1.4 Цель и задачи исследований

Выполненный анализ методов расчёта устойчивости междокамерных целиков показал, что в сложных горно-геологических и горнотехнических условиях существующие методики оценки и прогноза сроков их эксплуатации не дают надёжных результатов. Это, в свою очередь, затрудняет на месторождениях калийных солей получение адекватных оценок процессов деформирования и разрушения подработанных толщ. В связи с этим остаётся актуальным вопрос разработки новых, более совершенных методов оценки и прогноза несущей способности существующих целиков, обеспечение заданного срока их службы.

Проведённый обзор методов математического моделирования геомеханических процессов позволяет сделать вывод о том, что наиболее перспективными являются численные методы. Текущее их развитие, а также средств численного анализа позволяет решать достаточно широкий круг практических задач геомеханики. Однако, их специфика в большей мере определяет эффективность используемого подхода. Таким образом, возникает необходимость разработки новых геомеханических моделей и их численных реализации для конкретного класса задач.

Целью работы является построение математических моделей и разработка методов их численной реализации, адекватно отражающих процесс деформирования и разрушения соляных пород и междокамерных целиков.

Идея работы состоит в поэтапном построении математических моделей деформирования и разрушения соляных образцов и междокамерных целиков, базирующихся на лабораторных экспериментах и натурных наблюдениях, с учётом особенностей продольно-поперечного деформирования соляных пород и временных эффектов.

Для достижения этой цели требуется решение следующих задач:

1. Выполнить анализ результатов лабораторных экспериментов по физическому моделированию процесса деформирования и разрушения междукламерных целиков, основанных на одноосном сжатии крупномасштабных соляных образцов с контролем продольных и поперечных деформаций.

2. Построить модель деформирования и разрушения крупных соляных образцов и подобрать критерии разрушения/пластичности, а также связанные с ними законы пластического течения, наилучшим образом описывающие одновременно диаграмму нагружения и кривые продольно-поперечных деформаций образцов.

3. Провести анализ результатов физического моделирования одноосного сжатия соляных образцов малых размеров в режиме релаксации и ползучести с оценкой влияния временных эффектов на процессы деформирования и разрушения соляных пород.

4. Включить в построенную модель деформирования и разрушения вязкую составляющую и подобрать с помощью многовариантного моделирования вязкопластические законы, адекватно описывающие кривые релаксации и ползучести соляных образцов и имеющие простое и стабильное параметрическое обеспечение.

5. Адаптировать упруго-вязкопластическую модель деформирования и разрушения соляных образцов на случай плоского деформированного состояния и применить её для описания процессов деформирования междукламерных целиков в двухпластовом кламерном блоке.

6. Продемонстрировать возможность использования построенной математической модели деформирования междукламерных целиков для оценки и прогноза их состояния, оценки оседаний земной поверхности, а также параметрического обеспечения анализа безопасных условий подработки водозащитной толщи.

ГЛАВА 2. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СОЛЯНЫХ ПОРОД

Соляные породы относятся к классу структурно-неоднородных геоматериалов, которые проявляют квазипластичный характер деформирования, обладают выраженными реологическими свойствами и специфической реакцией на различные внешние воздействия [91-94]. Исследование особенностей поведения соляных пород под нагрузкой представляет интерес для геологов [95,96], горняков [97-99], специалистов в области создания подземных хранилищ углеводородного сырья и радиоактивных отходов [100-102].

При строительстве подземных сооружений в соляных формациях, ведении горных работ на месторождениях солей лабораторные испытания, в основном, проводятся для параметрического обеспечения стандартных геомеханических расчётов, согласно требованиям нормативных документов [8,9,103]. Значительная часть исследований процессов деформирования и разрушения соляных пород при различных режимах нагружения связано с построением их феноменологических моделей [68,104,105] и критериев разрушения [106,107]. Выбор оптимальных критериев разрушения, как правило, ограничен набором представительных прочностных характеристик исследуемого материала. Применительно к соляным породам, вследствие их структурной неоднородности, обычно используются два показателя: пределы прочности при одноосном сжатии и растяжении — σ_c и σ_t . В связи с этим прочность солей в основном описывается линейным критерием Кулона-Мора [108] или его параболическим аналогом [109]. Данные критерии, в целом обеспечивают приемлемую оценку предельного напряжённо-деформированного состояния соляных пород.

Достаточно редко лабораторные испытания используются для настройки математических моделей применительно к описанию устойчивости горнотехнических конструкций и прогнозе изменения их состояния во времени. Такие исследования являются своего рода аналогом физического моделирования даже в случае несоблюдения критериев подобия [110].

В работе [111] для оперативного контроля состояния междокамерных целиков, обеспечивающих поддержание вышележащей толщи пород при подземной разработке солей, предложено использовать их поперечную деформацию. Методами математического моделирования дана предварительная оценка критической скорости поперечного деформирования междокамерных целиков.

В текущей главе рассматриваются лабораторные испытания больших соляных образцов кубической формы на одноосное сжатие с контролем продольных и поперечных деформаций. На основе многовариантного математического моделирования проводится обоснование критериев и параметров разрушения, которые одновременно наилучшим образом описывают диаграмму деформирования соляного образца и зависимость его поперечных деформаций от продольных.

2.1 Экспериментальные исследования

Междокамерные целики различной пространственной конфигурации деформируются преимущественно в условиях одноосного сжатия. Физическое моделирование процесса их разрушения основывалось на одноосном сжатии соляных образцов кубической формы большого размера ($300 \times 300 \times 300$ мм, рис. 2.1). Испытание проводилось на гидравлическом прессе ToniNorm с максимальной нагрузкой 5000 кН. В процессе нагружения регистрировалась абсолютная продольная деформация образца и измерялись смещения в его среднем поперечном сечении на различном удалении от боковых граней. Для изучения развития поперечных деформаций внутри образца закреплялись контурный репер и специальные глубинные марки на 5, 10 и 15 см от его боковой грани. Контроль деформаций образца и перемещения глубинных марок в процессе испытаний осуществлялся с помощью бесконтактной трёхмерной оптической системы Vic-3D фирмы «Correlated Solutions» (рис. 2.2). Схема и фото проведения эксперимента показана на рис. 2.3.



Рисунок 2.1 – Большие соляные образцы кубической формы

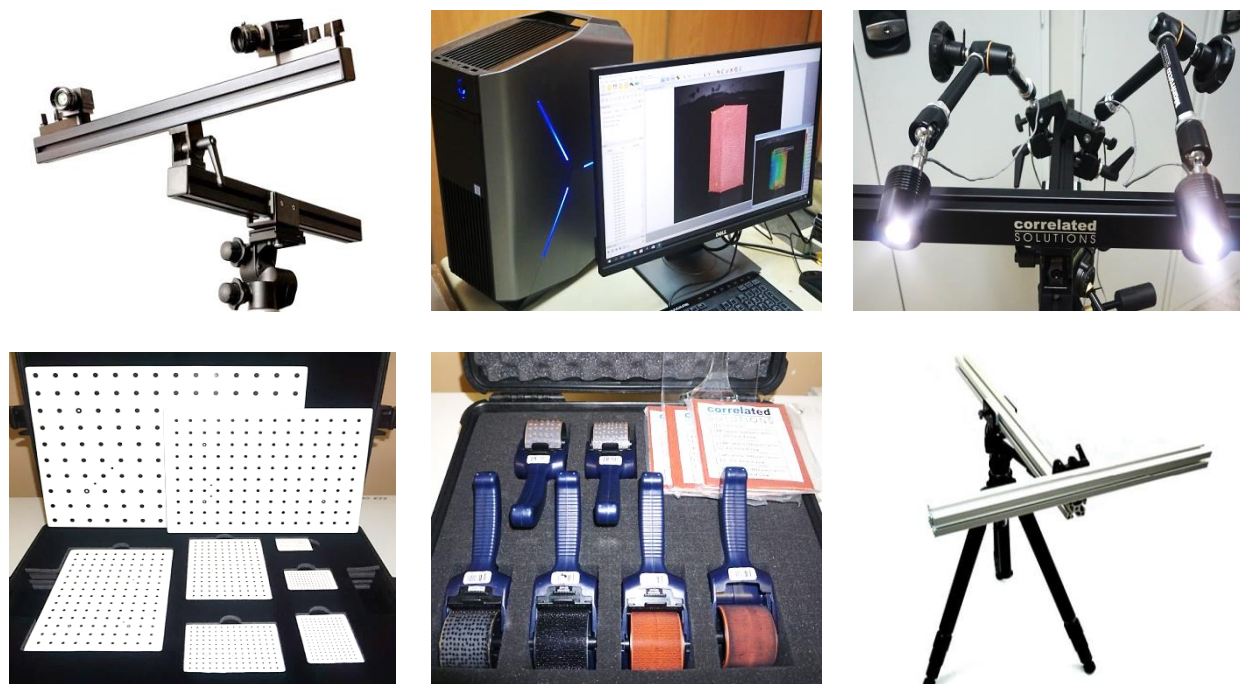


Рисунок 2.2 – Бесконтактная трёхмерная цифровая оптическая система Vic-3D (комплект камер, специализированное ПО, система подсветки образца, калибровочные таблицы, набор трафаретов, штатив с трёхкоординатной головкой)

Горизонтальные смещения марок, закреплённых на боковой грани кубического образца (точки 2-4), измерялись относительно центрального репера на глубине 15 см (точка 1) (рис. 2.3). Это позволило контролировать развитие процесса трещинообразования по ширине образца. Абсолютная продольная деформация образца определялась смещением точки 0 относительно точки 5.

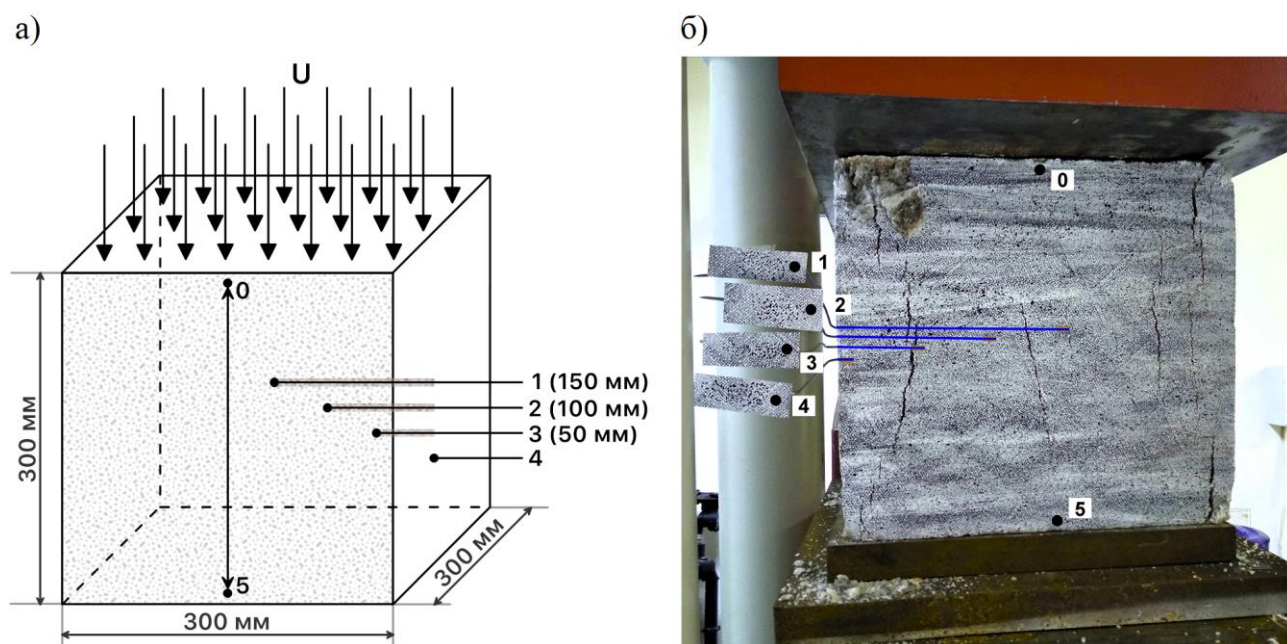


Рисунок 2.3 – Схема эксперимента с определением перемещения реперных марок (а) и характер разрушения образца в процессе нагружения (б)

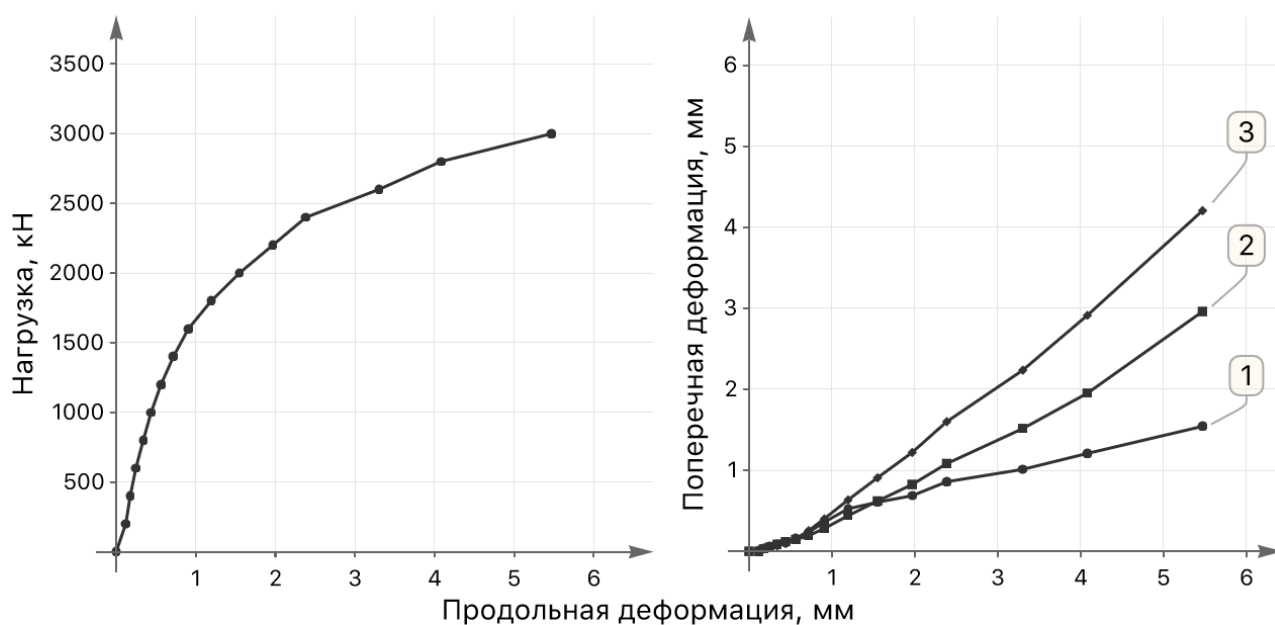


Рисунок 2.4 – Усреднённые диаграммы нагружения соляного образца и зависимости его поперечных деформаций от продольных на различном удалении от боковой грани: 1 — 10 см; 2 — 5 см; 3 — контур (0 см)

По результатам испытаний крупномасштабных образцов построены диаграммы их нагружения и зависимости поперечных перемещений от продольных на различных расстояниях от боковых граней образца (рис. 2.4). Данная информация представляет экспериментальную основу для настройки математической модели разрушения соляного образца.

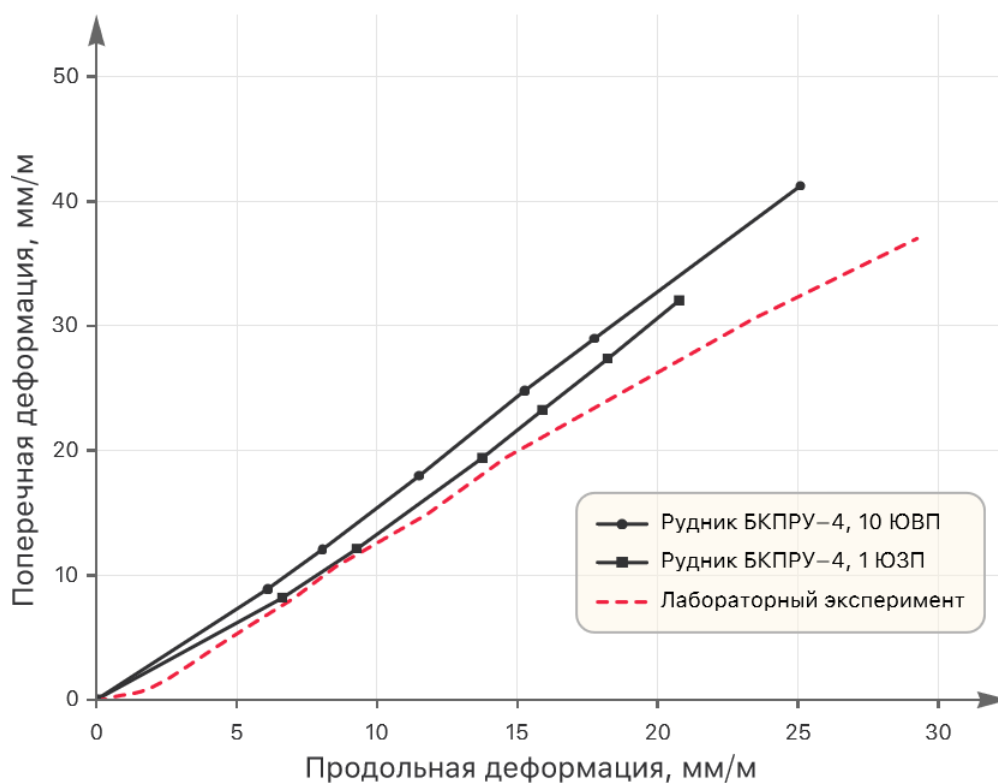


Рисунок 2.5 – Соотношение продольных и поперечных деформаций при испытании образцов больших размеров и натурных измерений деформаций междокамерных целиков

На рис. 2.5 показано соотношение продольных и поперечных деформаций образца, полученное при лабораторных исследованиях. Эти результаты хорошо согласуются с данными натурных измерений деформаций междокамерных целиков, выполненных на замерных станциях, оснащённых системой контурных и глубинных реперов [112]. При этом отношение поперечных деформаций целика к продольным составляет [113]

$$\mu_{\text{ц}} = \frac{\varepsilon_{\text{гор}}}{\varepsilon_{\text{верт}}} \approx 1.6, \quad (2.1)$$

где относительные деформации целиков (относительно их ширины b и высоты m) записываются как

$$\varepsilon_{\text{гор}} = \frac{U}{b}, \quad \varepsilon_{\text{верт}} = \frac{V}{m}, \quad (2.2)$$

а U есть горизонтальная конвергенция очистных камер и V – вертикальная (продольная) деформация МКЦ. Приведённое соответствие является косвенным свидетельством адекватности деформационных процессов, протекающих в образце и целике, в условиях одноосного сжатия.

2.2 Упругопластическая модель

Математическое описание процесса деформирования крупных соляных образцов кубической формы основывалось на изотропной упругопластической модели среды [114]. Упругое деформирование описывалось линейным законом Гука. Пластичность среды определялась функцией текучести

$$\Phi(\sigma, \kappa, \mathbf{A})$$

и потенциалом пластического течения

$$\Psi(\sigma, \kappa, \mathbf{A}).$$

В общем случае аргументами функций являются: тензор напряжений – σ , параметр изотропного упрочения – κ , а также набор переменных внутреннего состояния и констант материала – $\mathbf{A}$. Поверхность текучести определяется как

$$\Phi = 0. \quad (2.3)$$

Развитие пластических деформаций описывалось уравнением [73]

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad (2.4)$$

где ε^p и $\dot{\lambda}$ тензор пластических деформаций и пластический множитель, соответственно. При ассоциированном законе пластического течения функции текучести и пластический потенциал тождественны

$$\Psi \equiv \Phi \quad (2.5)$$

и выполняется принцип нормальности (условие Куна-Такера) [114]. В случае идеальной пластичности материала поверхность (2.3) не меняет своей формы. Соответственно аргументами функции (2.3) остаются только тензор напряжений и набор материальных констант:

$$\Phi(\sigma, \mathbf{A}) = 0. \quad (2.6)$$

Имплементация изотропного упрочнения подразумевала безразмерный подход (деформационное упрочнение) [73], при котором изменение параметра κ зависит от изменения накопленной пластической деформации:

$$\dot{\kappa} = \|\dot{\varepsilon}^p\|, \quad (2.7)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. В накоплении учитывались только сжимающие пластические деформации. Предполагалось, что пластическое растяжение материала не даёт никакого дополнительного отклика. Так изменение параметра изотропного упрочнения записывается:

$$\dot{\kappa} = \|\dot{\varepsilon}_-^p\|, \quad (2.8)$$

где знак минуса в нижнем индексе указывает на отрицательную (сжимающую) часть тензора скорости пластических деформаций. Положительные компоненты зануляются. Изотропное изменение поверхности текучести реализовывалось за счёт изменения внутреннего состояния материала. Другими словами, набор параметров и констант материала есть функция $\mathbf{A}(\kappa)$, а следовательно, $\mathbf{A}(\varepsilon^p)$. Таким образом уравнение поверхности текучести (2.3) принимает вид:

$$\Phi(\sigma, \mathbf{A}(\varepsilon^p)) = 0. \quad (2.9)$$

Некоторые критерии разрушения/пластичности имеют плоское представление предельной поверхности (например Треска, Кулон-Мор), поскольку предполагается, что средняя компонента главных напряжений не вносит никакого вклада в разрушение материала. В этом случае представление таких предельных поверхностей выполняется с помощью многогранной формы их записи в пространстве главных напряжений [114]

$$\bigcup_{i=1}^6 \{ \sigma \mid \Phi_i(\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \mathbf{A}) = 0, \forall j \neq i, \Phi_j(\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \mathbf{A}) \leq 0 \}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что в таком случае в местах пересечения предельных поверхностей функции Φ и Ψ теряют свою непрерывную дифференцируемость в рамках общей поверхности текучести и однозначно определить направление пластического течения невозможно. Для таких своего рода сингулярностей развитие пластических

деформаций представлялось в виде линейной комбинации (обобщения Койтера) [115,116]:

$$\dot{\varepsilon}^p = \sum_i \dot{\lambda}_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.11)$$

где m – количество предельных поверхностей, встречающихся на вершине/ребре общей поверхности текучести.

Численное интегрирование пластических определяющих соотношений выполнялось по алгоритму обратного отображения, в частности его реализации в виде алгоритма (касательной) секущей плоскости (tangent cutting plane/ТСП) [114,115]. Суть его заключается в линеаризации уравнения поверхности (2.9) около текущего напряжённого состояния $\{\sigma^k, \mathbf{A}^k\}$:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma^k, \mathbf{A}^k) + \bar{\mathbf{N}}^k : \Delta \sigma + \bar{\mathbf{K}}^k * \Delta \mathbf{A} &= 0, \\ \bar{\mathbf{N}}^k &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right|_{\sigma^k, \mathbf{A}^k}, \quad \bar{\mathbf{K}}^k = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} \right|_{\sigma^k, \mathbf{A}^k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где двоеточие обозначает двойное скалярное произведение тензоров, k – номер итерации алгоритма секущей плоскости, $\Delta(\cdot)$ – инкремент величины, и $*$ – произведение соответствующего типа. Используя явную схему Эйлера для записи инкрементов алгоритма обратного отображения

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \sigma^{k+1} - \sigma^k = -\Delta \lambda \mathbf{D}^k : \mathbf{N}^k, \\ \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{k+1} - \mathbf{A}^k = \Delta \lambda \mathbf{H}^k * \mathbf{K}^k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и подставляя их в (2.12), получаем выражение для инкремента пластического множителя в закрытой форме в пределах одной итерации ТСП алгоритма:

$$\Delta \lambda = \frac{\Phi^k}{\bar{\mathbf{N}}^k : \mathbf{D}^k : \mathbf{N}^k - \bar{\mathbf{K}}^k * \mathbf{H}^k * \mathbf{K}^k}. \quad (2.14)$$

В общем случае $\mathbf{D}$ обозначает касательный тензор жёсткости четвёртого ранга (в данном случае $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^e = \text{const}$, поскольку задействован линейный закон Гука для описания упругого деформирования материала), $\mathbf{H}$ – обобщённый модуль упрочнения, $\mathbf{N} \equiv \partial \Psi / \partial \sigma$ – направление пластических деформаций, $\mathbf{K}$ – обобщение параметра изотропного упрочнения κ . Для случая ассоциированного пластического

течения $\bar{N}$ и N совпадают. Подстановка (2.14) в (2.13) позволяет определить новое напряжённое состояние $\{\sigma^{k+1}, \mathbf{A}^{k+1}\}$. Запуская алгоритм обратного отображения с пробного решения при $k = 0$

$$\{\sigma^0, \mathbf{A}^0\} = \{\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A}^{\text{trial}}\}, \quad (2.15)$$

итерационный процесс продолжается до выполнения условия сходимости

$$\Phi(\sigma^k, \mathbf{A}^k) \leq \text{YTOL}, \quad (2.16)$$

где YTOL заданное близкое к нулю положительное значение (отклонение от поверхности текучести). Заметим, что для линейных поверхностей текучести алгоритм ТСП сходится за одну итерацию. Многогранное представление предельной поверхности (2.10) и соответствующего направления пластического деформирования в виде (2.11), приводит к решению системы из m уравнений (2.12) относительно $\{\Delta\lambda_i, i = \overline{1, m}\}$ в пределах одной итерации алгоритма секущей плоскости.

Для удобного применения алгоритма обратного отображения использовалось спектральное разложение симметричного тензора напряжений [114]

$$\sigma = \sum_{j=1}^p \sigma_j \mathbf{E}_j, \quad (2.17)$$

где σ_j есть главные напряжения (собственные значения), $\mathbf{E}_j$ – соответствующие проекции на собственные пространства, и p – количество отличных друг от друга собственных значений. Для трёхмерного случая спектральное разложение симметричного тензора вычисляется по следующим формулам. Так собственные значения σ_j определяются через главные инварианты симметричного тензора второго ранга:

$$\sigma_{1,2,3} = \frac{I_1}{3} - 2\sqrt{Q} \cos \theta_{1,2,3}, \quad \theta_{1,2,3} = \left\{ \frac{\theta}{3}, \frac{\theta + 2\pi}{3}, \frac{\theta - 2\pi}{3} \right\}, \quad (2.18)$$

где

$$Q = \frac{I_1^2 - 3I_2}{9}, \quad \theta = \arccos \frac{R}{\sqrt{Q^3}}, \quad R = \frac{-2I_1^2 + 9I_1 I_2 - 27I_3}{54}, \quad (2.18a)$$

и главные инварианты тензора напряжений

$$I_1 = \text{tr } \sigma, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\sigma)^2 + \text{tr}(\sigma^2) \right], \quad I_3 = \det \sigma. \quad (2.186)$$

Проекции на собственные пространства вычисляются по-разному в зависимости от количества отличных друг от друга собственных значений (число p). Так если $p = 3$, т.е. $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, тогда

$$\mathbf{E}_j = \frac{\sigma_j}{2\sigma_j - I_2 \sigma_j^2 + I_3} \left[\sigma^2 - (I_1 - \sigma_j) \sigma + \frac{I_3}{\sigma_j} \mathbf{I} \right], \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Если $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ($p = 2$), тогда вычисляется $\mathbf{E}_1$ из формулы (2.19) и

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{E}_1. \quad (2.20)$$

Для $p = 1$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}. \quad (2.21)$$

Численная реализация описанной выше математической модели осуществлялась методом конечных элементов в перемещениях. В качестве элементов дискретизации области решения применялись 8-узловые трёхмерные изопараметрические элементы гексаэдрической формы с восемью точками интегрирования [73]. Область решения ($300 \times 300 \times 300$ мм) разбивалась на кубические элементы со стороной 10 мм.

По мере построения конечно-элементного решения необходимо численно вычислять объёмный интеграл в пределах каждого элемента. Для этого использовалась квадратура Гаусса-Лежандра [73], согласно которой интеграл трёхмерной функции заменяется тройной суммой произведения значения этой функции в определённых точках и соответствующих этим точкам весовых коэффициентов:

$$\int_{\Omega_e} f(x_1, x_2, x_3) d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n J(\xi_i^1, \xi_j^2, \xi_k^3) f(\xi_i^1, \xi_j^2, \xi_k^3) w_i w_j w_k. \quad (2.22)$$

Также под знак суммы добавляется множитель – значение определителя Якобиана преобразования системных координат в локальные координаты элемента.

Локальные координаты точек интегрирования и соответствующие им весовые коэффициенты могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\xi_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{3}}, \quad w_i = 1, \quad i = \overline{1,2}. \quad (2.23)$$

Граничные условия определялись в соответствии с выполненными экспериментальными исследованиями (рис. 2.3). На нижней грани кубического образца вертикальные перемещения принимались равными нулю. На верхней и нижней гранях ограничивались горизонтальные перемещения (соблюдалось условие полного сцепления образца с плитами прессы). На верхней грани задавались вертикальные смещения, соответствующие условиям нагружения образца.

Решение системы конечно-элементных упругопластических уравнений проводилось по модифицированной схеме Ньютона-Рафсона (Н-Р) с постоянной матрицей жёсткости [73].

Калибровка математической модели по результатам физических экспериментов производилась в два этапа. Сначала на стадии упругого деформирования (примерно до 1200 кН, рис. 2.4,а) подбирался соответствующий модуль продольной упругости (модуль Юнга). Затем, при нагрузках более 1200 кН путём вариации внутренних параметров материала $\mathbf{A}$ и модуля упрочнения $\mathbf{H}$ описывался переход от упругого режима деформирования к пластическому.

В качестве критериев пластичности были рассмотрены такие классические критерии прочности как Треска и Кулон-Мора [73,108,114,115]. Также был рассмотрен параболический аналог критерия Кулона-Мора в виде параболической огибающей кругов Мора [109] при совместном действии критерия Рэнкина (первая теория прочности/теория наибольших нормальных напряжений) [115,117], ограничивающего растягивающие напряжения. В дополнение ко всему параболический объёмный критерий прочности горных пород [118], имеющий непрерывную форму записи относительно тензора напряжений, сравнивался с остальными критериями пластичности.

2.3 Критерии пластичности

Критерий Треска

Критерий прочности Треска [73,114,115] преимущественно используется для описания пластического деформирования металлов и, априори, не подходит для горных пород. Здесь он анализируется в сравнительных целях.

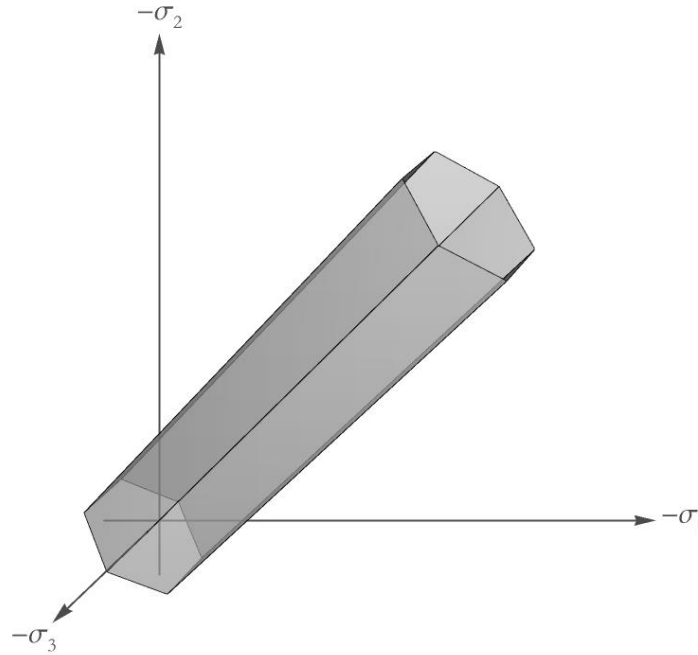


Рисунок 2.6 – Поверхность текучести Треска

В пространстве главных напряжений критерий Треска имеет вид:

$$\tau_y = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad (2.24)$$

где $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ соответственно максимальное и минимальное главные напряжения, τ_y – предельное напряжение сдвига. Растягивающие напряжения здесь и далее принимались положительными. Из выражения (2.24) также можно получить функцию текучести:

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} - \sigma_y, \quad (2.25)$$

где $\sigma_y = 2\tau_y$ – предельное одноосное напряжение. Множество Λ здесь состоит из единственного параметра σ_y , который обозначает предел прочности материала. В нашем случае в качестве предела прочности подразумевался предел на одноосное

сжатие σ_c . Поверхность текучести Треска изображена на рис. 2.6. Многогранное представление имеет вид:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c, & \Phi_4(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_c, \\ \Phi_2(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_c, & \Phi_5(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_c, \\ \Phi_3(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_c, & \Phi_6(\sigma, \sigma_c) &= \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_c.\end{aligned}\quad (2.26)$$

С помощью спектрального разложения (2.17) удобно рассматривать секстант $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Таким образом в алгоритме обратного отображения можно использовать только три поверхности из (2.26) — Φ_1, Φ_2, Φ_6 . В случае проецирования на ребро предельной поверхности выбор целевого ребра ($\Phi_{1\wedge 2}$ или $\Phi_{1\wedge 6}$) выполнялся с помощью подхода, предложенного в [114], где проверяется проекция пробного тензора напряжений на тензор ортогонального девиаторной проекции тензора пластических деформаций. В зависимости от знака проекции выбирается то или иное ребро поверхности текучести. Пластическое течение принято ассоциированным. Соответствующие параметры ТСП алгоритма в пространстве главных напряжений:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1^T &= N_1^T = (1, 0, -1), \\ \bar{N}_2^T &= N_2^T = (0, 1, -1), \\ \bar{N}_6^T &= N_6^T = (1, -1, 0).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Поскольку набор $\mathbf{A}$ для критерия Треска состоит только из одного элемента — σ_c , то упрочнение в этом случае реализуется за счёт его изменения. Для максимального упрощения такая зависимость принята линейной

$$\mathbf{A}(\varepsilon^p) = \sigma_c(\varepsilon^p) = \sigma_{c,0} + h\varepsilon^p, \quad (2.28)$$

где $\sigma_{c,0}$ — начальное значение предела на одноосное сжатие, а h — модуль упрочнения. Таким образом, параметры ТСП алгоритма, связанные с упрочнением, принимают вид:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= -1, \\ \mathbf{H} &= h, \\ \mathbf{K} &= \|\mathbf{N}_-\|.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Результаты численного моделирования процесса нагружения соляного образца, основанные на использовании критерия пластичности Треска показаны на

рис. 2.7. Подобранные механические параметры соляного образца и параметры критерия указаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Параметры модели соляного образца
(ассоциированный критерий Треска)**

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Прочность на сжатие, МПа	Модуль упрочнения, ГПа
6.7	0.3	22	0.6

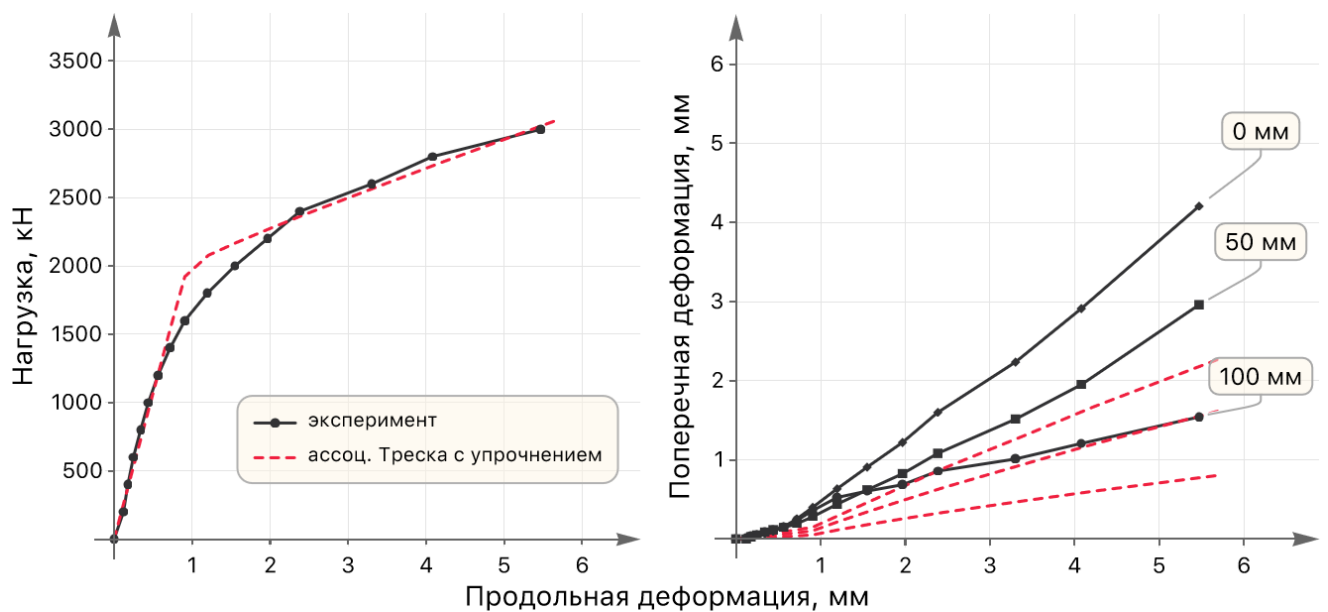


Рисунок 2.7 – Результаты моделирования (ассоциированный критерий Треска с упрочнением)

Из рисунков видно, что модельная кривая нагружения приемлемо согласуется с экспериментальной на этапе упругого деформирования образца, а также на пластическом, начиная с уровня нагрузки примерно 2000-2100 кН. Как и ожидалось, распределение поперечных деформаций по ширине кубического образца не соответствуют экспериментальным величинам. Ассоциированное пластическое течение по критерию Треска даёт недостаточные поперечные деформации. Это объясняется тем, что критерий Треска не зависит от уровня гидростатического напряжения и пластическое течение происходит только в девиаторной плоскости. Объёмная пластическая деформация в этом случае равна нулю.

Критерий прочности Кулона-Мора

Классический критерий прочности Кулона-Мора [108,114,115] часто используется для описания механического поведения грунтов, горных пород и бетона. В отличие от Треска критерий Мора-Кулона является чувствительным к гидростатическому давлению. В осях Мора критерий представляется в виде линейной зависимости

$$\tau_y = c - \sigma_n \tan \phi. \quad (2.30)$$

В выражении (2.28) τ_y – предельное касательное напряжение, c – коэффициент сцепления, ϕ – угол внутреннего трения, и σ_n – нормальное напряжение, положительное значение которого указывает на растяжение. Соответствующая функция текучести в пространстве главных напряжений имеет вид:

$$\Phi(\sigma, \{c, \phi\}) = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi - 2c \cos \phi. \quad (2.31)$$

Аналогично критерию Треска предельная поверхность Кулона-Мора представляется в многогранном виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_2(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_3(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_4(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_5(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_3 - \sigma_2 + (\sigma_3 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_6(\sigma, \{c, \phi\}) &= \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Множество параметров $\mathbf{A}$ содержит два параметра $\{c, \phi\}$. Поверхность текучести в пространстве главных напряжений проиллюстрирована на рис. 2.8.

Для численного моделирования процесса нагружения кубического соляного образца пластическое течение деформаций принималось ассоциированным, а материал идеально-пластичным. Соответствующие параметры ТСП алгоритма в главных напряжениях:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1^T &= N_1^T = (1 + \sin \varphi, 0, -1 + \sin \varphi), \\
\bar{N}_2^T &= N_2^T = (0, 1 + \sin \varphi, -1 + \sin \varphi), \\
\bar{N}_6^T &= N_6^T = (1 + \sin \varphi, -1 + \sin \varphi, 0).
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

Отметим, что объёмные пластические деформации при этом положительны, т.е. материал характеризуется склонностью к дилатансии. Все связанные с упрочнением параметры ТСП алгоритма отсутствуют.

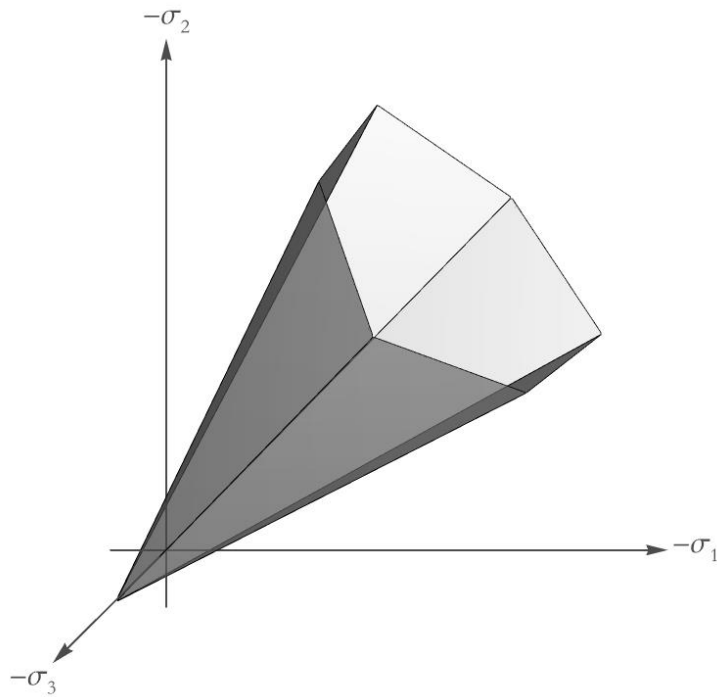


Рисунок 2.8 – Поверхность текучести Кулона-Мора

Результаты численного моделирования процесса нагружения кубического соляного образца представлены на рис. 2.9. Соответствующие механические параметры соляного образца и критерия пластичности Кулона-Мора указаны в табл. 2.2.

Как видно, модельная кривая идеально-пластического деформирования достаточно точно описывает все стадии экспериментальной диаграммы нагружения. Вместе с тем, расчётные поперечные деформации кубического образца являются избыточными по отношению к результатам эксперимента. Такое поведение материала часто встречается при использовании ассоциированного пластического течения для критерия Кулона-Мора [73,114].

Таблица 2.2

**Параметры модели соляного образца
(ассоциированный критерий Мора-Кулона)**

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.
6.7	0.3	4.5	30

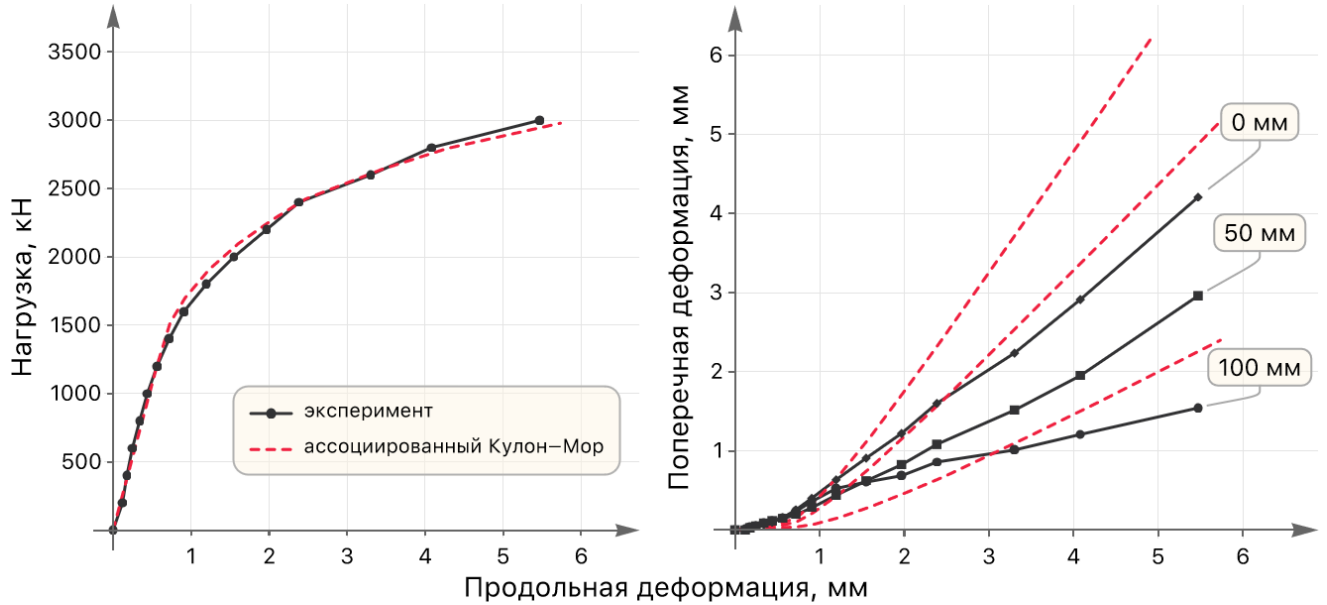


Рисунок 2.9 –Результаты моделирования (ассоциированный критерий Кулона-Мора)

Данная проблема решается путём принятия неассоциированного закона пластического течения, который заключается во введении дополнительного параметра – угла дилатансии $\psi \leq \phi$. Другими словами, в функции пластического потенциала угол внутреннего трения заменяется на угол дилатансии:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma, A) &= \Phi(\sigma, \{c, \phi\}), \\ \Psi(\sigma, A) &= \Phi(\sigma, \{c, \psi\}).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Таким образом, $\bar{N} \neq N$:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1^T &= (1 + \sin \phi, 0, -1 + \sin \phi), & N_1^T &= (1 + \sin \psi, 0, -1 + \sin \psi), \\ \bar{N}_2^T &= (0, 1 + \sin \phi, -1 + \sin \phi), & N_2^T &= (0, 1 + \sin \psi, -1 + \sin \psi), \\ \bar{N}_6^T &= (1 + \sin \phi, -1 + \sin \phi, 0), & N_6^T &= (1 + \sin \psi, -1 + \sin \psi, 0).\end{aligned}\tag{2.35}$$

За счёт варьирования угла ψ регулируется уровень дилатансии материала. Предельный случай, когда $\psi = 0$, означает отсутствие дилатансии, что соответствует пластическому течению Треска.

Таблица 2.3

**Параметры модели соляного образца
(неассоциированный критерий Кулона-Мора)**

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.
6.7	0.3	4	35	18

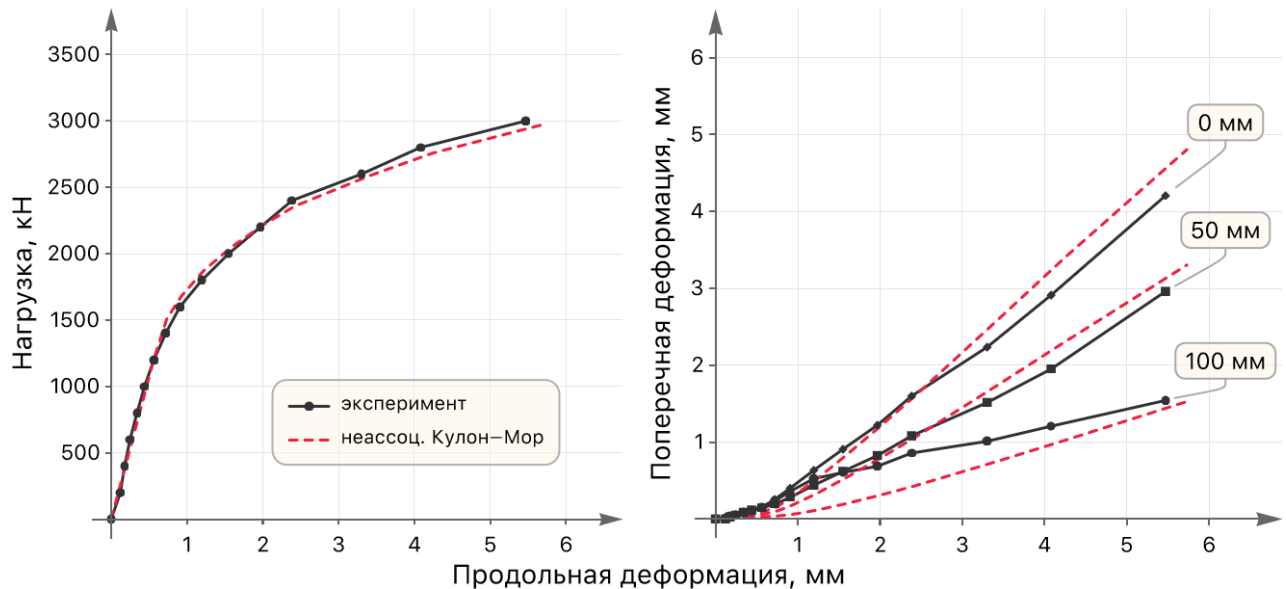


Рисунок 2.10 – Результаты моделирования (неассоциированный критерий Кулона-Мора)

Результаты численного моделирования нагружения кубического образца при неассоциированном критерии Кулона-Мора представлены на рис. 2.10. Полученные путём подбора параметры модели указаны в табл. 2.3. Из рисунков видно, что модельная и экспериментальная кривые практически совпадают. Характер развития поперечных деформаций кубического образца качественно соответствует эксперименту.

Параболическая огибающая кругов Мора

В последнее время популярностью пользуются так называемые параболические критерии разрушения. Их существует значительное количество [106,107]. Сложность их использования заключается в их параметрическом обеспечении. Одним из часто используемых параболических критериев для составления паспортов прочности различных горных пород, в том числе и солей,

является критерий в виде параболической огибающей кругов Мора [109]. Он предполагает, что при одноосных сжатии и растяжении круги Мора касательны к огибающей. В этой связи критерий имеет следующий вид в координатах Мора:

$$p\tau_y^2 = q - \sigma_n, \quad (2.36)$$

где коэффициенты параболы записываются как

$$p = \frac{1}{r^2 \sigma_t} \left(1 + \sqrt{1+r}\right)^2, \quad q = \sigma_t, \quad r = \frac{\sigma_c}{\sigma_t}. \quad (2.37)$$

Параметрами параболического критерия являются пределы на одноосное сжатие и растяжение — σ_c и σ_t . Растягивающие напряжения имеют положительный знак. Соответствующая функция текучести в осях главных напряжений может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \Phi^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) &= (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^2 - P(\sigma_c, \sigma_t)(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) - Q(\sigma_c, \sigma_t), \\ P(\sigma_c, \sigma_t) &= -\frac{2}{p}, \\ Q(\sigma_c, \sigma_t) &= -\frac{1}{p^2} + 4\frac{q}{p}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Многогранное представление критерия (2.38) имеет три составляющие:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - P(\sigma_c, \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) - Q(\sigma_c, \sigma_t), \\ \Phi_2^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) &= (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - P(\sigma_c, \sigma_t)(\sigma_2 + \sigma_3) - Q(\sigma_c, \sigma_t), \\ \Phi_3^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - P(\sigma_c, \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2) - Q(\sigma_c, \sigma_t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

поскольку в отличие от линейных поверхностей текучести (2.25), (2.31), описанных ранее, для параболических критериев имеют место следующие тождества

$$\begin{aligned} \Phi_1^{Parabolic} &\equiv \Phi_4^{Parabolic}, \\ \Phi_2^{Parabolic} &\equiv \Phi_5^{Parabolic}, \\ \Phi_3^{Parabolic} &\equiv \Phi_6^{Parabolic}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Параболический критерий (2.38) имеет один характерный недостаток. При отсутствии напряжений критерий указывает на пластический режим деформирования материала. Это следует из рис. 2.11 (чёрная сплошная линия).

Внутренняя область параболы не включает в себя начало координат пространства главных напряжений. Более наглядно это видно в предельном случае

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_t \rightarrow 0} \Phi^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) = \\ = \Phi^{NP}(\sigma, \sigma_c) = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^2 - 2\sigma_c(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) + \sigma_c^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

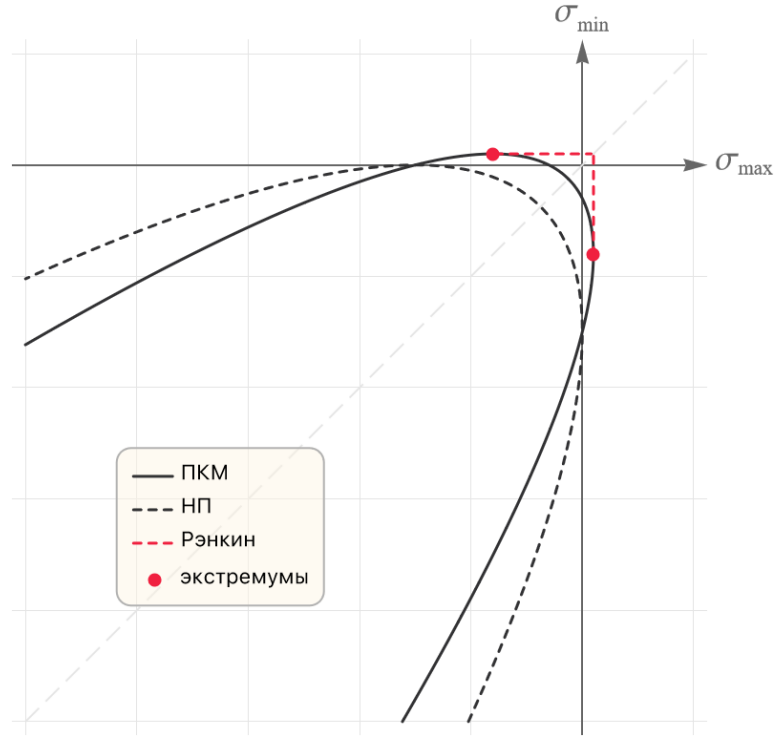


Рисунок 2.11 – Параболическая огибающая кругов Мора (чёрная сплошная линия), нормальный параболический критерий (чёрная штриховая линия), дополнительный критерий Рэнкина (красная штриховая линия) и предельные значения (красные точки) в осях главных напряжений

Критерий (2.41) также известен как нормальный параболический критерий [107,109] (чёрная штриховая линия на рис. 2.11). Отсюда следует, что за предельными значениями главных напряжений (красные точки на рис. 2.11)

$$\sigma_{\max}, \sigma_{\min} > \frac{1}{2}P(\sigma_c, \sigma_t) + \sigma_t \quad (2.42)$$

критерий в виде параболической огибающей кругов Мора не имеет никакого физического смысла.

В этой связи поверхность текучести (2.38) можно дополнить «срезами» каждой оси главных напряжений по предельному значению на одноосное растяжение σ_t . Такой приём часто используется в практике [106]. Условие,

ограничивающее растягивающие напряжения, известно как критерий Рэнкина [115,117], функция текучести для которого записывается как

$$\Phi^R(\sigma, \sigma_t) = \sigma_{\max} - \sigma_t. \quad (2.43)$$

Соответствующее многогранное представление имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1^R(\sigma, \sigma_t) &= \sigma_1 - \sigma_t, \\ \Phi_2^R(\sigma, \sigma_t) &= \sigma_2 - \sigma_t, \\ \Phi_3^R(\sigma, \sigma_t) &= \sigma_3 - \sigma_t. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Набор параметров **A** содержит один параметр σ_t .

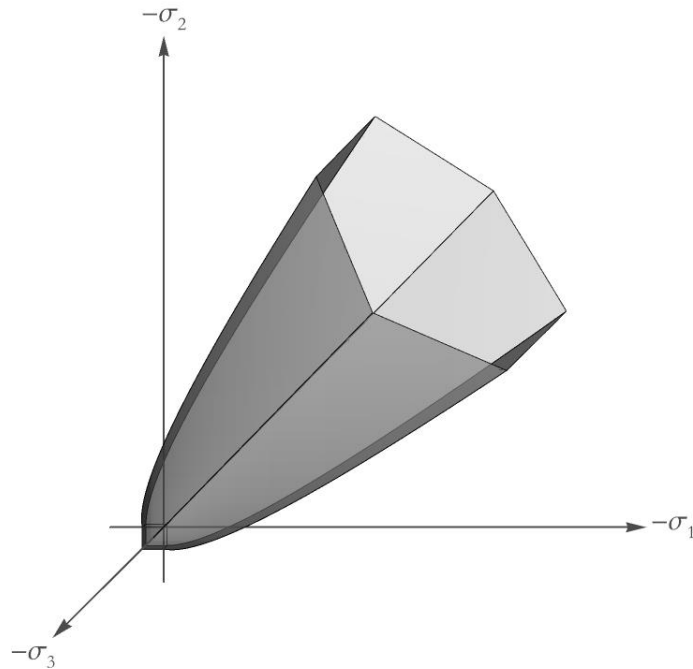


Рисунок 2.12 – Поверхность текучести ПКМ/Р

Объединяя вышеописанное, общая поверхность текучести «Параболическая огибающая кругов Мора/Рэнкин» (ПКМ/Р) записывается в виде кусочной функции для секстанта $\sigma_{\max} \geq \sigma_{\text{mid}} \geq \sigma_{\min}$:

$$\Phi^{PMC/R}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) = \begin{cases} \Phi^{PMC}(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}), & \sigma_{\min} \leq \frac{1}{2}P(\sigma_c, \sigma_t) + \sigma_t, \\ \Phi^R(\sigma, \sigma_t), & \sigma_{\min} > \frac{1}{2}P(\sigma_c, \sigma_t) + \sigma_t, \end{cases} \quad (2.45)$$

где параболический критерий (2.38) описывает режим «сжатие-сжатие» напряжённо-деформированного состояния (НДС) материала и частично

«растяжение-сжатие», а критерий Рэнкина (2.43) ограничивает растягивающие напряжения. Общая поверхность текучести (2.43) проиллюстрирована на рис. 2.12. Набор **A** для (2.45) содержит два параметра $\{\sigma_c, \sigma_t\}$.

Численный эксперимент по одноосному нагружению кубического соляного образца проводился с учётом ассоциированного течения пластических деформаций. Соответствующие параметры ТСП алгоритма в главных напряжениях для параболической огибающей кругов Мора:

$$\begin{aligned} (\bar{N}_1^{PMC})^T &= (N_1^{PMC})^T = (a_{1,3}, 0, b_{1,3}), \\ (\bar{N}_2^{PMC})^T &= (N_2^{PMC})^T = (0, a_{2,3}, b_{2,3}), \\ (\bar{N}_3^{PMC})^T &= (N_3^{PMC})^T = (a_{1,2}, b_{1,2}, 0), \\ a_{\max, \min} &= 2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - P(\sigma_c, \sigma_t), \\ b_{\max, \min} &= -2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - P(\sigma_c, \sigma_t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

И для критерия Рэнкина:

$$\begin{aligned} (\bar{N}_1^R)^T &= (N_1^R)^T = (1, 0, 0), \\ (\bar{N}_2^R)^T &= (N_2^R)^T = (0, 1, 0), \\ (\bar{N}_3^R)^T &= (N_3^R)^T = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Аналогично линейному критерию Мора-Кулона (2.31) здесь соляные породы также являются дилатантными. В расчётах учитывался эффект линейного изотропного упрочнения материала. Упрочнение реализовывалось за счёт изменения предела на одноосное сжатие σ_c подобно критерию Треска (2.25). Очевидно, что данный эффект работает только в области, где выполняется параболический критерий (2.38). Связанные с данным эффектом параметры ТСП алгоритма принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= -(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \frac{\partial P}{\partial \sigma_c} - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_c}, \\ H &= h, \\ K &= \|N_-^{PMC}\|. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Производные в выражении (2.48)₁ можно записать, используя цепное правило:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial \sigma_c} &= \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \sigma_c}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_c} &= \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \sigma_c}.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Частные производные здесь записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{2}{p^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{2 - 4pq}{p^3}, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{(1 + \sqrt{1+r})(r + 2[1 + \sqrt{1+r}])}{r^3 q \sqrt{1+r}}, \\ \frac{\partial r}{\partial \sigma_c} &= \frac{1}{q}.\end{aligned}\quad (2.50)$$

Результаты многовариантных численных экспериментов показаны на рис. 2.13. Полученные механические параметры соляного образца и параметры критерия пластичности указаны в табл. 2.4.

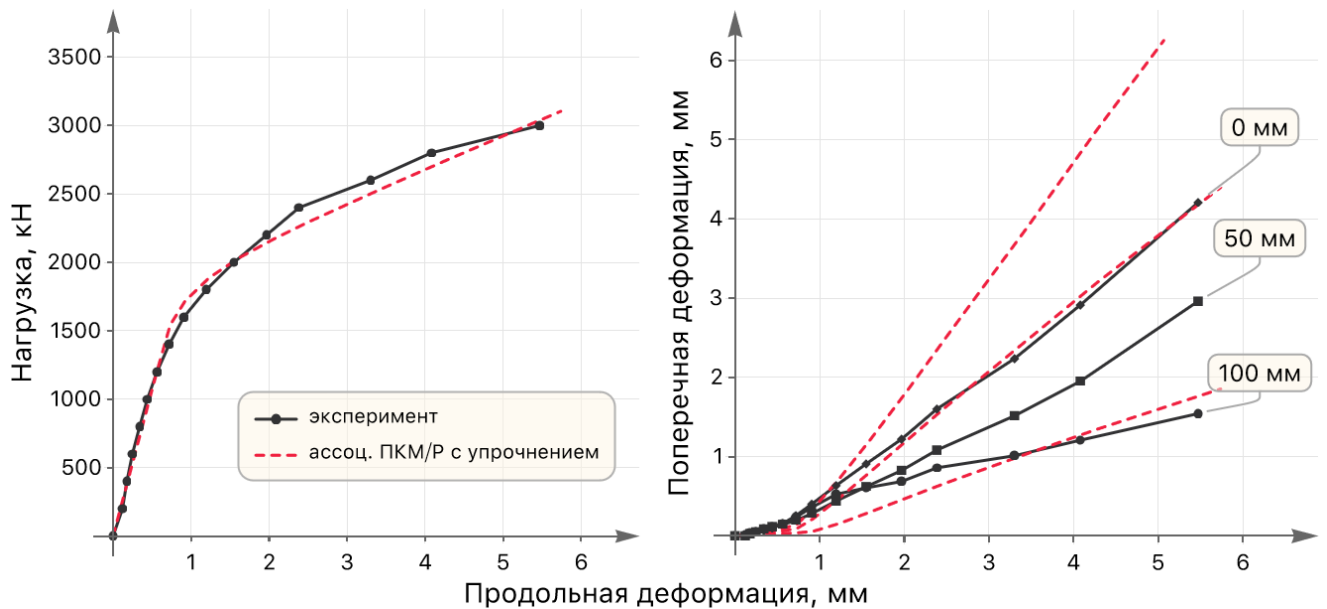


Рисунок 2.13 – Результаты моделирования (ассоциированный критерий ПКМ/Р)

Из рисунков видно, что кривые нагружения хорошо согласуются. Поперечные деформации кубического образца ровно как для линейного критерия Кулона-Мора избыточны. По сравнению с ним параболический критерий ПКМ/Р

даёт количественно ниже значения поперечных деформаций. Качественно картина распределения поперечных деформаций на различном удалении от центра образца совпадает с линейным критерием Кулона-Мора.

Таблица 2.4

**Параметры модели соляного образца
(ассоциированный критерий ПКМ/Р)**

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Прочность на сжатие, МПа	Прочность на растяжение, МПа	Модуль упрочнения, ГПа
6.7	0.3	16	1	0.23

Ограничение избытка поперечных деформаций путём принятия неассоциированного закона пластического течения для критерия ПКМ/Р не представляется возможным, поскольку это можно сделать только за счёт выбора значения предела прочности на сжатие ниже исходного, что не имеет физического смысла.

Объёмный критерий прочности горных пород [118]

Ещё один довольно интересный параболический критерий разрушения горных пород предложен в работе [118]. Критерий предполагает, что разрушение материала происходит за счёт сдвига и отрыва аналогично критериями Кулона-Мора и ПКМ/Р. Только в качестве характеристики сдвиговой прочности выступает интенсивность напряжений, а в качестве характеристики прочности отрыва – нормальные напряжения, описываемые шаровым тензором. Критерий прочности горных пород имеет вид:

$$\sigma_i^2 = b - aI(\sigma), \quad (2.51)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, $I(\sigma)$ – первый инвариант тензора напряжений, а коэффициенты a и b определяются из одноосных испытаний на сжатие и растяжение:

$$a = \sigma_c - \sigma_t, \quad b = \sigma_c \sigma_t. \quad (2.52)$$

Функция текучести в осях главных напряжений записывается как:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \{\sigma_c, \sigma_t\}) = \\ = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_c \sigma_t. \end{aligned} \quad (2.53)$$

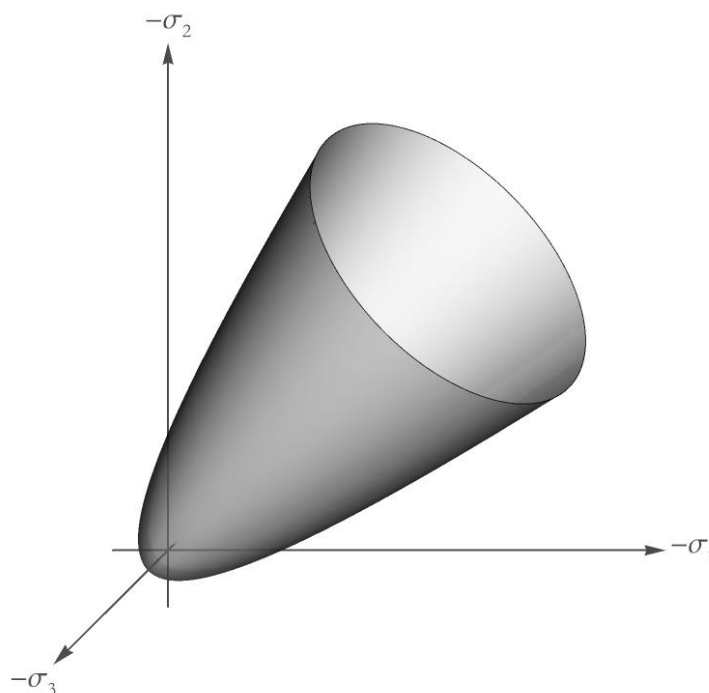


Рисунок 2.14 – Поверхность текучести критерия [118]

Критерий прочности (2.53) является объёмным, поскольку в него включено влияние средней компоненты напряжений. В многогранном представлении здесь нет необходимости. Поверхность текучести непрерывно дифференцируема. Набор параметров $\mathbf{A}$ для (2.53) также состоит из двух показателей $\{\sigma_c, \sigma_t\}$. Графическое представление предельной поверхности изображено на рис. 2.14. Поверхность текучести представляет собой параболоид вращения вокруг гидростатической оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

В отличие от параболического критерия ПКМ (2.36) критерий [118] (2.53) имеет физический смысл во всех режимах НДС, поскольку начало координат пространства главных напряжений входит во внутреннюю область поверхности текучести. Сравнение двух критериев показано на рис. 2.15 для условий плоско-деформированного состояния (ПДС). Адаптация критерия [118] для условий ПДС

производится путём замены средней компоненты главных напряжений выражением $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$, где ν – коэффициент Пуассона и $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_3 = \sigma_{\min}$. Предельная поверхность критерия [118] для условий ПДС имеет форму эллипса, размер которого зависит от коэффициента Пуассона. На рис. 2.15 представлены предельные поверхности критерия [118] для некоторых значений коэффициента ν . При значениях $\nu = [0.3, 0.4]$ поверхности текучести в наибольшем диапазоне главных напряжений являются подобными критерию ПКМ.

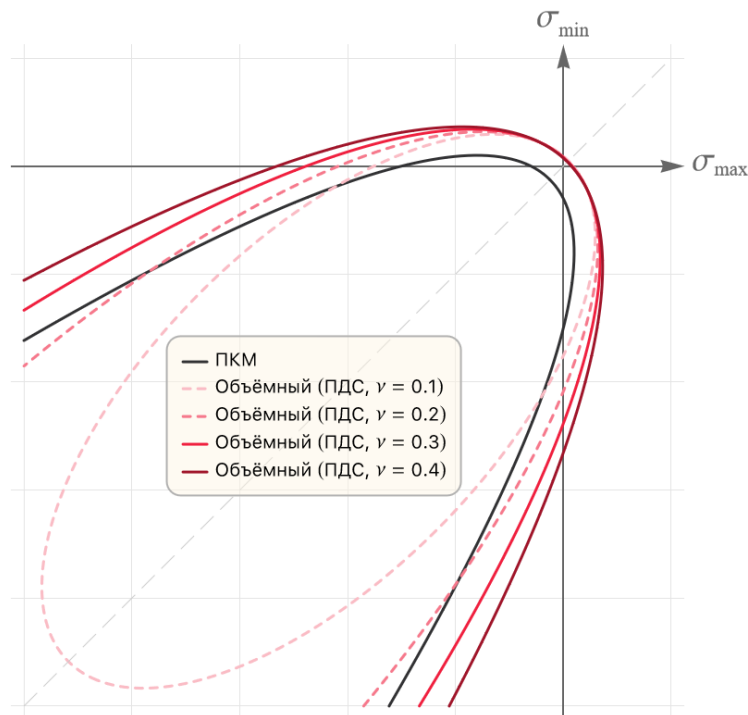


Рисунок 2.15 – Сравнение параболических критериев ПКМ и [118] для условий ПДС

Таблица 2.5

**Параметры модели соляного образца
(ассоциированный критерий [118])**

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Прочность на сжатие, МПа	Прочность на растяжение, МПа	Модуль упрочнения, ГПа
6.7	0.3	14	1	0.35

Численное моделирование процесса одноосного нагружения кубического соляного образца проводилось с учётом ассоциированного закона пластического

течения. Соответствующие параметры ТСП алгоритма в главных напряжениях для критерия [118] определяются выражением:

$$\bar{N} = N = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_c - \sigma_t \\ 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_c - \sigma_t \\ 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_c - \sigma_t \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Эффект увеличения объёма (дилатансии) образца в модели отражается. В качестве изотропного упрочнения материала принят линейный закон. Упрочнение реализовывалось за счёт изменения предела прочности при одноосном сжатии σ_c аналогично (2.28). Связанные с упрочнением параметры ТСП алгоритма принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_t, \\ H &= h, \\ K &= \|N_-\|. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Результаты многовариантного численного моделирования одноосного нагружения соляного образца кубической формы изображены на рис. 2.16. Расчётные параметры математической модели деформирования соляного образца, а также критерия разрушения, представлены в табл. 2.5.

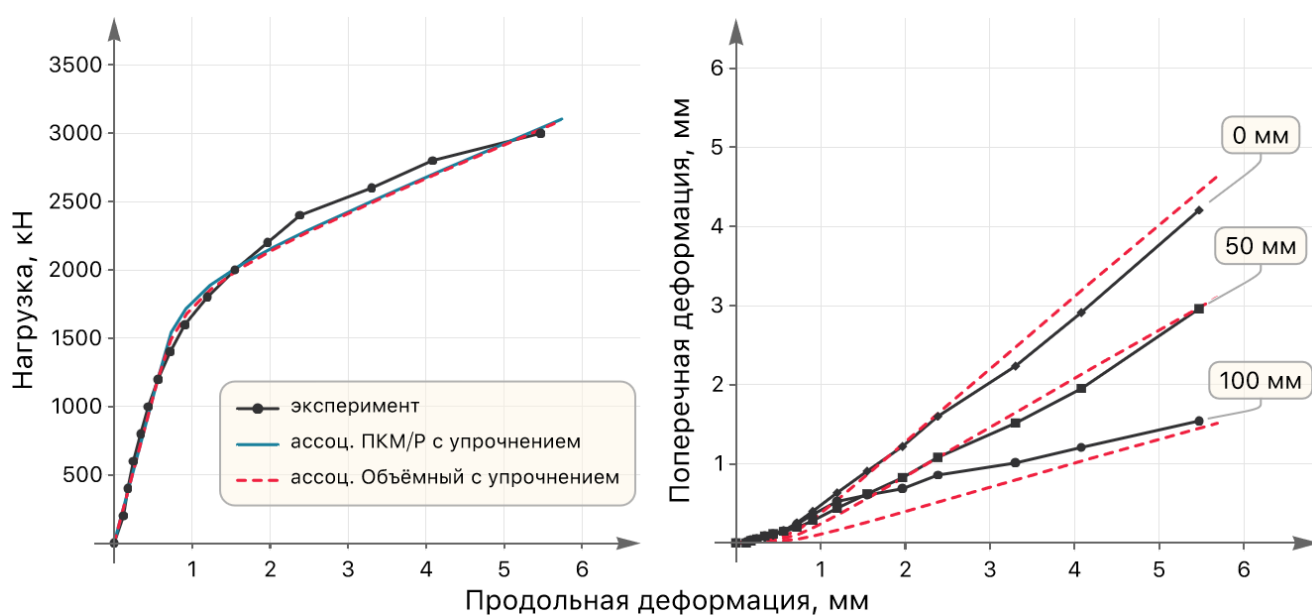


Рисунок 2.16 – Результаты моделирования (ассоциированный критерий [118] с упрочнением)

Немаловажной частью верификации численной модели также является проверка её на сходимость. Сходимость численного решения упругопластических задач проверялась следующим образом. В пределах каждого шага нагружения, которые соответствуют экспериментальным, шаг разделялся на заданное количество подшагов. Количество подшагов изменялось пропорционально степени двойки, т.е. сам шаг нагружения уменьшался в два раза. Затем находилось решение для каждого набора подшагов. Полученные численные решения сравнивались по норме

$$\|f\|_{h/2} = \max_x |f_h(x) - f_{h/2}(x)|, \quad (2.56)$$

где в качестве функции f анализировались нагрузка на верхней грани образца и его поперечные деформации на различном удалении от боковой грани. На рис. 2.17 проиллюстрированы диаграммы сходимости выбранных параметров по норме (2.56) для ассоциированного объёмного критерия. Из рисунков видно, что с увеличением количества подшагов (уменьшением шага нагружения) нормы нагрузки и поперечных деформаций уменьшаются. Таким образом, сходимость очевидна.

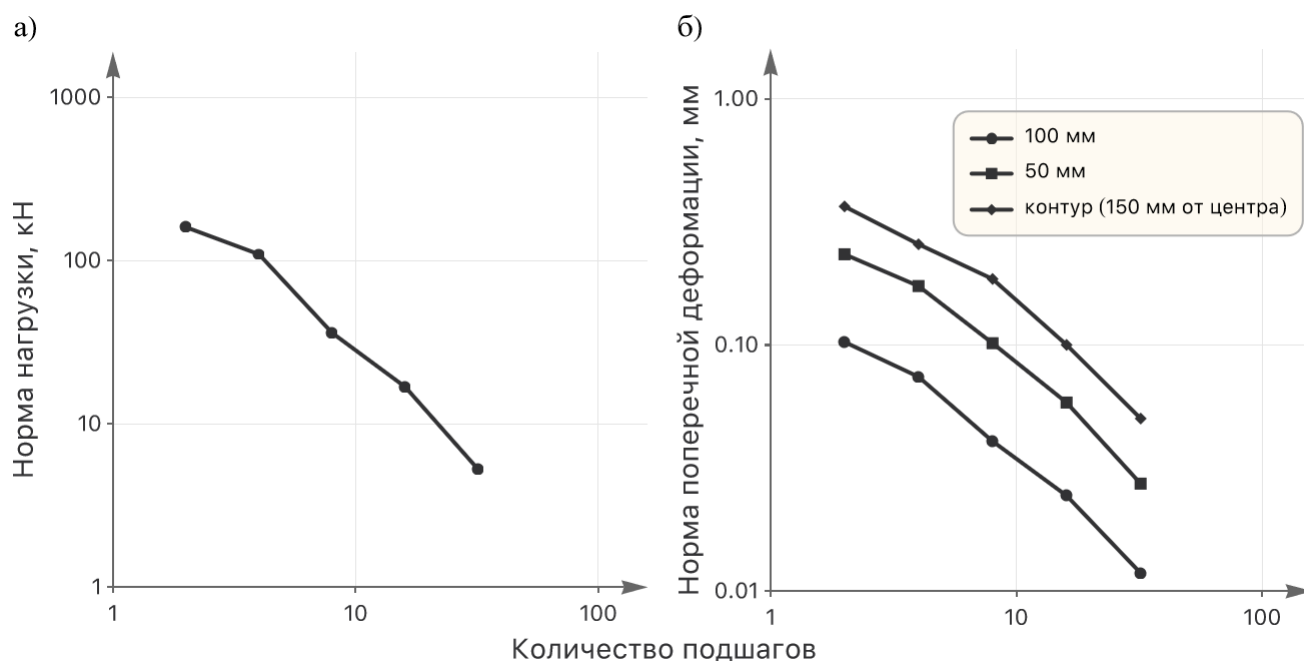


Рисунок 2.17 – Графики сходимости кривой нагружения (а) соляного образца и его поперечных деформаций на различном удалении от боковой грани образца (б) для ассоциированного объёмного критерия

2.4 Выводы

1. По результатам механических испытаний крупномасштабных соляных образцов в режиме одноосного сжатия и сопровождающего многовариантного численного моделирования показано, что изотропная упругопластическая модель, основанная на ассоциированном критерии пластичности Треска с линейным изотропным упрочнением, не обеспечивает соответствие расчётных поперечных деформаций с экспериментом. Это связано с тем, что соляные породы проявляют дилатансионные эффекты. Для учёта дилатансии в геоматериалах необходимо использовать чувствительные к гидростатическому давлению критерии прочности.

2. Установлено, что математическое описание процесса деформирования при одноосном сжатии крупномасштабных соляных образцов кубической формы в рамках упругопластической модели среды может быть выполнено с применением плоского линейного критерия разрушения Кулона-Мора и неассоциированного закона пластического течения, а также при использовании объёмного параболического критерия прочности и ассоциированного течения пластических деформаций с линейным изотропным упрочнением.

ГЛАВА 3. УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СОЛЯНЫХ ПОРОД

Исследование процесса деформирования крупномасштабных соляных образцов кубической формы при одноосном сжатии позволило выделить критерии разрушения (пластичности) и связанные с ними законы пластического течения, которые наиболее точно одновременно описывают диаграмму их нагружения и зависимости поперечной деформации от продольной. Другими словами, были подобраны подходящие функции текучести и пластические потенциалы, адекватно описывающие поведение соляной породы под нагрузкой, независящей от времени. Такими оказались неассоциированный критерий Кулона-Мора и ассоциированный объёмный критерий прочности горных пород.

Применительно к условиям ВКМС междукамерные целики находятся под действием постоянной мало изменяющейся во времени нагрузкой, что обуславливает активизацию процессов ползучести [119]. Деформация геоматериала в таком случае зависит не только от уровня приложенной нагрузки, но и от времени её действия. Небольшая скорость подвигания очистных работ практически исключает проявление в междукамерных целиках этапа неуставившейся ползучести (первичной ползучести). В этой связи наибольший интерес для анализа вызывает стадия установившейся ползучести (вторичной ползучести).

Ползучесть является одним из феноменов вязких свойств материала [120]. Для их изучения проводятся стандартные лабораторные испытания на релаксацию и ползучесть [121,122], результаты которых используются для калибровки вязкоупругой и/или вязкопластической моделей.

3.1 Экспериментальные данные

В рамках исследования временных эффектов, проявляющихся при деформировании соляных пород, были проведены лабораторные испытания на

релаксацию и ползучесть при одноосном нагружении. Тестирование проходило на малых образцах ($60 \times 30 \times 30$ мм) красного сильвинита и каменной соли. Характерный вид образцов представлен на рис. 3.1. Так на образцах каменной соли исследовались релаксационные процессы, а на образцах красного сильвинита – ползучесть. Процесс релаксации образцов каменной соли обеспечивался клиновым способом и ступенчатой нагрузкой на прессе Zwick/Z250 от «Zwick Roell AG». Проявление ползучести образцов красного сильвинита исследовалось на реологических установках при различных степенях нагружения [123]. Результаты испытаний иллюстрируются на рис. 3.2 и рис. 3.3, соответственно. Точкой отсчёта для кривых ползучести является момент начала установившейся ползучести.



Рисунок 3.1 – Образцы каменной соли и красного сильвинита

Основываясь на упругопластической модели деформирования образцов соляных пород, можно обобщить её за счёт включения вязкой составляющей и попытаться описать результаты испытания на релаксацию и ползучесть. В качестве критериев пластичности использовались выделенные по результатам предыдущих исследований: неассоциированный критерий Кулона-Мора и ассоциированный объёмный критерий.

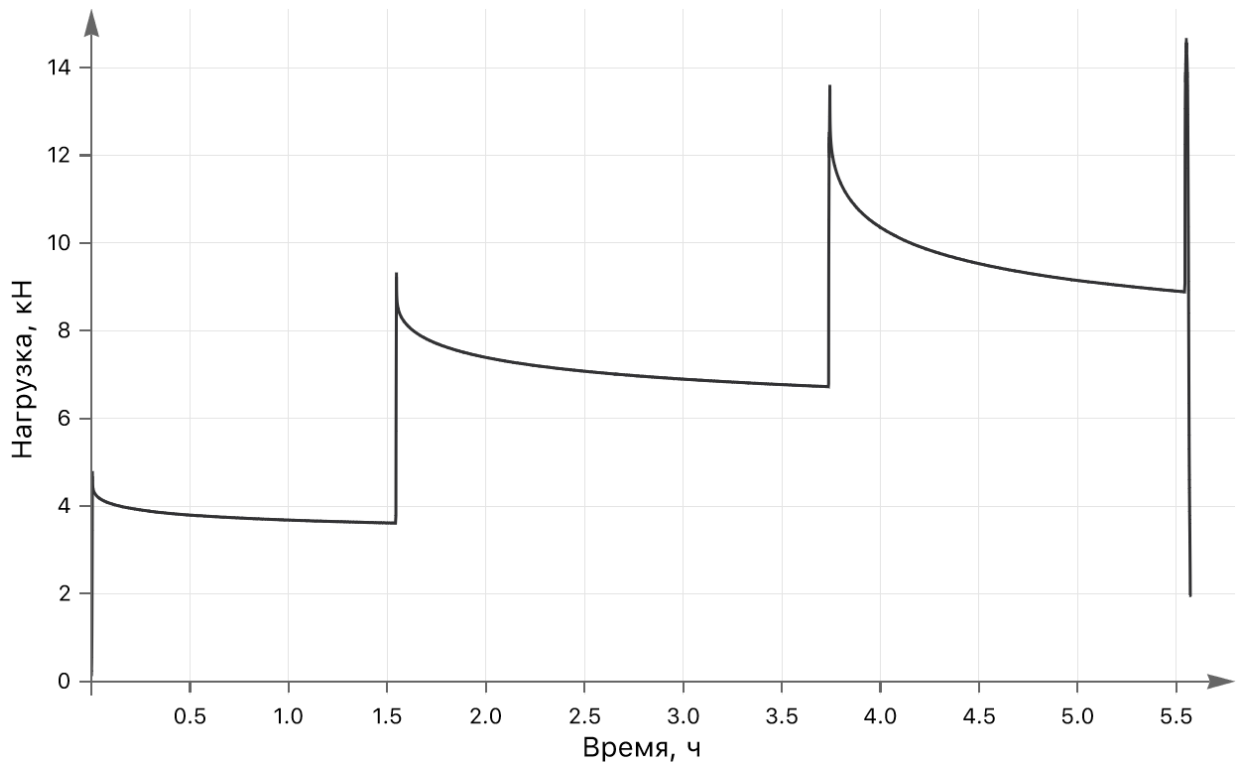


Рисунок 3.2 – Кривые релаксации при ступенчатом нагружении каменной соли

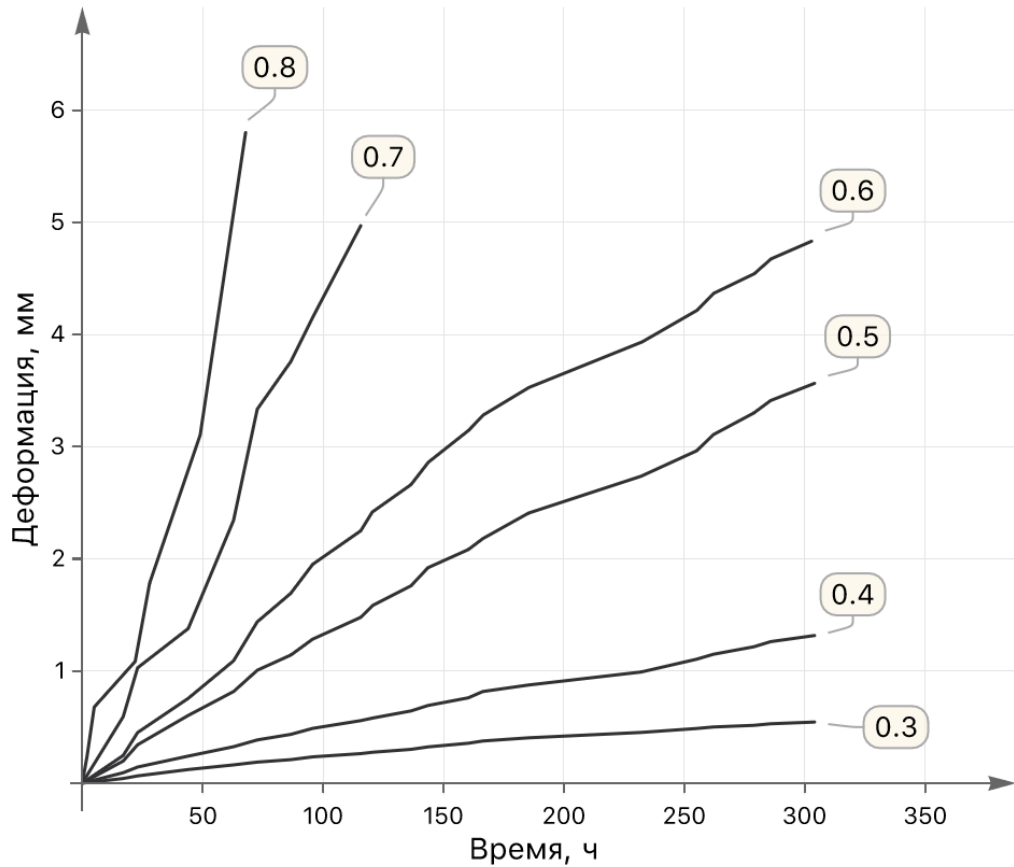


Рисунок 3.3 – Кривые установившейся ползучести при различных степенях нагружения красного сильвинита

3.2 Упруго-вязкопластическая модель

Временные эффекты в деформационном поведении соляных пород описывались с помощью изотропной вязкопластической модели среды [73,114,115]. Упругий режим деформирования остаётся прежним – линейный закон Гука. Основное определяющее соотношение общей упруго-вязкопластической модели, связывающее деформации и напряжения в материале, в скоростной форме имеет вид

$$\dot{\sigma} = D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{vp}), \quad (3.1)$$

где D^e это упругий тензор жёсткости четвёртого ранга, соответствующий закону Гука, а неупругие деформации записываются как

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{vp} &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \\ \dot{\lambda} &= \begin{cases} f(\sigma, \mathbf{A}, \mathbf{P}), & \Phi(\sigma, \mathbf{A}) > 0, \\ 0, & \Phi(\sigma, \mathbf{A}) \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь Φ и Ψ это функция текучести и пластический потенциал, соответственно. В отличие от упругопластической модели среды производная пластического множителя $\dot{\lambda}$ теперь есть функция тензора напряжений и наборов внутренних параметров материала $\mathbf{A}$ (пластических) и $\mathbf{P}$ (вязких). Как следствие, нарушается условие Куна-Такера, т.е. тензор напряжений может выходить за пределы поверхности текучести. Для упрощения построения модели наборы внутренних параметров приняты постоянными ($\mathbf{A} = \text{const}$ и $\mathbf{P} = \text{const}$). Таким образом, упрочнение и зависимость параметров $\mathbf{P}$ от температуры не рассматривались.

Решение системы дифференциальных уравнений упруго-вязкопластической модели среды проводилось методом конечных элементов в перемещениях. Геометрическая модель соляных образцов состояла из конечно-элементной сетки 8-узловых изопараметрических элементов гексаэдрической формы с 8 точками интегрирования. Область решения (60×30×30 мм) разбивалась на кубические элементы со стороной 1 мм. Калибровка модели деформирования соляных образцов по экспериментальным данным осуществлялась с помощью многовариантного моделирования путём варьирования параметров внутреннего состояния $\mathbf{A}$ и $\mathbf{P}$.

При многогранном представлении поверхности текучести и пластического потенциала для описания развития вязкопластических деформаций использовалось обобщение Койтера (2.9). Однако, выбор пластического потенциала/линейной комбинации потенциалов основывалось именно на упругопластическом решении. Так в процессе локального интегрирования сначала решалась упругопластическая задача, из которой определялось к какой грани/ребру поверхности текучести принадлежит тензор напряжений. Затем соответствующие уравнение или комбинация уравнений использовались в системе уравнений схемы локального интегрирования вязкопластических соотношений.

Учёт вязкопластических свойств среды требует большей точности от схем интегрирования как на глобальном (в пределах шага по времени), так и на локальном (в пределах точки интегрирования конечного элемента) уровнях. Поэтому для построения упруго-вязкопластической модели использовались следующие схемы интегрирования.

Глобальное интегрирование по времени реализовано с помощью автоматической схемы Ньютона-Рафсона с подшагами и контролем ошибки [124]. Согласно ей, главное уравнение равновесия записывается в скоростной форме

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{F}}_{vp,n} = \dot{\mathbf{F}}_{ext,n}, \quad (3.3)$$

где $\dot{\mathbf{u}}_n$, $\dot{\mathbf{F}}_{vp,n}$ и $\dot{\mathbf{F}}_{ext,n}$, соответственно, скорости узловых перемещений, неупругих и внешних сил в некоторый момент времени n , а $\mathbf{K}$ – глобальная матрица жёсткости. Для удобства эксплуатации схемы здесь она остаётся постоянной (модифицированная схема Ньютона-Рафсона). Левая часть уравнения (3.3) представляет собой скорость изменения внутренних сил в момент времени n ($\dot{\mathbf{F}}_{int,n}$).

Выражение для их вычисления может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{F}}_{int,n}^i = \sum \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \left(\frac{\sigma_n^i - \sigma_{n-1}^i}{\Delta t} \right) d\Omega_e, \quad (3.4)$$

в котором σ_{n-1} это напряжения в точке интегрирования конечного элемента, полученные в результате сошедшегося решения на предыдущем шаге по времени,

а σ_n^i – текущие напряжения, вычисляемые через локальную схему интегрирования. Верхний индекс i в выражении (3.4) означает номер глобального итерационного процесса Ньютона-Рафсона. Обновлённые значения узловых скоростей перемещения определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_n^i &= \dot{\mathbf{u}}_n^{i-1} + \delta\dot{\mathbf{u}}_n^i, \\ \delta\dot{\mathbf{u}}_n^i &= \mathbf{K}^{-1} \left(\dot{\mathbf{F}}_{\text{ext},n} - \dot{\mathbf{F}}_{\text{int},n}^i + \dot{\mathbf{F}}_{\text{unb},n-1} \right),\end{aligned}\quad (3.5)$$

где $\delta\dot{\mathbf{u}}$ есть инкремент узловых скоростей перемещений, и $\dot{\mathbf{F}}_{\text{unb},n-1}$ – скорость несбалансированных узловых сил на предыдущем шаге интегрирования по времени

$$\dot{\mathbf{F}}_{\text{unb},n} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext},n-1} - \mathbf{F}_{\text{int},n-1}}{\Delta t}.\quad (3.6)$$

Начальные скорости перемещений $\dot{\mathbf{u}}_0$ в (3.5) можно вычислить, применив очень малый инкремент времени. Итерационный процесс Ньютона-Рафсона продолжается до тех пор, пока его относительная ошибка не будет

$$E_{\text{NR}} = \frac{\|\delta\dot{\mathbf{u}}_n^i\| \Delta t}{\|\dot{\mathbf{u}}_n^i\|} \leq \text{ITOL},\quad (3.7)$$

либо пока количество итераций не достигнет заданного максимального числа MAXIT. Если заданная точность (отклонение) ITOL не была достигнута за MAXIT итераций, то текущий инкремент времени корректируется согласно

$$\Delta t_{\text{new}} = 0.25 \Delta t_{\text{prev}}\quad (3.8)$$

и итерационный процесс начинается заново. В случае если заданная точность ITOL была достигнута, то текущий итерационный процесс завершается, предоставляя текущий вектор узловых скоростей перемещений $\dot{\mathbf{u}}_n$. Как только он найден, можно определить текущий вектор узловых перемещений

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t.\quad (3.9)$$

Текущий шаг по времени может быть принят в общее решение если выполнено следующее условие

$$E_{GS} = \max \left\{ EPS, \frac{\|\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}_{n-1}\| \Delta t}{2\|\mathbf{u}_n\|} \right\} \leq DTOL, \quad (3.10)$$

где E_{GS} это относительная ошибка глобального решения, EPS – машинная эпсилон, а $DTOL$ – заданное максимальное отклонение вектора скорости узловых перемещений от вектора узловых перемещений. При любом исходе определяется следующий инкремент времени, исходя из соотношений

$$\begin{aligned} q &= 0.8 \sqrt{DTOL/E_{GS}}, \\ 0.1 &\leq q \leq 2, \\ \Delta t_{\text{new}} &= q \Delta t_{\text{prev}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Локальное интегрирование определяющих соотношений проводилось в пространстве главных напряжений при помощи спектрального разложения симметричного тензора (2.15). Неявная схема Эйлера алгоритма обратного отображения сводит интегрирование к решению системы уравнений [73,114,115]

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma^{\text{trial}} - D^e : \Delta \lambda N(\sigma_n, \mathbf{A}_n), \\ \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} = f(\sigma_n, \mathbf{A}_n, \mathbf{P}_n). \end{cases} \quad (3.12)$$

Поскольку наборы внутренних параметров приняты постоянными, следовательно, $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$ и $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}$. Решение таких нелинейных систем относительно σ_n и $\Delta \lambda$ проводилось методом Ньютона-Рафсона. Согласно ему система (3.12) записывается в виде невязок в матричном виде (нотации Фойгта)

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta \lambda D^e N(\sigma_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv f(\sigma_n, \mathbf{A}, \mathbf{P}) - \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

где D^e это теперь матрица упругих констант. Затем определяется Якобиан системы

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \Delta \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \Delta \lambda} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

где, соответственно, векторы невязок и неизвестных системы

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_\lambda)^T, \\ \mathbf{v} &= (\sigma_n, \Delta\lambda)^T.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Далее запускается итерационный процесс

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_{j-1} - \mathbf{J}_{j-1}^{-1} \mathbf{r}_{j-1}, \\ \mathbf{r}_{j-1} &= \mathbf{r}(\mathbf{v}_{j-1}), \quad \mathbf{J}_{j-1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{j-1}).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Индекс j обозначает номер итерации локального процесса Ньютона-Рафсона и ограничивается максимальным значением MAXITL. Первое приближение решения системы записывается в виде

$$\mathbf{v}_0 = (\sigma^{\text{trial}}, 0)^T.\tag{3.17}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\|\mathbf{r}_j\| \leq \text{STOL},\tag{3.18}$$

где STOL заданное отклонение нормы вектора невязки $(3.15)_1$ от нулевого значения. Если решение не было найдено за MAXITL итераций процесса (3.16), то считается, что глобальное решение не может быть найдено, корректируется инкремент времени согласно (3.8) и глобальный итерационный процесс для уже нового инкремента начинается заново. В дополнение к условию (3.18) можно использовать проверку скорости сходимости. Например, считать итерационный процесс (3.16) несходящимся, если норма вектора невязки $(3.15)_1$ не уменьшилась в два раза за две последовательные итерации.

Суммируя вышеописанное, общая схема интегрирования имеет 5 параметров настройки автоматического алгоритма интегрирования системы нелинейных уравнений. Выбор значений этих параметров во многом зависит от конкретной задачи и задаёт точность и производительность решения [124,125]. Перечень параметров и референсных значений приведён в табл. 3.1.

Общая схема интегрирования содержит пять параметров настройки автоматического алгоритма интегрирования системы нелинейных уравнений: три на глобальном уровне (DTOL, ITOL и MAXIT) и два (STOL и MAXITL) – на локальном. Выбор значений этих параметров во многом зависит от конкретной

задачи и задаёт точность и производительность решения. В данной работе были использованы следующие значения параметров: $DTOL = 10^{-3}$, $ITOL = 10^{-5}$, $STOL = 10^{-6}$, $MAXIT = 10$, $MAXITL = 10$.

Таблица 3.1

Параметры общей схемы интегрирования

Параметр	Описание	Уровень интегрирования	Диапазон значений
DTOL	Относительная ошибка общего решения. Отклонение вектора скорости узловых перемещений от вектора узловых перемещений для текущего инкремента по времени.	Глобальный	$[10^{-4}, 10^{-2}]$
ITOL	Относительная ошибка итерационного решения Н-Р. Отклонение вектора прироста скорости узловых перемещений от текущего вектора узловых перемещений для пробного решения.	Глобальный	$[10^{-6}, 10^{-3}] \leq DTOL$
MAXIT	Максимальное число итераций процесса Н-Р	Глобальный	Зависит от ITOL, DTOL и конкретной задачи (референс = 15)
STOL	Ошибка итерационного процесса Н-Р. Задаёт точность интегрирования определяющих соотношений.	Локальный	$STOL \leq ITOL$
MAXITL	Максимальное число итераций процесса Н-Р	Локальный	Не должно быть слишком большим (референс = 10)

3.3 Законы вязкопластичности

Закон Бингама

Классический и самый простой вязкопластический закон, закон Бингама [114], имеет линейный характер по отношению к функции текучести

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \Phi(\sigma, \mathbf{A}). \quad (3.19)$$

Единственным параметром модели является коэффициент вязкости η , имеющий размерность времени. Таким образом, множество параметров $\mathbf{P}$ состоит из единственного элемента

$$\mathbf{P} = \{\eta\}. \quad (3.20)$$

Из-за своей линейной природы, диапазон экспериментальных данных, который данный закон может описать, сильно ограничен. Здесь он рассматривается для сравнения.

Неассоциированный критерий Кулона-Мора

Система невязок локального интегрирования для неассоциированного критерия Кулона-Мора будет разной в зависимости от того к какой грани/ребру принадлежит напряжённое состояние.

Работая в пространстве главных напряжений и рассматривая секстант $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (рис. 3.4), если тензор напряжений принадлежит грани Φ_1 , то система невязок в матричном представлении принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda D^e N_1 = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A}) - \eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

для которой векторы невязок и неизвестных системы соответствуют (3.15), а уравнение грани поверхности текучести и вектор пластического течения — (2.30) и (2.33). Таким образом, Якобиан системы (3.21) имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{\eta}{\Delta t} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где $\mathbf{I}$ есть единичная матрица 3×3 , а $\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1$ – вектор проекции, который для критерия Кулона-Мора является постоянным. Стоит заметить, что в отличие от упругопластичности уравнение невязки $\mathbf{R}_\lambda$ в (3.21) описывает «динамичную» поверхность текучести, на которую в результате алгоритма обратного отображения проецируется тензор напряжений. Форма такой поверхности теперь зависит не только от текущего напряженного состояния и внутренних параметров, но и от скорости деформирования.

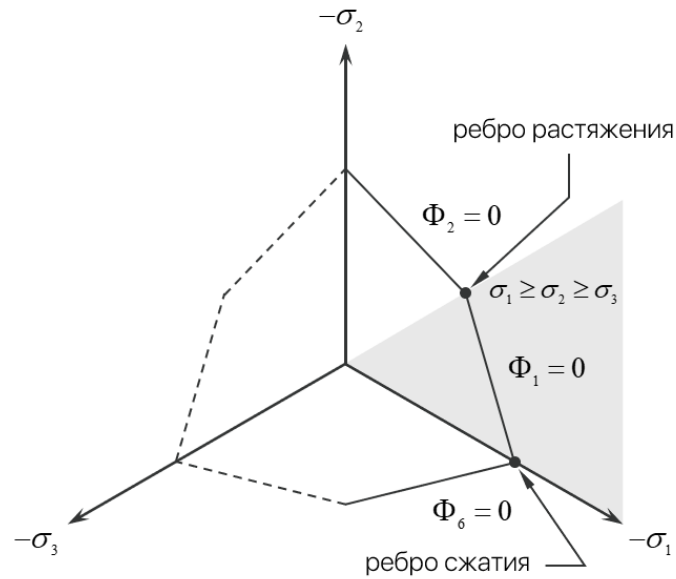


Рисунок 3.4 – Многогранное представление поверхности текучести критерия Кулона-Мора в девиаторной плоскости

Другой случай, когда тензор напряжений принадлежит ребру многогранной поверхности текучести, добавляет в систему невязок ещё одно уравнение и изменяет первое $\mathbf{R}_\sigma$ следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \mathbf{D}^e (\Delta\lambda_1 \mathbf{N}_1 + \Delta\lambda_{2,6} \mathbf{N}_{2,6}) = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_1} \equiv \Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A}) - \eta \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta t} = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_{2,6}} \equiv \Phi_{2,6}(\sigma_n, \mathbf{A}) - \eta \frac{\Delta\lambda_{2,6}}{\Delta t} = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

где индексы 2 и 6 обозначают номер смежной грани поверхности текучести (2.30) и соответствующего вектора пластического течения (2.33) в зависимости от того к

какому ребру принадлежит тензор напряжений: $\Phi_{1\wedge 2}$ (ребро растяжения) или $\Phi_{1\wedge 6}$ (ребро сжатия). Соответствующие системе (3.23) векторы невязок и неизвестных записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \left(\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_{\lambda_1}, \mathbf{R}_{\lambda_{2,6}} \right)^T, \\ \mathbf{v} &= \left(\sigma_n, \Delta\lambda_1, \Delta\lambda_{2,6} \right)^T, \end{aligned} \quad (3.24)$$

а Якобиан системы принимает вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_{2,6} \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\eta/\Delta t & 0 \\ \bar{\mathbf{N}}_{2,6}^T & 0 & -\eta/\Delta t \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Начальное приближение решения системы (3.23)

$$\mathbf{v}_0 = \left(\sigma^{\text{trial}}, 0, 0 \right)^T. \quad (3.26)$$

Таблица 3.2

Параметры модели Кулон-Мор + Бингам для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, МПа · час
0.3	1.5	0.3	1.7	30	18	35
0.4	1.5	0.3	1.7	30	18	35
0.5	1.5	0.3	1.7	30	18	20
0.6	1.5	0.3	1.7	30	18	20
0.7	1.5	0.3	1.7	30	18	10
0.8	1.5	0.3	1.7	30	18	6

Таблица 3.3

Параметры модели Кулон-Мор + Бингам для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости МПа · час
1	1.8	0.3	1.15	30	18	0.18
2	1.8	0.3	2.125	30	18	0.29
3	1.8	0.3	2.75	30	18	0.29

Результаты моделирования процессов ползучести и релаксации с помощью вязкопластической модели Бингама и неассоциированного пластического потенциала Кулона-Мора представлены на рис. 3.5 и рис. 3.6. Параметры модели, откалиброванные путём многовариантного моделирования, указаны в табл. 3.2 и табл. 3.3, соответственно. Как и ожидалось кривые релаксации соляных образцов линейная модель Бингама описать не может, а именно, крутой градиент кривых на их начальном этапе. Однако, скорости нарастания продольной деформации, получаемые в процессе установившейся ползучести при различных степенях нагружения, данная модель описать позволяет.

Ассоциированный Объёмный критерий

Объёмный критерий имеет непрерывную форму записи относительно тензора напряжений, поэтому система невязок для ассоциированного с ним закона пластического течения и вязкопластического закона Бингама имеет вид подобный для грани Кулона-Мора (3.21)

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda D^e N(\sigma_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\sigma_n, \mathbf{A}) - \eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

за исключением вектора направления пластического течения в уравнении $\mathbf{R}_\sigma$. Здесь он теперь зависит от тензора напряжений и внутренних параметров материала. Векторы невязок и неизвестных системы соответствуют (3.15). Якобиан системы (3.27) записывается как

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda D^e \frac{\partial N}{\partial \sigma} & \mathbf{P} \\ \mathbf{N}^T & -\frac{\eta}{\Delta t} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

где в пространстве главных напряжений вектор направления пластических деформаций соответствует (2.52), и его производная имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Многовариантное численное моделирование процессов релаксации и ползучести соляных образцов с помощью модели «ассоциированный объёмный + Бингам» позволило получить следующие результаты, представленные в виде диаграмм (рис. 3.5 и рис. 3.6) и откалиброванных параметров модели (табл. 3.4 и табл. 3.5). Аналогично неассоциированному потенциалу Кулона-Мора модель Бингама для ассоциированного объёмного критерия не может описать крутой градиент кривых релаксации на их начальном этапе. Скорости продольной ползучести соляных образцов при этом удаётся получить для всех представленных степеней нагружения.

Таблица 3.4

Параметры модели Объёмный + Бингам для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, МПа · час
0.3	1.5	0.3	1	5	35
0.4	1.5	0.3	1	5	50
0.5	1.5	0.3	1	5	45
0.6	1.5	0.3	1	5	60
0.7	1.5	0.3	1	5	50
0.8	1.5	0.3	1	5	45

Таблица 3.5

Параметры модели Объёмный + Бингам для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, МПа · час
1	1.8	0.3	1	3.9	$1.1 \cdot 10^{-3}$
2	1.8	0.3	1	7.1	$2.8 \cdot 10^{-3}$
3	1.8	0.3	1	9.0	$3.9 \cdot 10^{-3}$

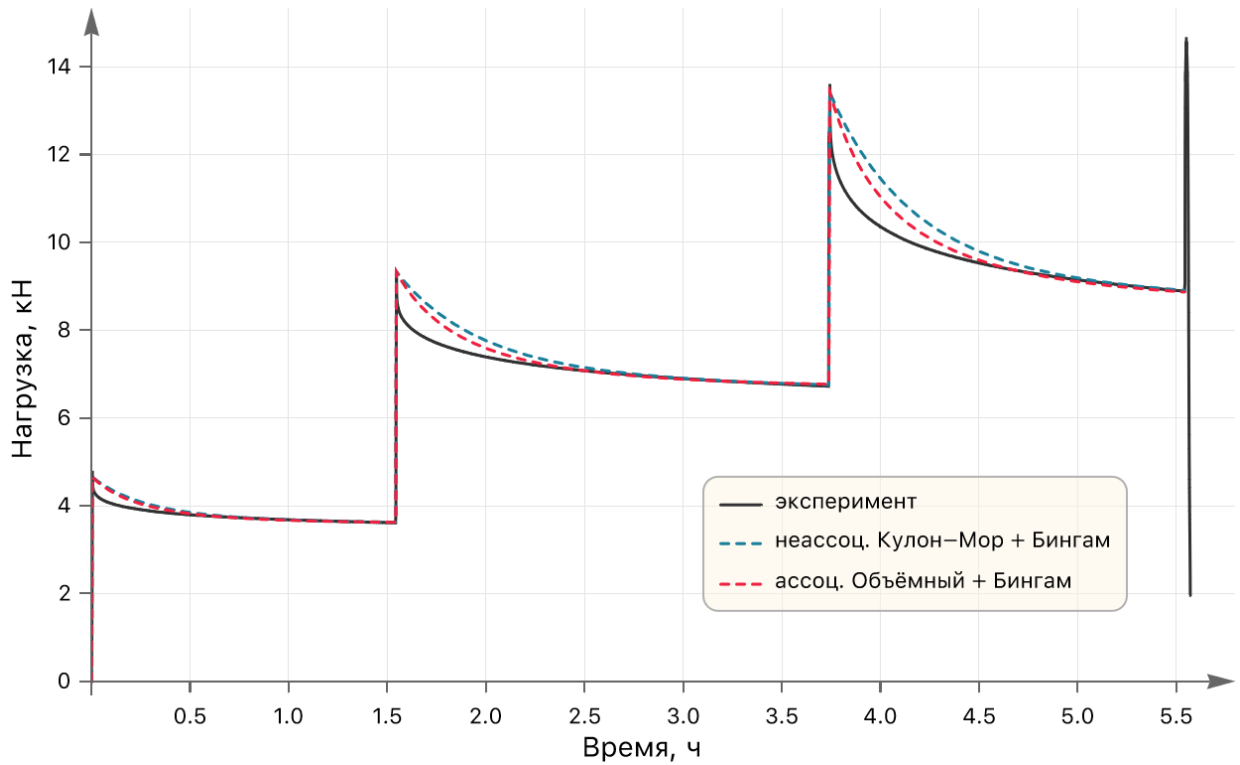


Рисунок 3.5 – Результаты моделирования процессов релаксации образца каменной соли (закон Бингама)

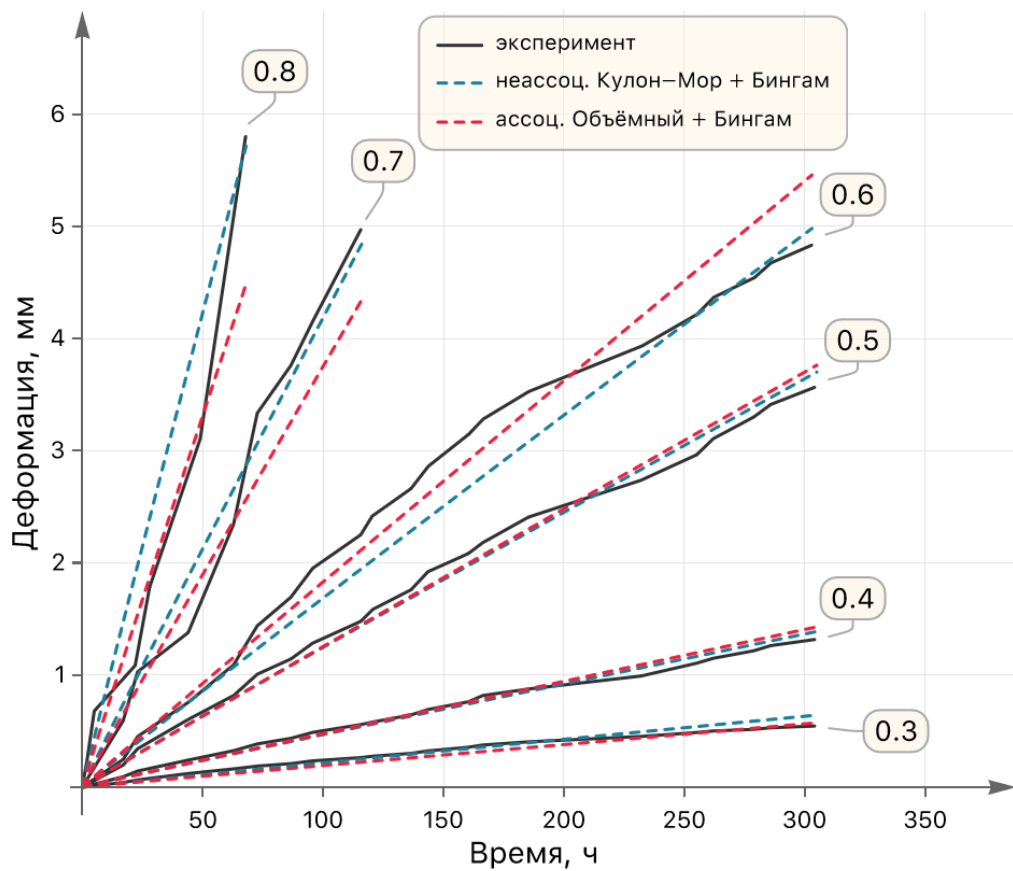


Рисунок 3.6 – Результаты моделирования процессов ползучести образцов красного сальвинита при различных степенях нагружения (закон Бингама)

Закон Дюво-Лионса

Альтернативный закон вязкопластичности, предложенный Дюво и Лионсом [115], интересен тем, что он является расширением упругопластической модели и в нём участвует единственный параметр – время релаксации в чистом виде. Закон Дюво-Лионса так же, как закон Бингама, имеет линейный характер, но уже по отношению к опорному напряжению и записывается следующим образом

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\tau} C^e : (\sigma - \hat{\sigma}). \quad (3.30)$$

Здесь $C^e = [D^e]^{-1}$ это тензор упругого соответствия, τ – время релаксации, а $\hat{\sigma}$ – опорное напряжение, которое соответствует ближайшей проекции тензора напряжений на поверхность текучести. Таким образом, множество параметров $\mathbf{P}$ состоит из одного элемента

$$\mathbf{P} = \{\tau\}. \quad (3.31)$$

Так же, как и закон Бингама, закон Дюво-Лионса в работе рассматривается для сравнения.

Система невязок локальной схемы интегрирования, соответствующая модели Дюво-Лионса, будет отличаться от (3.13), поскольку эта вязкопластическая модель принадлежит другому типу. Так общий вид системы невязок в матричной записи будет соответствовать

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \left(\frac{\tau + \Delta t}{\tau} \right) \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} - \frac{\Delta t}{\tau} \hat{\sigma}_n = 0, \\ \mathbf{R}_{\hat{\sigma}} \equiv \hat{\sigma}_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta \lambda D^e N(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Первое уравнение отвечает за вязкопластический закон Дюво-Лионса, которое получается путём подстановки $\Delta t \dot{\varepsilon}^{vp}$ в $(3.13)_1$ вместо тензора пластических деформаций $\Delta \lambda N(\sigma_n, \mathbf{A})$. Второе уравнение описывает опорное напряжение, а третье указывает чтобы это напряжение было на поверхности текучести. Векторы невязок и неизвестных системы имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_{\hat{\sigma}}, \mathbf{R}_\lambda)^T, \\ \mathbf{v} &= (\sigma_n, \hat{\sigma}_n, \Delta\lambda)^T,\end{aligned}\tag{3.33}$$

а соответствующий Якобиан системы

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\tau + \Delta t}{\tau}\right) \mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{\tau} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\sigma}} & \hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{N}}^T & 0 \end{bmatrix},\tag{3.34}$$

где элементы с галочкой сверху $\hat{\cdot}$ относятся напряжённому состоянию на поверхности текучести (пластическому отклику материала). Так выражения для вектора проекции и нормали к поверхности текучести записываются как

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{D}^e \mathbf{N}(\hat{\sigma}, \mathbf{A}), \quad \hat{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{N}}(\hat{\sigma}, \mathbf{A}).\tag{3.35}$$

Неассоциированный критерий Кулона-Мора

Как и прежде, в пространстве главных напряжений для критерия Кулона-Мора рассматриваем случаи: когда тензор напряжений принадлежит грани и когда — одному из рёбер. В первом случае система невязок в основном будет соответствовать (3.32)

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \left(\frac{\tau + \Delta t}{\tau}\right) \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} - \frac{\Delta t}{\tau} \hat{\sigma}_n = 0, \\ \mathbf{R}_{\hat{\sigma}} \equiv \hat{\sigma}_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1 = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi_1(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0. \end{cases}\tag{3.36}$$

Отличие состоит только в векторе направления пластического течения. Здесь он является константой. Таким образом система становится линейной и можно получить её решение в закрытой форме. Локальная схема интегрирования сводится к последовательным вычислениям:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{\Phi_1(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A})}{\bar{\mathbf{N}}_1 \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1}, \quad \hat{\sigma}_n = \sigma^{\text{trial}} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1, \\ \sigma_n &= \left(\frac{\tau}{\tau + \Delta t}\right) \sigma^{\text{trial}} + \left(\frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\right) \hat{\sigma}_n.\end{aligned}\tag{3.37}$$

В случае, когда тензор напряжений принадлежит ребру, в системе невязок (3.32) уравнение для $\mathbf{R}_{\hat{\sigma}}$ заменяется аналогично (3.23)₁ и добавляется одно из уравнений смежной грани поверхности текучести

$$\mathbf{R}_{\lambda_{2,6}} \equiv \Phi_{2,6}(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0. \quad (3.38)$$

Решение полученной системы невязок в закрытой форме записывается как

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_1 &= \frac{a \Phi_1(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A}) - b \Phi_{2,6}(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A})}{ad - bc}, \\ \Delta\lambda_{2,6} &= \frac{a \Phi_{2,6}(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A}) - c \Phi_1(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{A})}{ad - bc}, \\ \hat{\sigma}_n &= \sigma^{\text{trial}} - D^e (\Delta\lambda_1 \mathbf{N}_1 + \Delta\lambda_{2,6} \mathbf{N}_{2,6}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a &= \bar{\mathbf{N}}_1 D^e \mathbf{N}_1, & b &= \bar{\mathbf{N}}_1 D^e \mathbf{N}_{2,6}, \\ c &= \bar{\mathbf{N}}_{2,6} D^e \mathbf{N}_1, & d &= \bar{\mathbf{N}}_{2,6} D^e \mathbf{N}_{2,6}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Итоговый тензор напряжений вычисляется по формуле (3.37)₃.

Таблица 3.6

Параметры модели Кулон-Мор + Дюво-Лионс для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Время релаксации, час
1	1.8	0.3	1.15	30	18	$5.56 \cdot 10^{-2}$
2	1.8	0.3	2.125	30	18	$8.3 \cdot 10^{-2}$
3	1.8	0.3	2.75	30	18	$8.6 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3.7

Параметры модели Кулон-Мор + Дюво-Лионс для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Время релаксации, час
0.3	1.5	0.3	1.7	30	18	9
0.4	1.5	0.3	1.7	30	18	9
0.5	1.5	0.3	1.7	30	18	4.6
0.6	1.5	0.3	1.7	30	18	4.6
0.7	1.5	0.3	1.7	30	18	2.4
0.8	1.5	0.3	1.7	30	18	1.5

Результаты многовариантного численного моделирования процессов релаксации и ползучести соляных образцов, полученные с помощью вязкопластической модели Дюво-Лионса и неассоциированного критерия Кулона-Мора, представлены в виде диаграмм на рис. 3.7 и рис. 3.8. Откалиброванные параметры упруго-вязкопластической модели для каждого численного эксперимента указаны в табл. 3.6 и табл. 3.7.

Из рисунков видно, что аналогично закону Бингама вязкопластический закон Дюво-Лионса не способен описать высокий градиент кривых релаксации соляных образцов на их начальном этапе. Экспериментальные диаграммы установившейся ползучести при разных степенях нагружения модель Дюво-Лионса вполне может описать с приемлемой точностью.

Ассоциированный Объёмный критерий

Поскольку объёмный критерий имеет нелинейную форму записи относительно тензора напряжений, то система уравнений невязок становится так же нелинейной. Соответствующие записи векторов невязок, неизвестных и Якобиана системы будут полностью совпадать с общим видом (3.32)-(3.34).

Для эффективности решения систему невязок можно сократить на одно уравнение. Так из уравнения невязки $\mathbf{R}_\sigma$ можно получить выражение для $\hat{\sigma}_n$ и использовать её в качестве функции. Затем подставить эту функцию в остальные уравнения системы. Таким образом система невязок для вязкопластической модели Дюво-Лионса сокращается до двух уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \left(\frac{\Delta\lambda\Delta t}{\tau + \Delta t} \right) D^e N(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\hat{\sigma}_n, \mathbf{A}) = 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

где функция опорного напряжения принимает вид

$$\hat{\sigma}_n(\sigma_n, \sigma^{\text{trial}}, \Delta t, \mathbf{P}) = \left(\frac{\tau + \Delta t}{\Delta t} \right) \sigma_n - \frac{\tau}{\Delta t} \sigma^{\text{trial}}. \quad (3.42)$$

Вектора невязок и неизвестных систем так же сокращаются и теперь соответствует (3.15)₂. Якобиан принимает компактную форму

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\sigma}} & \left(\frac{\Delta\lambda \Delta t}{\tau + \Delta t} \right) \hat{\mathbf{P}} \\ \left(\frac{\tau + \Delta t}{\Delta t} \right) \hat{\mathbf{N}}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

где производная вектора направления пластических деформаций соответствует (3.29). Диагональный элемент во второй строчке имеет нулевое значение, поскольку в модели упрочнение не рассматривается.

Таблица 3.8

Параметры модели Объёмный + Дюво-Лионс для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Время релаксации, час
1	1.8	0.3	1	3.9	$5.56 \cdot 10^{-2}$
2	1.8	0.3	1	7.1	$5.56 \cdot 10^{-2}$
3	1.8	0.3	1	9.0	$5.56 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3.9

Параметры модели Объёмный + Дюво-Лионс для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Время релаксации, час
0.3	1.5	0.3	1	5	13
0.4	1.5	0.3	1	5	13
0.5	1.5	0.3	1	5	8
0.6	1.5	0.3	1	5	8
0.7	1.5	0.3	1	5	5
0.8	1.5	0.3	1	5	3

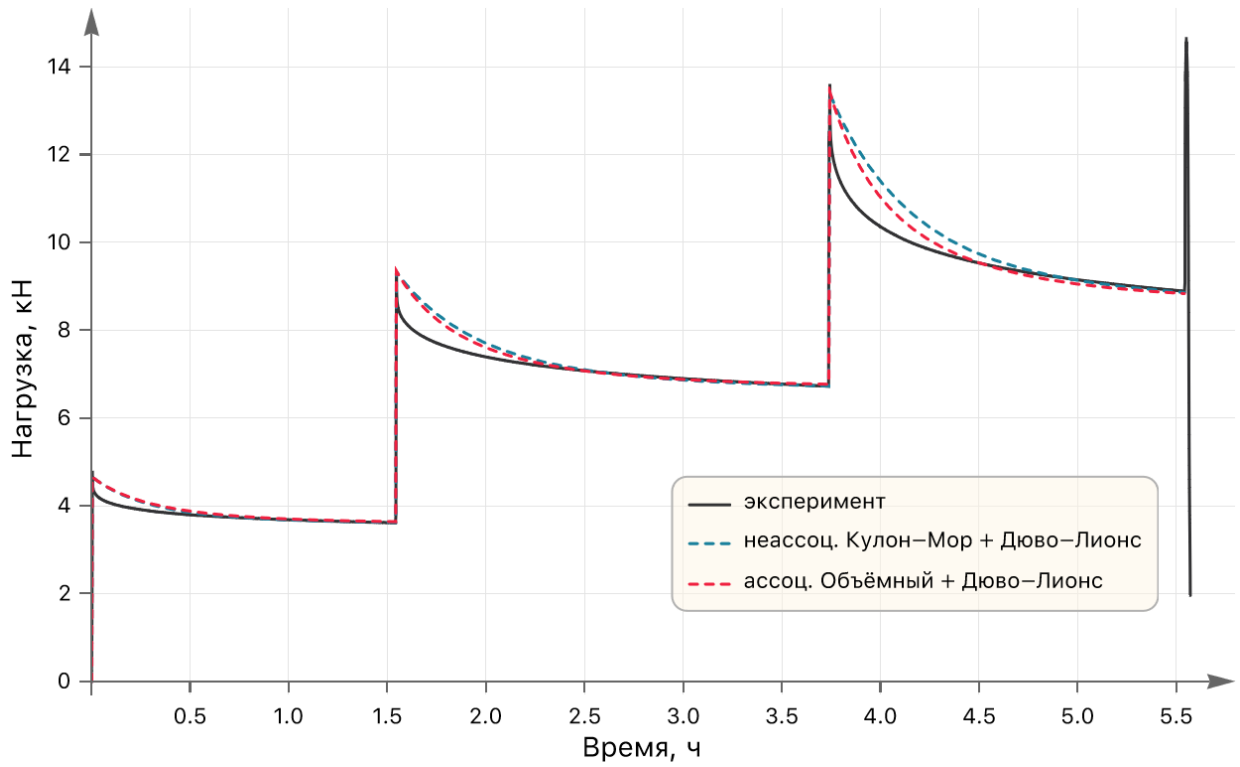


Рисунок 3.7 – Результаты моделирования процессов релаксации образца каменной соли (закон Дюво-Лионс)

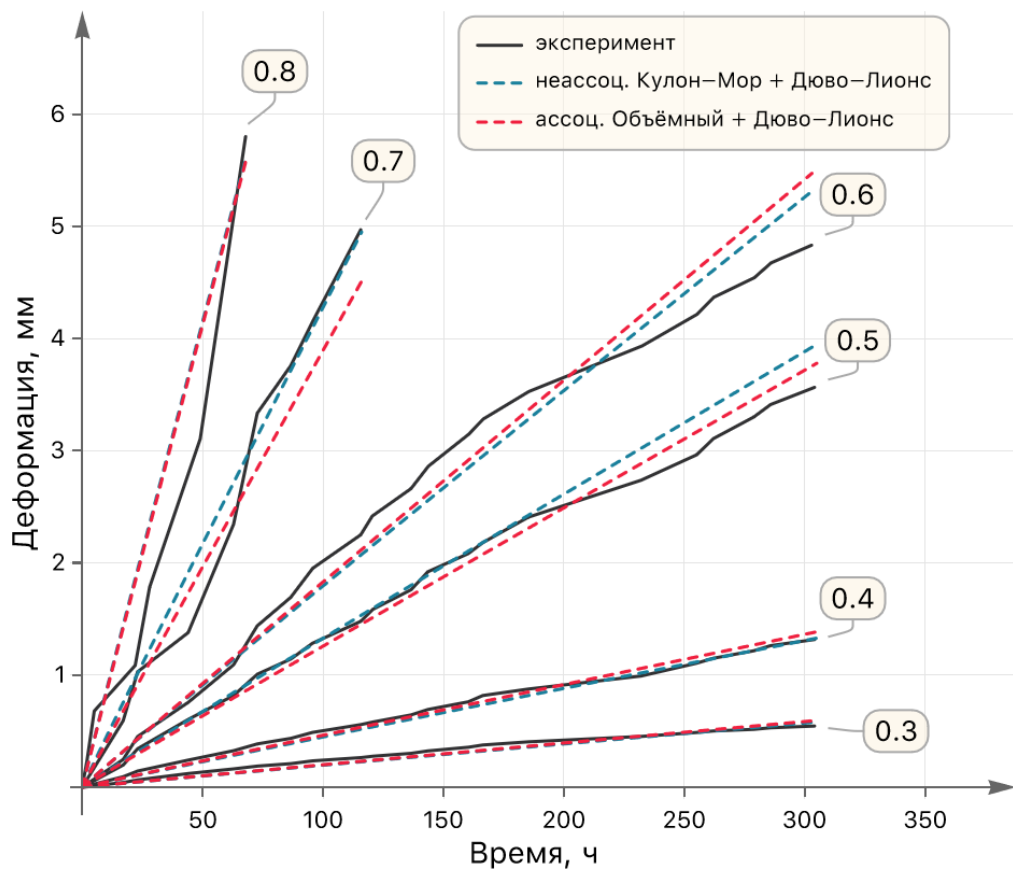


Рисунок 3.8 – Результаты моделирования процессов ползучести образцов красного сальвинита при различных степенях нагружения (закон Дюво-Лионса)

Многовариантное численное моделирование процессов релаксации и ползучести соляных образцов с помощью вязкопластической модели Дюво-Лионса и ассоциированного объёмного критерия позволило получить следующие результаты. Диаграммы ступенчатого нагружения с кривыми релаксации изображены на рис. 3.7. Диаграммы ползучести при разных степенях нагружения представлены на рис. 3.8. Откалиброванные параметры упруго-вязкопластической модели для каждого численного эксперимента на релаксацию и ползучесть указаны в табл. 3.8 и табл. 3.9, соответственно.

Из результатов численных экспериментов видно, что аналогично предыдущим результатам вязкопластическая модель Дюво-Лионса совместно с ассоциированным объёмным критерием не способна описать высокие градиенты диаграмм релаксации на их начальном этапе, тогда как кривые ползучести при разных степенях нагружения соляных образцов вполне могут быть получены с приемлемой погрешностью.

Закон Пержины

Один из самых широко используемых законов в вычислительной вязкопластичности, предложенный Пержиной [114], определяется как

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_y} - 1 \right]^{1/m}, \quad (3.44)$$

где η это параметр вязкости размерности времени, σ_e есть некое эквивалентное напряжение, σ_y – соответствующий предел текучести, а также m – параметр чувствительности скорости/скоростного упрочнения. Обычно в качестве σ_e используется эффективное напряжения по Мизесу. Предел текучести σ_y в этом случае соответствует предельному эффективному напряжению по Мизесу. В качестве пластического потенциала здесь обычно используется ассоциированный с поверхностью текучести Мизеса закон, называемый законом Прандтля-Рейсса [114].

Впрочем, к форме (3.44) можно привести любой критерий пластичности, приняв за σ_e функцию текучести без её свободного члена, а в роли σ_y как раз будет участвовать свободный член функции текучести. Исходя из этого, вязкопластическую модель Пержины можно записать в терминах функции текучести

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\Phi(\sigma, \mathbf{A})}{\sigma_y(\mathbf{A})} \right]^{1/m}, \quad (3.45)$$

где

$$\Phi(\sigma, \mathbf{A}) = \sigma_e(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}), \quad (3.46)$$

а $\sigma_y(\mathbf{A})$ – свободный член функции текучести, представляющий некий предел эквивалентного напряжения.

Множество параметров вязкопластичности состоит теперь из двух элементов

$$\mathbf{P} = \{\eta, m\}. \quad (3.47)$$

Параметр m отвечает за то, как реагирует материал при изменении скорости деформирования. Чем он ближе к нулю, тем поведение материала больше похоже на пластическое деформирование. Предел при $m \rightarrow 0$ равен чистому пластическому поведению материала, т.е. полное отсутствие временных эффектов.

В системе невязок уравнение, отвечающее за ограничение пластического множителя, для вязкопластической модели Пержины будет иметь вид

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left(\eta \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right)^m = 0, \quad (3.48)$$

Из уравнения (3.48) также вытекает главный недостаток модели Пержины [126]. В пределе при $m = 0$ модель увеличивает предел текучести в два раза $\sigma_e(\sigma, \mathbf{A}) = 2\sigma_y(\mathbf{A})$.

Неассоциированный критерий Кулона-Мора

Как и прежде, рассматриваем случаи: когда тензор напряжений принадлежит грани поверхности текучести, и когда – одному из рёбер. При попадании тензора напряжений на грань система невязок в матричном представлении принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1 = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left(\eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right)^m = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

где предел текучести σ_y для критерия Кулона-Мора записывается как

$$\sigma_y(\mathbf{A}) = 2c \cos \phi. \quad (3.50)$$

Соответствующий Якобиан системы

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{m\sigma_y}{\Delta\lambda} \left(\eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right)^m \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Заметим, что диагональный элемент во второй строчке Якобиана не может быть определён при начальном приближении (3.17). Для того чтобы исключить эту вычислительную неопределённость перепишем уравнение $\mathbf{R}_\lambda$ в системе невязок (3.49) следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1 = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \left(\frac{\Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A})}{\sigma_y(\mathbf{A})} \right)^{1/m} - \eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Теперь Якобиан системы будет соответствовать

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 \\ \frac{1}{m\Phi_1} \left(\frac{\Phi_1}{\sigma_y} \right)^{1/m} \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{\eta}{\Delta t} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Такой вид касательного оператора системы невязок определён при начальном приближении (3.17). Тем не менее, стоит заметить, на поверхности текучести Якобиан не определён. Таким образом, с приближением тензора напряжений к поверхности текучести и при малых значениях параметра m может возникать неустойчивость решения системы невязок.

Аналогично записывается система невязок для случая, когда тензор напряжений принадлежит ребру многогранной поверхности текучести Кулона-Мора:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + D^e (\Delta\lambda_1 N_1 + \Delta\lambda_{2,6} N_{2,6}) = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_1} \equiv \left(\frac{\Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A})}{\sigma_y(\mathbf{A})} \right)^{1/m} - \eta \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta t} = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_{2,6}} \equiv \left(\frac{\Phi_{2,6}(\sigma_n, \mathbf{A})}{\sigma_y(\mathbf{A})} \right)^{1/m} - \eta \frac{\Delta\lambda_{2,6}}{\Delta t} = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Соответствующий Якобиан системы принимает вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_{2,6} \\ \frac{1}{m\Phi_1} \left(\frac{\Phi_1}{\sigma_y} \right)^{1/m} \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{\eta}{\Delta t} & 0 \\ \frac{1}{m\Phi_{2,6}} \left(\frac{\Phi_{2,6}}{\sigma_y} \right)^{1/m} \bar{\mathbf{N}}_{2,6}^T & 0 & -\frac{\eta}{\Delta t} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Таблица 3.10

Параметры модели Кулон-Мор + Пержина для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
1	1.8	0.3	0.675	30	18	$2.78 \cdot 10^2$	0.1
2	1.8	0.3	0.98	30	18	$2.78 \cdot 10^2$	0.1
3	1.8	0.3	0.94	30	18	$2.78 \cdot 10^2$	0.1

Таблица 3.11

Параметры модели Кулон-Мор + Пержина для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
0.3	1.5	0.3	1.7	30	18	$3.5 \cdot 10^3$	0.4
0.4	1.5	0.3	1.7	30	18	10^4	0.4
0.5	1.5	0.3	1.7	30	18	10^4	0.4
0.6	1.5	0.3	1.7	30	18	$1.6 \cdot 10^4$	0.4
0.7	1.5	0.3	1.7	30	18	$2.2 \cdot 10^4$	0.3
0.8	1.5	0.3	1.7	30	18	$2.8 \cdot 10^4$	0.3

Результаты многовариантного численного моделирования процессов релаксации и ползучести соляных образцов представлены на рис. 3.9 и рис. 3.10. Соответствующие откалиброванные параметры упруго-вязкопластической модели «неассоциированный Кулон-Мор + Пержина» представлены в табл. 3.10 и табл. 3.11. Как видно из рисунка вязкопластическая модель Пержины позволяет с хорошей точностью описать экспериментальные кривые релаксации. Градиент модельных кривых на их начальном этапе в большей мере совпадает с экспериментом. Нарастание продольной деформации соляных образцов в процессе ползучести данная модель описать вполне способна с приемлемой точностью.

Ассоциированный Объёмный критерий

Для ассоциированного объёмного критерия и вязкопластической модели Пержины система невязок схемы локального интегрирования в матричном виде записывается следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}(\sigma_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \left(\frac{\Phi(\sigma_n, \mathbf{A})}{\sigma_y(\mathbf{A})} \right)^{1/m} - \eta \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Здесь тензор направления пластической деформации теперь не является константным, как при пластическом потенциале Кулона-Мора. Предел текучести для объёмного критерия будет выглядеть как

$$\sigma_y(\mathbf{A}) = \sigma_c \sigma_t. \quad (3.57)$$

Соответствующий системе (3.56) Якобиан принимает вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma} & \mathbf{P} \\ \frac{1}{m\Phi} \left(\frac{\Phi}{\sigma_y} \right)^{1/m} \bar{\mathbf{N}}^T & -\frac{\eta}{\Delta t} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

Графически результаты численных экспериментов для релаксационных процессов и процессов ползучести в соляных образцах изображены на рис. 3.9 и рис. 3.10. Соответствующие откалиброванные параметры упруго-вязкопластической модели для каждого эксперимента указаны в табл. 3.12 и табл. 3.13. Из рисунков можно увидеть адекватное описание экспериментальных данных моделью «ассоциированный объёмный + Пержина».

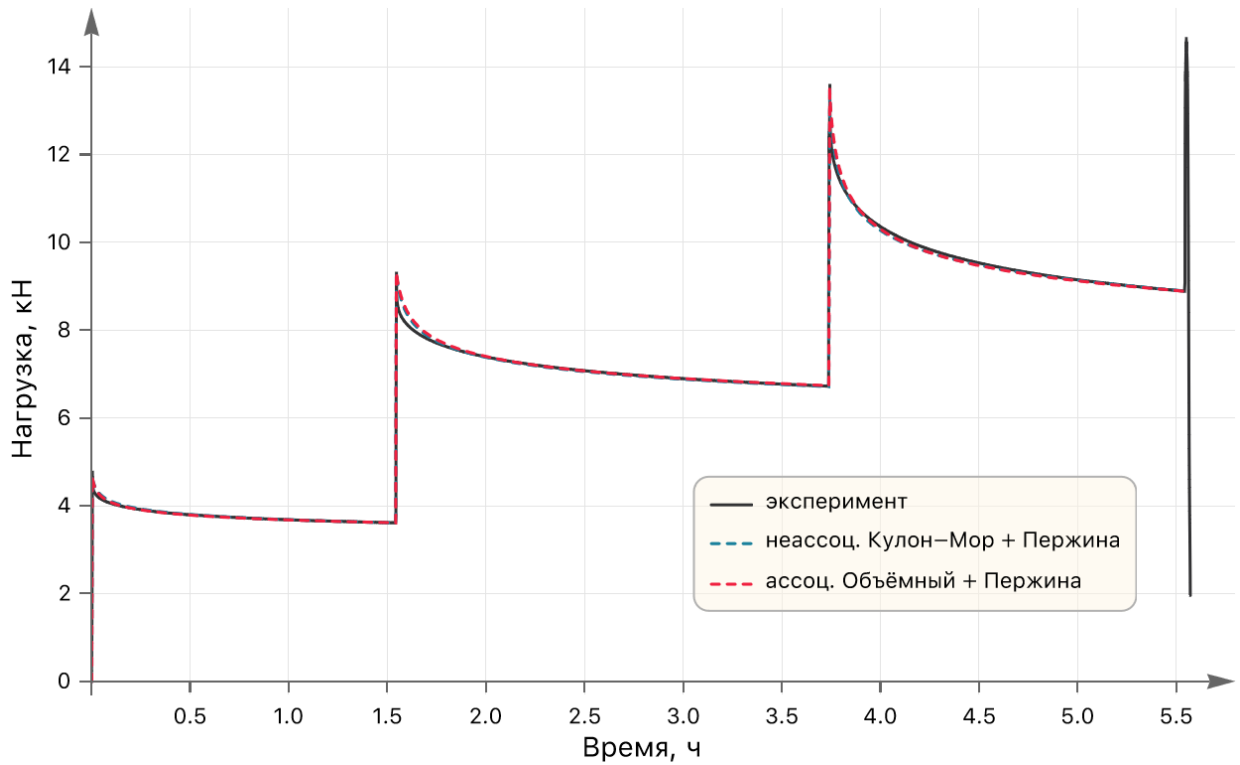


Рисунок 3.9 – Результаты моделирования процессов релаксации образца каменной соли (закон Пержины)

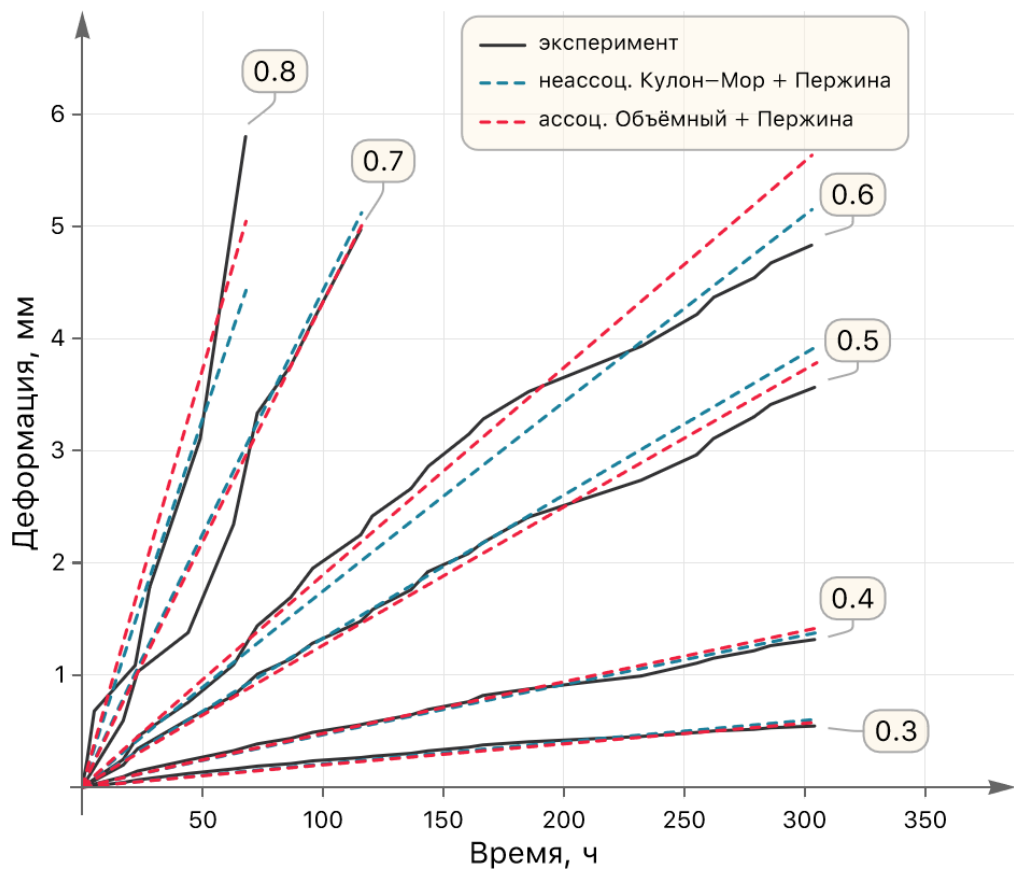


Рисунок 3.10 – Результаты моделирования процессов ползучести образцов красного силвинита при различных степенях нагружения (закон Пержины)

Таблица 3.12

Параметры модели Объёмный + Пержина для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
1	1.8	0.3	1	2.875	$2.78 \cdot 10^5$	0.17
2	1.8	0.3	1	5.2	$6.95 \cdot 10^5$	0.23
3	1.8	0.3	1	6.0	$4.17 \cdot 10^6$	0.24

Таблица 3.13

Параметры модели Объёмный + Пержина

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
0.3	1.5	0.3	1	5	$3.0 \cdot 10^4$	0.4
0.4	1.5	0.3	1	5	$1.6 \cdot 10^5$	0.4
0.5	1.5	0.3	1	5	$3.4 \cdot 10^5$	0.4
0.6	1.5	0.3	1	5	$8.6 \cdot 10^5$	0.4
0.7	1.5	0.3	1	5	$1.1 \cdot 10^6$	0.4
0.8	1.5	0.3	1	5	$1.6 \cdot 10^6$	0.4

Закон Перича

Главным недостатком вязкопластического закона Пержины является двойной предел текучести в случае полного отсутствия временных эффектов в пределе при $m \rightarrow 0$. В дополнение к этому малые значения параметра чувствительности скорости/скоростного упрочнения могут привести к неустойчивому решению. Модель Перича [114] исключает эти недостатки. В программном инженерном комплексе Ansys модель известна, как модель Пирса [127]. Аналитический вид её записывается следующим образом

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^{1/m} - 1 \right]. \quad (3.59)$$

Параметры модели остаются прежними и соответствуют (3.47). В отличие от вязкопластической модели Пержины здесь под знак степени заключено

нормированное эффективное напряжение. Выражение для σ_e можно представить в терминах функции текучести

$$\sigma_e(\sigma, \mathbf{A}) = \Phi(\sigma, \mathbf{A}) + \sigma_y(\mathbf{A}). \quad (3.60)$$

Запись уравнения (3.59) с учётом (3.60) для дискретного инкремента по времени в виде невязки будет выглядеть так

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\sigma, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta \lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0. \quad (3.61)$$

Очевидно, что в пределе при $m = 0$ уравнение (3.61) восстанавливается в уравнение поверхности текучести.

Неассоциированный критерий Кулона-Мора

Рассматривая случай, когда тензор напряжений принадлежит грани многогранной поверхности текучести, система невязок запишется как

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta \lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}_1 = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta \lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Также соответствующий Якобиан примет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{m \eta \sigma_y}{\Delta t} \left(\frac{\eta \Delta \lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Из этого выражения очевидно, что Якобиан определён для всех значений вязкопластических параметров, а также для начального приближения (3.17) итерационного процесса Ньютона-Рафсона.

В другом случае, когда тензор напряжений принадлежит одному из рёбер поверхности текучести, система невязок в пространстве главных напряжений для секстанта $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ будет иметь вид

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + D^e (\Delta\lambda_1 N_1 + \Delta\lambda_{2,6} N_{2,6}) = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_1} \equiv \Phi_1(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta\lambda_1 + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda_{2,6}} \equiv \Phi_{2,6}(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta\lambda_{2,6} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Соответствующее выражение для Якобиана системы запишется как

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_{2,6} \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T & -\frac{m\eta\sigma_y}{\Delta t} \left(\frac{\eta\Delta\lambda_1 + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} & 0 \\ \bar{\mathbf{N}}_{2,6}^T & 0 & -\frac{m\eta\sigma_y}{\Delta t} \left(\frac{\eta\Delta\lambda_{2,6} + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Результаты многовариантного численного моделирования процессов релаксации и ползучести соляных образцов представлены в виде диаграмм на рис. 3.11 и рис. 3.12. Откалиброванные параметры упруго-вязкопластической модели «неассоциированный Кулон-Мор + Перич» для каждого численного эксперимента указаны в табл. 3.14 и табл. 3.15. Из рисунков видно, что модельные кривые адекватно описывают как релаксационные испытания, так и экспериментальные диаграммы ползучести соляных образцов.

Таблица 3.14

Параметры модели Кулон-Мор + Перич для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
0.3	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.25
0.4	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.3
0.5	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.28
0.6	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.3
0.7	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.28
0.8	1.5	0.3	1.7	30	18	10^5	0.28

Таблица 3.15

Параметры модели Кулон-Мор + Перич для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
1	1.8	0.3	1.125	30	18	$5.56 \cdot 10^3$	0.06
2	1.8	0.3	1.85	30	18	$5.56 \cdot 10^4$	0.06
3	1.8	0.3	1.95	30	18	$5.56 \cdot 10^5$	0.07

Ассоциированный Объёмный критерий

Рассматривая в качестве поверхности текучести и пластического потенциала объёмный критерий, система невязок неявной схемы Эйлера алгоритма обратного отображения для локального интегрирования будет иметь вид

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{N}(\sigma_n, \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi(\sigma_n, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta\lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Соответствующий Якобиан запишется как

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma} & \mathbf{P} \\ \bar{\mathbf{N}}^T & -\frac{m\eta\sigma_y}{\Delta t} \left(\frac{\eta \Delta\lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Результаты многовариантных численных экспериментов для процессов релаксации и ползучести при различных степенях нагружения изображены на рис. 3.11 и рис. 3.12 вместе с результатами лабораторных испытаний. Соответствующие параметры, полученные в результате калибровки, модели представлены в табл. 3.16 и табл. 3.17. Как видно из рисунков, экспериментально полученные диаграммы релаксации и ползучести могут быть адекватно описаны с помощью упруго-вязкопластической модели «ассоциированный Объёмный + Перич».

Таблица 3.16

Параметры модели Объёмный + Перич для релаксации

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
1	1.8	0.3	1	3.4	$2.78 \cdot 10^5$	0.15
2	1.8	0.3	1	4.93	$2.78 \cdot 10^6$	0.18
3	1.8	0.3	1	5.05	$2.78 \cdot 10^7$	0.2

Таблица 3.17

Параметры модели Объёмный + Перич для ползучести

Степень нагружения	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, час	Чувствительность скорости
0.3	1.5	0.3	1	5	$2.2 \cdot 10^5$	0.3
0.4	1.5	0.3	1	5	$1.9 \cdot 10^6$	0.3
0.5	1.5	0.3	1	5	$5.9 \cdot 10^6$	0.3
0.6	1.5	0.3	1	5	$2.1 \cdot 10^7$	0.3
0.7	1.5	0.3	1	5	$3.9 \cdot 10^7$	0.3
0.8	1.5	0.3	1	5	$6.8 \cdot 10^7$	0.3

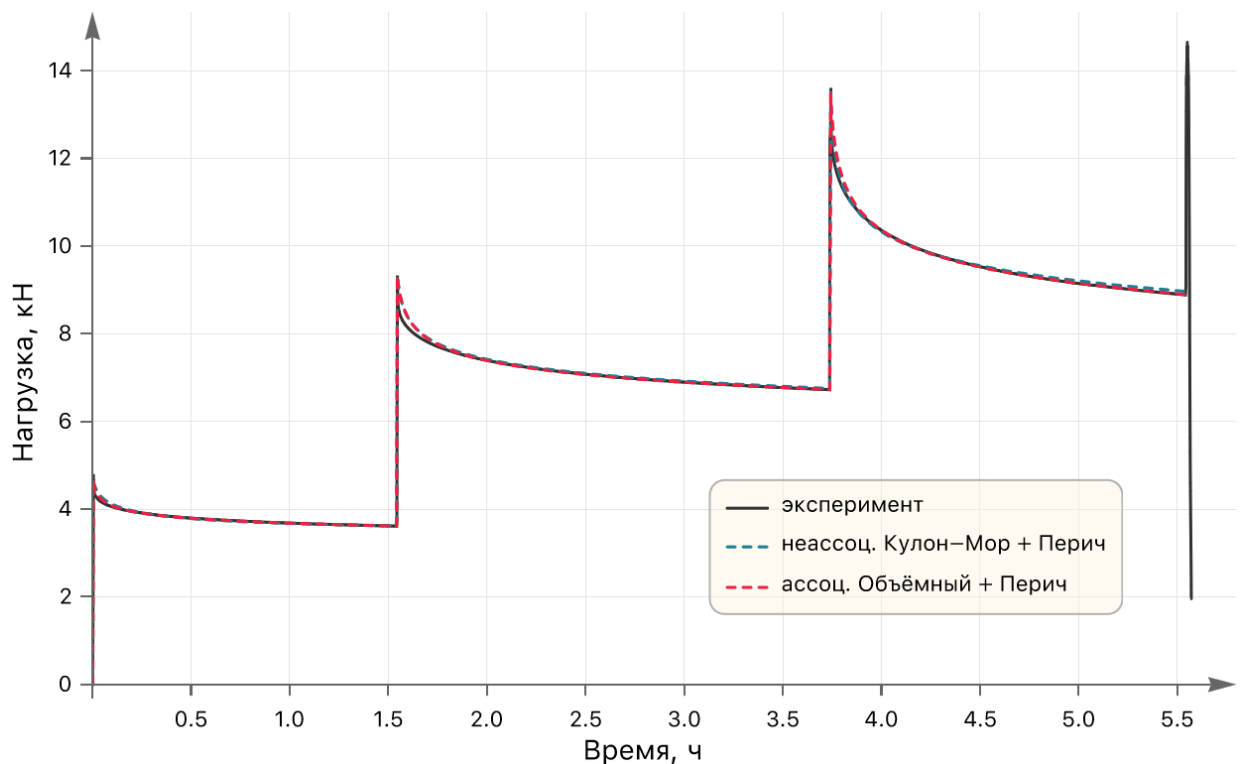


Рисунок 3.11 – Результаты моделирования процессов релаксации образца каменной соли (закон Перича)

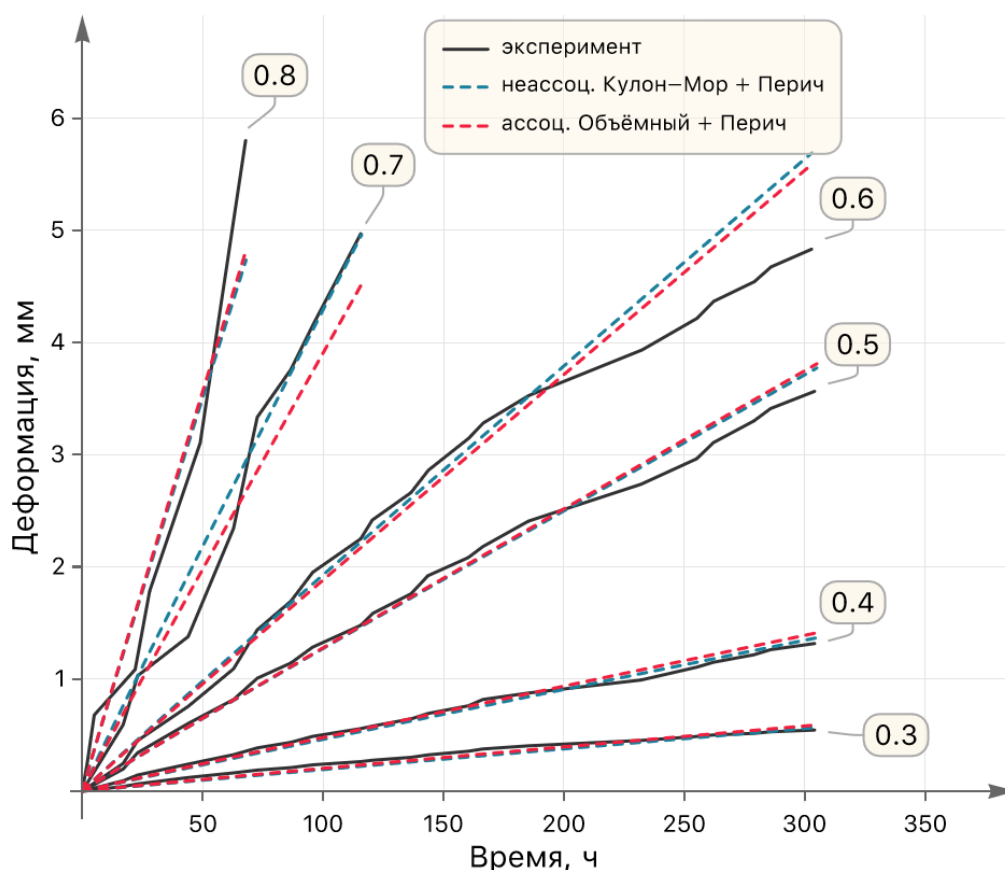


Рисунок 3.12 – Результаты моделирования процессов ползучести образцов красного силвинита при различных степенях нагружения (закон Перича)

В отличие от вязкоупругой модели деформирования вязкопластическая позволяет выделить области разрушения моделируемого материала по заданному критерию прочности. На рис. 3.13 представлено разрушение соляного образца во времени по его вертикальному сечению вследствие сдвига и отрыва для степени нагружения равной 0.6. Сдвиговым разрушением считался выход напряжений в зону пластичности при действии всех отрицательных (сжимающих) главных напряжениях ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$), а разрушением отрыва – при $\sigma_1 > 0$. При численной реализации конечный элемент считался разрушенным, если больше, чем в половине его точек интегрирования выполнялось условие пластичности с соответствующими напряжениями. Из рисунка видно, что в центральном сечении образца преобладает разрушение за счёт отрыва. Сдвиговые разрушения локализуются верхней и нижней половинах образца. Области разрушения за счёт сдвига имеют практически плоскую форму в горизонтальном сечении. В процессе

ползучести развиваются в основном сформировавшиеся здесь области разрушения за счёт отрыва, причём практически только около краевых частей соляного образца.

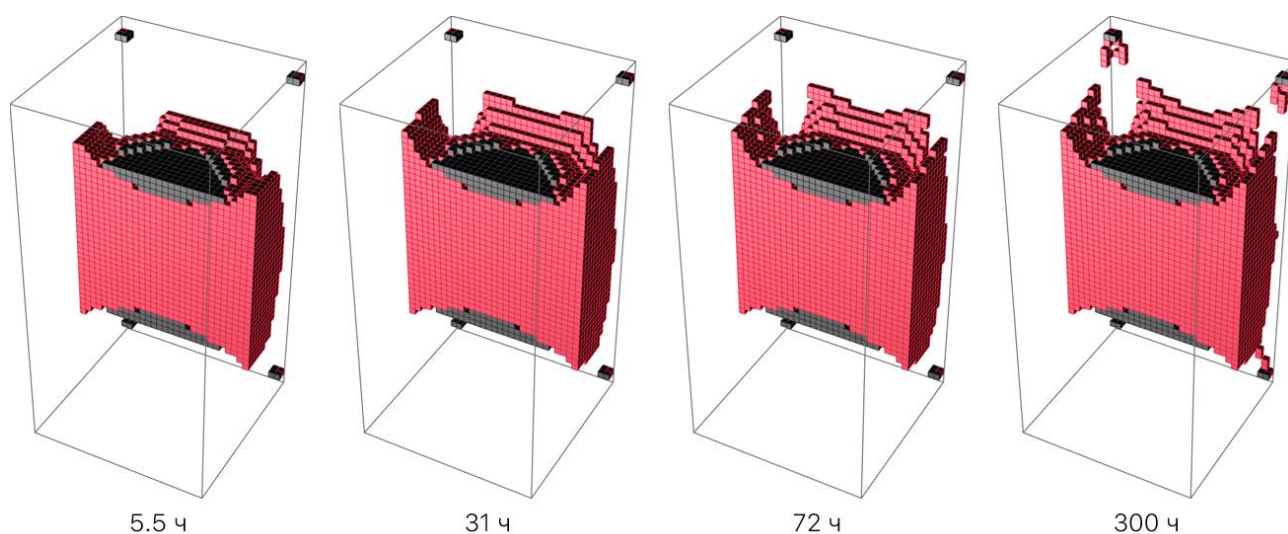


Рисунок 3.13 – Разрушение соляного образца во времени по его центральному вертикальному сечению вследствие сдвига (■) и отрыва (■) в соответствии с ассоциированным объёмным критерием пластичности и законом вязкопластического деформирования Перича при степени нагружения 0.6

3.4 Выводы

1. Показано, что все законы вязкопластичности (Бингама, Дюво-Лионса, Пержины и Перича), совмещённые с критериями Кулона-Мора и объёмным параболическим, отражают нарастание продольной деформации соляных образцов в процессе ползучести, в то время как релаксационные процессы способны приемлемо описать только двухпараметрические законы (Пержины и Перича).

2. Установлено, что использование закона Перича характеризуется относительно простым, стабильным параметрическим обеспечением и приемлемо описывают стадию установившейся ползучести. При этом варьирование исключительно параметров вязкости при фиксированных параметрах пластичности выглядит привлекательным с точки зрения калибровки математической модели.

3. Использование вязкопластической модели деформирования позволяет выделить по заданному критерию прочности области разрушения, формирующиеся в процессе ползучести.

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКОВ

В пределах Верхнекамского месторождения солей (ВКМС) отработка сильвинитовых пластов (АБ и КрII) ведётся камерной системой с ленточными целикам. Такая система разработки месторождений полезных ископаемых исторически широко используется в мировой горной практике [128-131] и обеспечивает поддержание на междукammerных целиках вышележащей толщи пород в течение регламентированного технологического срока. Это достигается за счёт принятия оптимальных параметров камерной системы разработки (ширины камер и целиков, вынимаемой мощности) в соответствии с действующими на месторождениях нормативными и методическими документами [8,9,132,133] или на основании конкретных научных исследований [134-137]. Вместе с тем достаточно часто существующие математические модели с их расчётными параметрами не обеспечивают заданный срок службы несущих элементов камерно-столбовой системы разработки. В связи с этим важным является использование новых подходов к математическому описанию и численному анализу деформационного поведения междукammerных целиков с их натурным контролем.

Наиболее простым способом контроля состояния выработанного пространства является его визуальное обследование (рис. 4.1). Оно позволяет зафиксировать появление видимых трещин на обнажениях и оценить развитие расслоений в кровле, почве и стенках очистных и подготовительных выработок. Однако, обследования всегда носят субъективный характер и не позволяют количественно оценить динамику происходящих процессов.

Способы контроля междукammerных целиков можно разделить на методы, связанные с определением их напряженного состояния, косвенные геофизические оценки и инструментальные измерения деформаций. Методы первой группы основаны на измерениях деформаций разгрузки части массива с последующим

пересчётом их в напряжения, либо на регистрации силового взаимодействия измерительного элемента с окружающими породами [138,139].

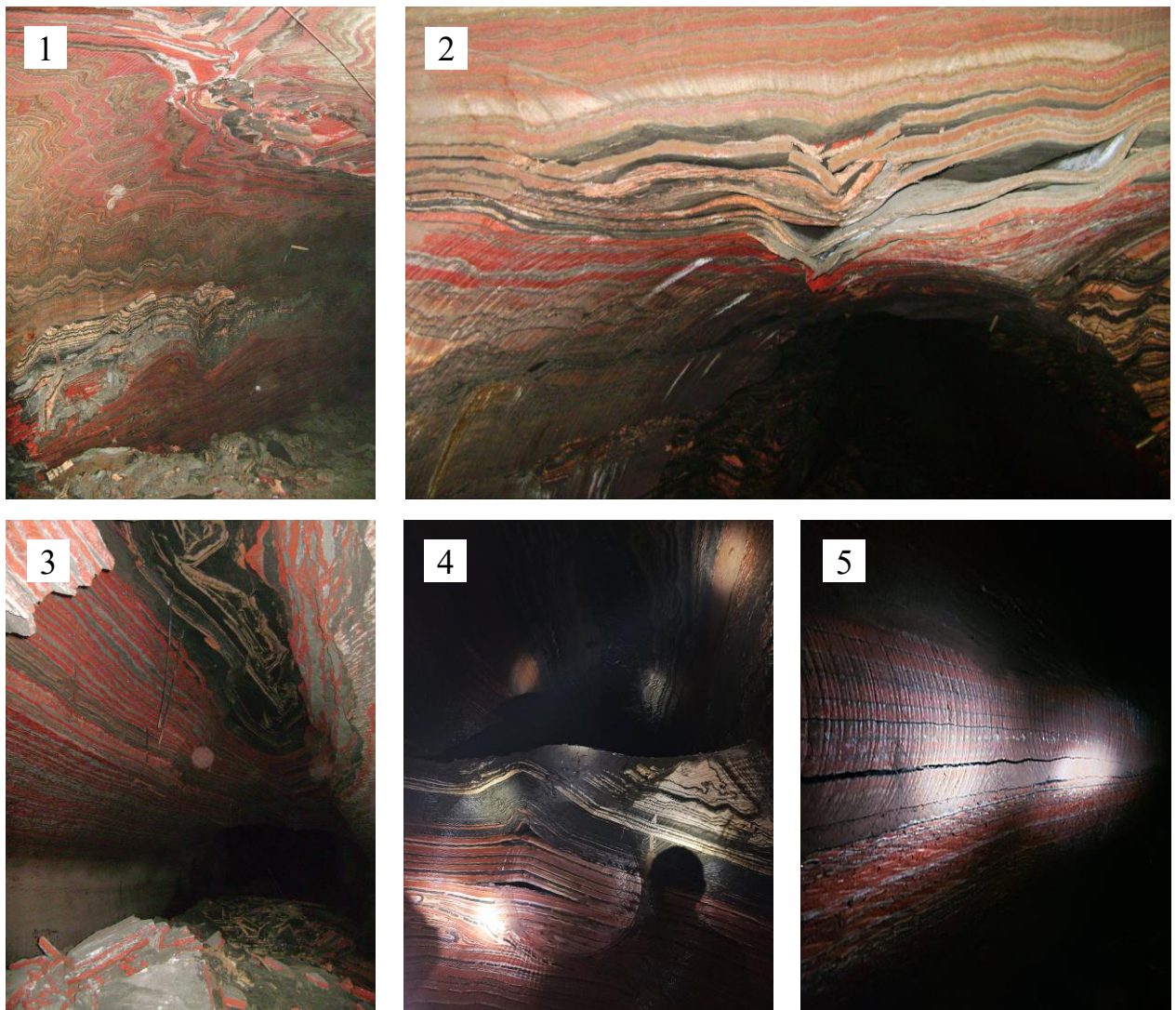


Рисунок 4.1 – Визуальное обследования выработок на ВКМС:

- 1 – латеральные трещины в стенке и кровле;
- 2 – расслоение в кровле; 3 – обрушение кровли;
- 4 – расслоение (пучение) почвы;
- 5 – латеральная трещина в стенке

К этому же ряду методов относятся компенсационные способы, базирующиеся на скважинной или щелевой разгрузке массива и последующим восстановлением напряжений с помощью скважинных гидродомкратов и плоских гидроподушек [140,141], а также измерения напряжений с использованием различных эффектов памяти горных пород [142,143]. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки. Общим для них является относительно высокая трудоёмкость, что

делает проблематичным их использование для оперативного контроля устойчивости междукammerных целиков.

В определённой степени вышесказанное относится и к геофизическим методам, которые основаны на исследовании взаимосвязи параметров физических полей (естественных или искусственно наведённых) с действующими напряжениями [144-146]. Несомненным лишь их преимуществом является возможность площадного контроля состояния массива. В то же время геофизические методы не обеспечивают получения однозначных количественных оценок состояния массива в связи со значимым влиянием различных факторов на интенсивность измеряемого поля.

Таким образом, наиболее приемлемыми методами оперативного контроля состояния междукammerных целиков представляются деформационные измерения с помощью различных конструкций замерных станций [112,147]. Это объясняется отсутствием необходимости модельных пересчётов получаемых результатов, простотой измерения и возможностью их перевода в «on-line» режимный контроль [148].

4.1 Натурные исследования

В качестве основных показателей деформационного контроля междукammerных целиков используются их продольная и поперечная деформации (скорость деформации). На рис. 2.5 было показано соотношение продольных и поперечных деформаций МКЦ, полученное по результатам натурных измерений и лабораторных исследований деформирования соляных образцов. Отметим хорошее согласование между этими экспериментальными исследованиями, что является косвенным свидетельством адекватности деформационных процессов, протекающих в образце и целике, в условиях одноосного сжатия.

Для детального изучения процессов деформирования камерного блока сооружаются замерные станции (рис. 4.2), представляющие собой систему глубинных и контурных реперов (рис. 4.3), расположенных в одном сечении на

обоих отрабатываемых пластах АБ и КрII. Замерная станция предусматривает изучение процессов поперечного деформирования целиков на обоих пластах, их вертикальную деформацию, контроль расслоения кровли пласта АБ и междупластья АБ–КрII, а также определение суммарной вертикальной деформации камерного блока АБ–КрII.

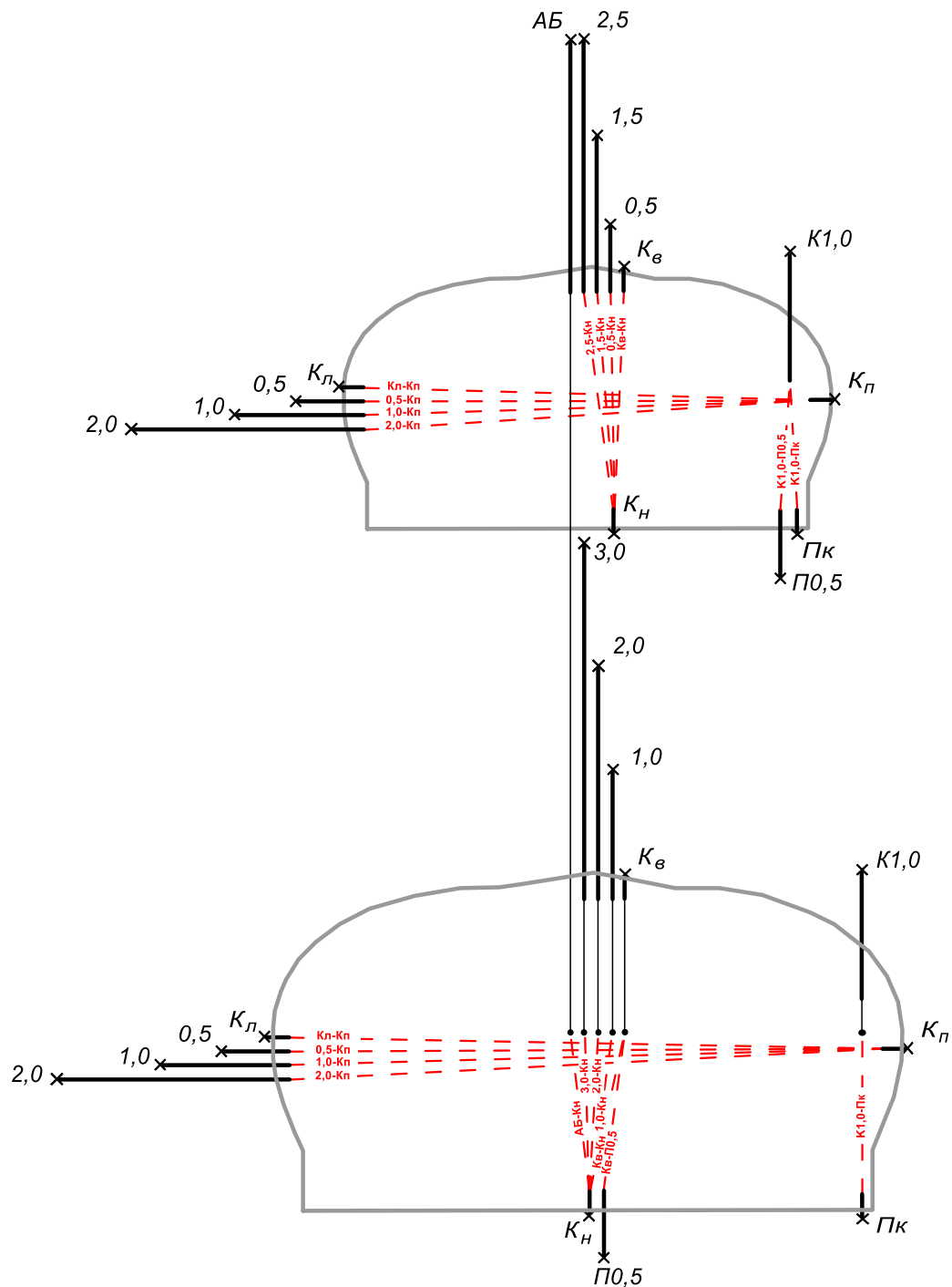


Рисунок 4.2 – Конструкция замерной станции с глубинными и контурными реперами

Измерение деформаций осуществляется ленточным экстензометром SisGeo (рис. 4.4). Данный прибор предназначен для точных измерений расстояний между двумя постоянно установленными точками. Он представляет собой переносное устройство, снабжённое стальной измерительной лентой с равномерно расположенными перфорационными отверстиями и циферблатным индикатором. Индикатор прибора позволяет снимать показания с точностью 10^{-2} мм.



Рисунок 4.3 – Контурный репер

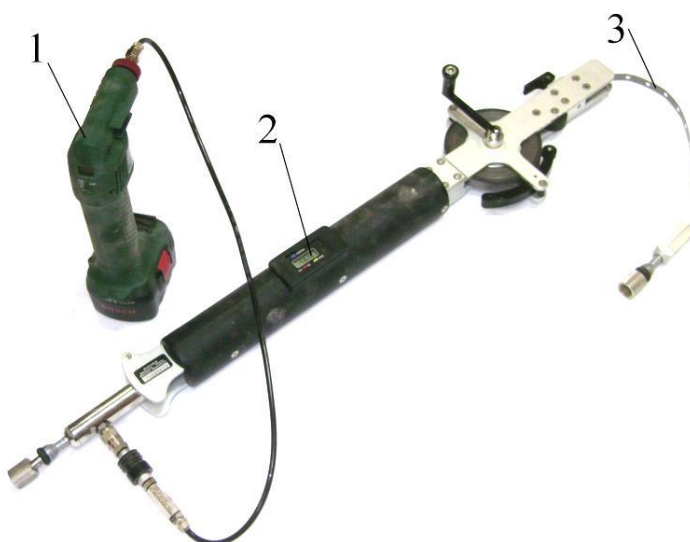


Рисунок 4.4 – Ленточный экстензометр SisGeo:
1 – насос с манометром; 2 – циферблатный индикатор;
3 – измерительная лента с перфорацией.

В качестве глубинных реперов используются клиновые анкеры с распорной муфтой. Анкера различной длины (согласно конструкции замерной станции) закрепляются в шпуров диаметром 42 мм путём расклинивания сухарей установочной трубой. На конце реперов нарезана резьба для присоединения к ленточному экстензометру.

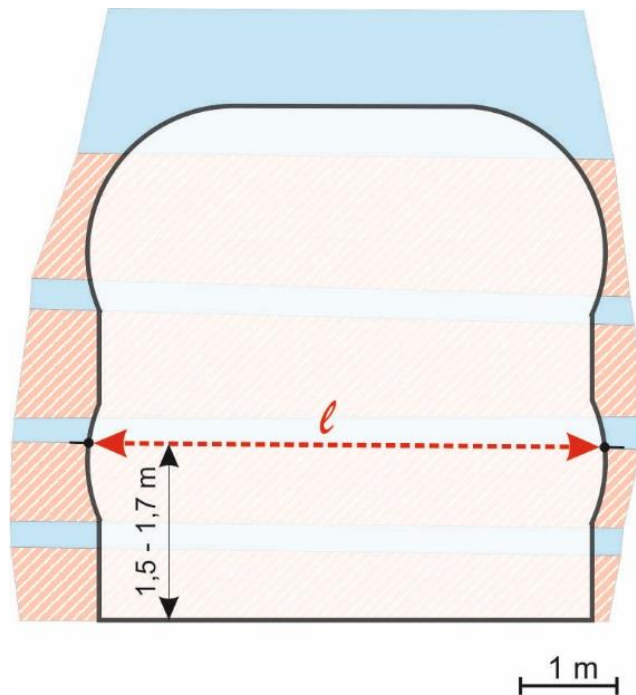


Рисунок 4.5 – Схема измерения горизонтальной конвергенции камер

Оперативный контроль деформаций междукамерных целиков может осуществляться путём измерения горизонтальной конвергенции очистных камер с последующей оценкой вертикальной компоненты из уравнения (2.1).

По результатам численных расчётов распределения деформаций на контуре очистных камер установлено, что вне зависимости от формы выработки наибольшие поперечные деформации целика развиваются на высоте, равной примерно половине вынимаемой мощности. При этом в многоходовых камерах в зоне наложения ходов возможно формирование локальных зон пластических деформаций. Для получения достоверных результатов инструментального контроля, измерения горизонтальной конвергенции проводятся в наибольшей по ширине части камеры на высоте 1,5–1,7 м от почвы выработки (рис. 4.5). По результатам измерений определяется суммарная горизонтальная конвергенция

(изменение горизонтального расстояния) между двумя жёстко закреплёнными на противоположных стенках камеры точками и относительная скорость поперечного деформирования целиков.

На начальном этапе контроля устойчивости междукammerных целиков измерения горизонтальной конвергенции выполняют, как правило, не реже 1 раза в 3 месяца. В дальнейшем в зависимости от скорости деформирования целиков периодичность контроля корректируют.

Для изучения процессов деформирования элементов системы разработки было смонтировано 7 комплексных замерных станций, оборудованных глубинными и контурными реперами на рудниках ПАО «Уралкалий»: СКРУ-3 (3 панель, 15 панель), БКПРУ-4 (10 ЮВП, 1 ЮЗП, 2 СЗП) и БКПРУ-2 (18 ЗП). Сводная характеристика наиболее представительных 4 экспериментальных участков приведена в Приложении А. Соответствующие результаты натурных наблюдений за деформацией камерных блоков изображены в Приложении Б.

4.2 Математическая модель ползучести в варианте плоско-деформированного состояния

При использовании камерной системы отработки с целиками ленточной формы напряжённое состояние подработанного массива является близким к плоскому деформированному (ПДС). В таком случае можно перейти от трёхмерной модели деформирования междукammerных целиков к двухмерной.

Как известно, в условиях ПДС для линейного закона Гука компонента тензора напряжений, соответствующая напряжению вдоль оси (z) перпендикулярной плоскости деформирования (x - y), линейно зависима от двух других

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (4.1)$$

где ν это коэффициент Пуассона. Однако, напряжённое состояние и тензор направления неупругих деформаций по-прежнему остаются объёмными. Также суммарная деформация вдоль перпендикулярной плоскости деформирования оси

равна нулю. Таким образом, ввиду предположения об аддитивном разложении полной деформации на упругую и неупругую составляющие

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{in} \quad (4.2)$$

и согласно [149-152] выражения для компонент тензора напряжений для условий ПДС в матричном представлении записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \sigma &= D_{2D}^e (\varepsilon - \Theta), \\ \sigma_z &= \nu \mu^T \sigma - E \varepsilon_z^{in}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где Θ это двухмерная версия тензора неупругих деформаций для условий ПДС

$$\Theta = \varepsilon^{in} + \nu \mu \varepsilon_z^{in}, \quad (4.4)$$

E здесь модуль Юнга, ε_z^{in} – компонента тензора неупругих деформаций вдоль оси перпендикулярной плоскости деформации. Матричная запись (нотация Фойгта) остальных элементов, составляющих выражения (4.3) и (4.4), принимает вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x = \sigma_{xx} \\ \sigma_y = \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} = \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^{in} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{in} = \varepsilon_{xx}^{in} \\ \varepsilon_y^{in} = \varepsilon_{yy}^{in} \\ \gamma_{xy}^{in} = 2\varepsilon_{xy}^{in} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$D_{2D}^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

Как можно заметить, компонента напряжений σ_z для условий ПДС зависит не только от компонент тензора напряжений в плоскости деформирования, но и от неупругой деформации вдоль перпендикулярной оси z . Компонента ε_z^{in} тензора неупругих деформаций в условиях ПДС, в свою очередь, является параметром внутреннего состояния наряду с другими параметрами. Из чего можно заключить, что форма и положение поверхности текучести также зависит от накопленной необратимой деформации вдоль оси z . В этой связи, в систему определяющих соотношений добавляется уравнение, отвечающее за изменение параметра

$$\dot{\varepsilon}_z^{in} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z}. \quad (4.6)$$

Преобразование уравнения поверхности текучести в пространстве главных напряжений для условий ПДС осуществляется путём замены средней компоненты тензора напряжений выражением

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3) - E\varepsilon_2^{in}, \quad (4.7)$$

где плоскость, построенная на главных осях σ_1 - σ_3 , копланарна с декартовой плоскостью x - y , в то время как, $\sigma_2 = \sigma_z$ и $\varepsilon_2^{in} = \varepsilon_z^{in}$, что вытекает из формулировки условий плоской деформации. Вместе с тем, если поверхность текучести представляется в многогранном виде, то главная плоскость σ_1 - σ_3 разделяется на шесть зон:

$$\begin{aligned} \Omega_{123} &= \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, & \Omega_{321} &= \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1, \\ \Omega_{132} &= \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, & \Omega_{312} &= \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2, \\ \Omega_{213} &= \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3, & \Omega_{231} &= \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Например, для критерия пластичности Кулона-Мора в главной плоскости σ_1 - σ_3 будут действовать все шесть её граней:

$$\begin{aligned} \Omega_{123} &\supset \Phi_{123} = \Phi_1, & \Omega_{321} &\supset \Phi_{132} = \Phi_4, \\ \Omega_{132} &\supset \Phi_{132} = \Phi_6(\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \varepsilon_2^{in})), & \Omega_{312} &\supset \Phi_{132} = \Phi_5(\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \varepsilon_2^{in})), \\ \Omega_{213} &\supset \Phi_{213} = \Phi_2(\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \varepsilon_2^{in})), & \Omega_{231} &\supset \Phi_{132} = \Phi_3(\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \varepsilon_2^{in})). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если рассматривается полуплоскость $\sigma_1 \geq \sigma_3$ аналогично секстанту $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ в трёхмерном случае, то в расчётах эксплуатируются только первые три зоны: Ω_{123} , Ω_{132} и Ω_{213} . С учётом вышеописанного вид поверхности текучести для критерия Кулона-Мора будет иметь вид, изображённый на рис. 4.6. В свою очередь, поверхность текучести объёмного критерия прочности [118] не будет зависеть от зон (4.8), поскольку инвариантна к ним (критерий построен на инвариантах). Как было показано во второй главе (рис. 2.15), поверхность текучести такого критерия прочности в плоскости главных напряжений σ_1 - σ_3 для условий ПДС имеет форму эллипса, размер которого зависит от коэффициента Пуассона.

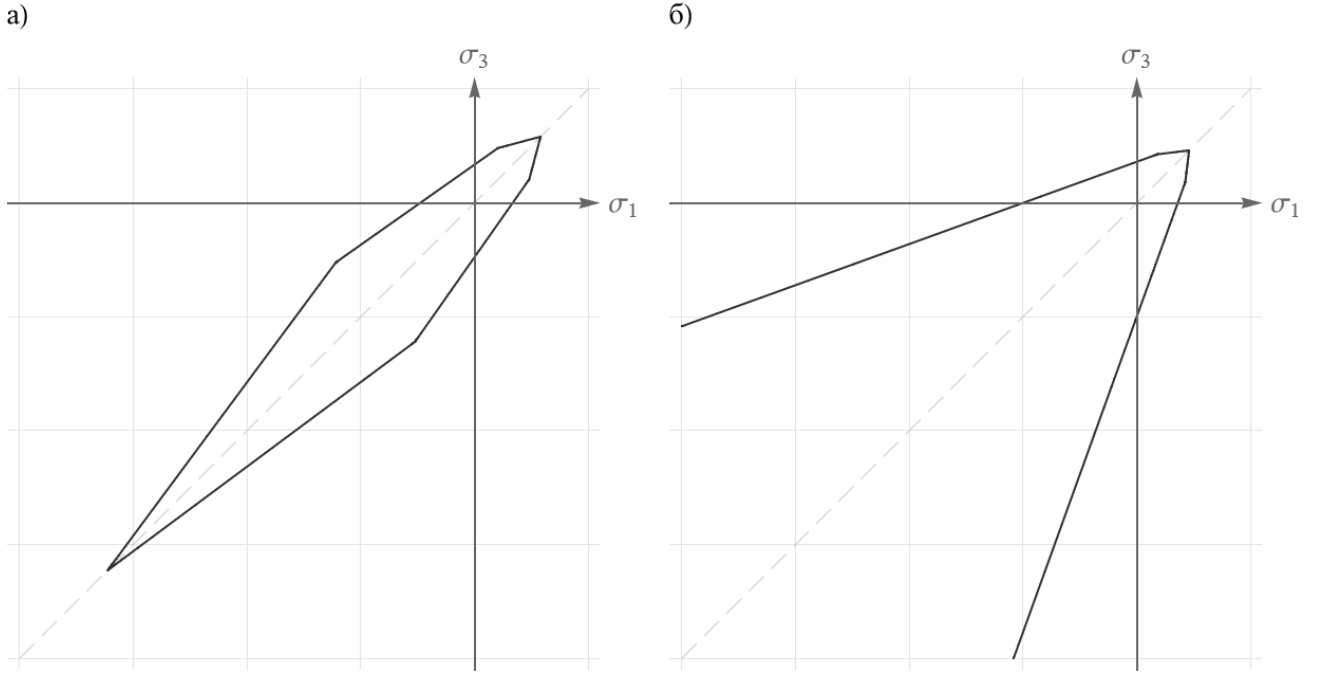


Рисунок 4.6 – Поверхность текучести Кулона-Мора для условий ПДС, где коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и:
а) $\phi < \arcsin(1 - 2\nu)$, б) $\phi \geq \arcsin(1 - 2\nu)$

Помимо преобразования уравнения поверхности текучести необходимо также адаптировать локальную схему интегрирования к условиям плоской деформации. Как было показано выше, множество параметров внутреннего состояния дополняется параметром накопленной неупругой деформации вдоль оси перпендикулярной плоскости деформирования, развитие которого подчиняется закону (4.6). Запись (4.6) в пространстве главных напряжений имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_2^{in} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_2}. \quad (4.10)$$

Дискретная запись этого уравнения в виде невязки алгоритма обратного отображения выглядит следующим образом

$$\mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{in} - \varepsilon_{2,n-1}^{in} - \Delta \lambda N_2^{3D}(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \mathbf{A}) = 0, \quad (4.11)$$

где $\varepsilon_{2,n-1}^{in}$ это накопленная неупругая деформация вдоль оси z на предыдущем сошедшемся шаге по времени и

$$N_2^{3D}(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \mathbf{A}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_2} \right|_{\sigma_n, \varepsilon_{2,n}^{in}, \mathbf{A}}. \quad (4.12)$$

Таким образом, общий вид системы невязок неявной схемы локального интегрирования вязкопластических соотношений алгоритма обратного отображения для условий ПДС в пространстве главных напряжений в матричной форме принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n^{2D} - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda D_{2D}^e \Theta_\Delta(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}), \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{\text{in}} - \varepsilon_{2,n-1}^{\text{in}} - \Delta\lambda N_2^{3D}(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}), \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv f(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}, \mathbf{A}, \mathbf{P}) - \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

где, соответственно, векторы невязок и неизвестных системы

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_\lambda)^T, \\ \mathbf{v} &= (\sigma_n^{2D}, \varepsilon_2^{\text{in}}, \Delta\lambda)^T. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Вектор начального приближения итерационного процесса Ньютона-Рафсона для решения нелинейной системы (4.13) выглядит как

$$\mathbf{v}_0 = (\sigma^{\text{trial}}, \varepsilon_{2,n-1}^{\text{in}}, 0)^T. \quad (4.15)$$

Общий вид якобиана системы (4.13) записывается следующим образом

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2D} + \Delta\lambda D_{2D}^e \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \sigma_{2D}} & \Delta\lambda D_{2D}^e \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & \mathbf{P}_{2D} \\ -\Delta\lambda \left(\frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \sigma_{2D}} \right)^T & 1 - \Delta\lambda \frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & -N_2^{3D} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \sigma_{2D}} \right)^T & \frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Матричная запись элементов, составляющих выражения (4.13)-(4.16), соответствует

$$\begin{aligned} \sigma^{2D} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \Theta_\Delta = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma^{2D}} + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_2}, \quad \mathbf{P}_{2D} = D_{2D}^e \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \sigma^{2D}}, \\ \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \sigma^{2D}} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1^{3D}}{\partial \sigma^{2D}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial N_3^{3D}}{\partial \sigma^{2D}} \right)^T \end{bmatrix} + \nu \mathbf{e} \left(\frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \sigma^{2D}} \right)^T, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Средняя компонента напряжений σ_2 в них заменяется согласно (4.7).

Применение алгоритма обратного отображения в пространстве главных напряжений проводилось аналогично трёхмерному случаю с помощью спектрального разложения (2.17). Для двумерного случая собственные значения определяются так же через главные инварианты симметричного тензора второго ранга

$$x_1 = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_3}}{2}, \quad x_2 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_3}}{2}, \quad (4.18)$$

которые соответствуют главным напряжениям $\sigma_1 = \sigma_{\max} = x_1$ и $\sigma_3 = \sigma_{\min} = x_2$. Проекции на собственные пространства для двух отличающихся друг от друга собственных значений ($p = 2, x_1 \neq x_2$) вычисляются согласно

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{2x_j - I_1} \left[\sigma^2 + (x_j - I_1) \mathbf{I}_{2D} \right], \quad j = 1, 2. \quad (4.19)$$

Иначе если $x_1 = x_2$ ($p = 1$), тогда

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_{2D}. \quad (4.20)$$

4.3 Численная реализация вязкопластической модели Перича

В предыдущей главе было показано, что вязкопластическая модель Перича в сочетании с рассмотренными критериями пластичности характеризуется относительно простым параметрическим обеспечением и приемлемо описывает стадию установившейся ползучести. Попробуем реализовать данную модель для условий плоской деформации.

В варианте ПДС глобальная схема интегрирования по времени остаётся прежней – автоматическая схема Ньютона-Рафсона с подшагами и контролем ошибки. Геометрическое представление конечно-элементной модели междокамерных целиков построено с помощью симплекс-элементов. Рассматривался стандартный для рудников Верхнекамского месторождения двухпластовый камерный блок, отражающий отработку сильвинитовых пластов АБ и КрII комбайнами Урал-20Р (рис. 4.7).

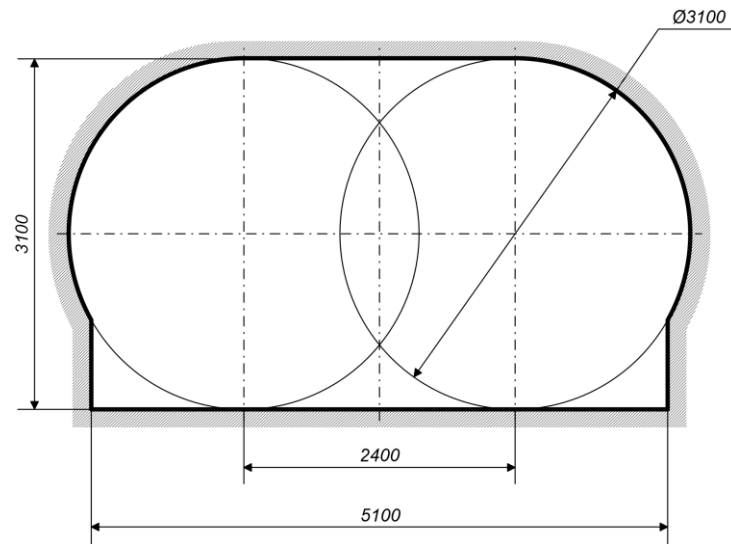


Рисунок 4.7 – Геометрия сечения выработки, проходимой комбайном Урал-20Р

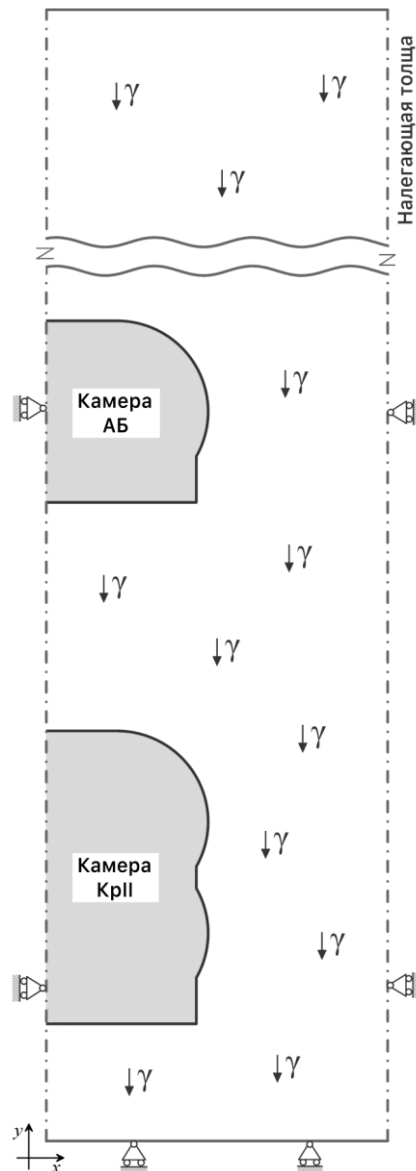


Рисунок 4.8 – Принципиальная расчётная схема камерного блока

Параметры ходов в выработках соответствовали экспериментальному участку, где заложена наблюдательная станция №4, и указаны в Приложении А. Слоистое строение породного массива не учитывалось. Принципиальная расчётная схема камерного блока показана на рис. 4.8. Вертикальные оси симметрии проходят через середины камер и междукamerных целиков, что соответствует условиям полной подработки. Высота налегающей толщи в расчётной схеме учитывалась в натуральную величину. Глубина породного массива от почвы камеры КрII составляла 30 м. Весь массив находится под действием сил гравитации. Граничные условия задавались следующим образом. Горизонтальные перемещения ограничивались по осям симметрии и вертикальные – на нижней грани расчётной схемы.

Расчётный алгоритм процесса деформирования во времени междукamerных целиков двухкamerного блока под действием массовых сил проводился пошагово. Первый этап численных экспериментов состоял из определения в условиях гравитации упругого напряжённого состояния нетронутого массива σ^{intact} , т.е. без камер в продуктивных пластах. Из полученного поля напряжений пересчитывался вектор внешних узловых сил $F_{\text{intact}}^{\text{ext}}$. Затем из конечно-элементной сетки исключались элементы, принадлежащие выработанному пространству и из поля σ^{intact} вычислялся новый вектор внешних узловых нагрузок $F_{\text{mined}}^{\text{ext}}$, соответствующий модифицированной сетке. Далее определялся вектор

$$F_{\text{diff}}^{\text{ext}} = F_{\text{intact}}^{\text{ext}} - F_{\text{mined}}^{\text{ext}}. \quad (4.21)$$

Результирующий вектор $F_{\text{diff}}^{\text{ext}}$ и поле напряжений σ^{intact} вместе образуют начальное условие для определения отсчётного поля напряжений σ_0 основного решения задачи о деформировании междукamerных целиков во времени за счёт ползучести. С этого момента скорость внешних узловых сил равна нулю

$$\dot{F}^{\text{ext}} = 0. \quad (4.22)$$

Апробирование вязкопластической модели деформирования соляных образцов на задаче о деформировании двухпластового камерного блока в

состоянии ползучести проводилось с использованием ассоциированного объёмного критерия [118] и вязкопластической модели Перича. Соответствующая система невязок локальной схемы интегрирования для условий ПДС в пространстве главных напряжений записывается следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n^{2D} - \sigma^{\text{trial}} + \Delta\lambda D_{2D}^e \Theta_\Delta(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}), \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{\text{in}} - \varepsilon_{2,n-1}^{\text{in}} - \Delta\lambda N_2^{3D}(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}), \mathbf{A}) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \Phi_{2D}(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}, \mathbf{A}) - \sigma_y(\mathbf{A}) \left[\left(\frac{\eta \Delta\lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^m - 1 \right] = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Соответствующий якобиан системы принимает вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda D_{2D}^e \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \sigma^{2D}} & \Delta\lambda D_{2D}^e \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & \mathbf{P}_{2D} \\ -\Delta\lambda \left(\frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \sigma^{2D}} \right)^T & 1 - \Delta\lambda \frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & -N_2^{3D} \\ \bar{\mathbf{N}}_{2D}^T & \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} & -\frac{m\eta\sigma_y}{\Delta t} \left(\frac{\eta \Delta\lambda + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Для ассоциированного объёмного критерия производные принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \sigma^{2D}} &= \begin{bmatrix} a & a-3 \\ a-3 & a \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} = -E \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \sigma^{2D}} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \varepsilon_2^{\text{in}}} = -2E, \\ a &= 2(\nu^2 - \nu + 1), \\ b &= 2\nu - 1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Также запись выражений для поверхности текучести и её производной, принятых здесь, имеет вид

$$\Phi_{2D} = \Phi(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{\text{in}}), \mathbf{A}), \quad \bar{N}_{2D} = \frac{\partial \Phi_{2D}}{\partial \sigma^{2D}}. \quad (4.26)$$

Отсчётное поле напряжений определялось как сумма упругих решений

$$\sigma_0 = \sigma^{\text{intact}} + \sigma(\mathbf{u}^e), \quad (4.27)$$

где

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_{\text{diff}}^{\text{ext}}. \quad (4.28)$$

Здесь используется именно упругое решение $\sigma(\mathbf{u}^e)$ поскольку для активации процесса ползучести вязкопластическая модель требует, чтобы напряжения были

вне поверхности текучести. Иначе, если вместо $\sigma(\mathbf{u}^e)$ задействовать упругопластическое решение $\sigma(\mathbf{u}^{in})$ в (4.27), напряжения окажутся на поверхности текучести и решение упруго-вязкопластической задачи будет совпадать с упругопластическим, т.е. процесс ползучести не запустится.

Таблица 4.1

Физико-механические параметры камерного блока

Толща	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, 10^4 Н/м^3	Предел прочности на сжатие, МПа	Предел прочности на растяжение, МПа	Коэффициент вязкости, с/ткн	Чувствительность скорости
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	4	1	10^6	1.0
Пласт КрII	1	0.3	2.2	3	1	$4.8 \cdot 10^5$	1.0
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	3	1	$6.5 \cdot 10^5$	1.0

Калибровка математической модели деформирования камерного блока в процессе ползучести производилась по результатам натурных наблюдений в камере пласта КрII. Поскольку экспериментальные значения деформации камеры пласта АБ довольно малы, в процессе калибровки они не учитывались. Пределы варьирования параметров пластичности и вязкости разделены на три области: отрабатываемый пласт КрII, а также вышележащая и нижележащая толща.

Результаты многовариантного численного моделирования представлены на рис. 4.9 и рис. 4.10. Полученные механические параметры областей камерного блока записаны в табл. 4.1. Из рис. 4.9 видно, что модельные диаграммы деформирования камерного блока качественно и количественно описывают процессы, которые наблюдаются на экспериментальной замерной станции №4 в камере пласта КрII. Вместе с тем, для обеспечения требуемых скоростей деформации в соответствии с упруго-вязкопластической моделью «ассоциированный Объёмный + Перич» необходимо существенно уменьшить предел прочности на сжатие пород пласта КрII. Это не соответствует фактическому

характеру разрушения междукамерных целиков. В этой связи следует, что упруго-вязкопластическая модель, успешно реализованная при моделировании ползучести образцов в условиях одноосного сжатия, не позволяет адекватно описать процесс разрушения междукамерных целиков. Данный факт может быть связан с тем, что напряженное состояние камерного блока не соответствует одноосному сжатию.

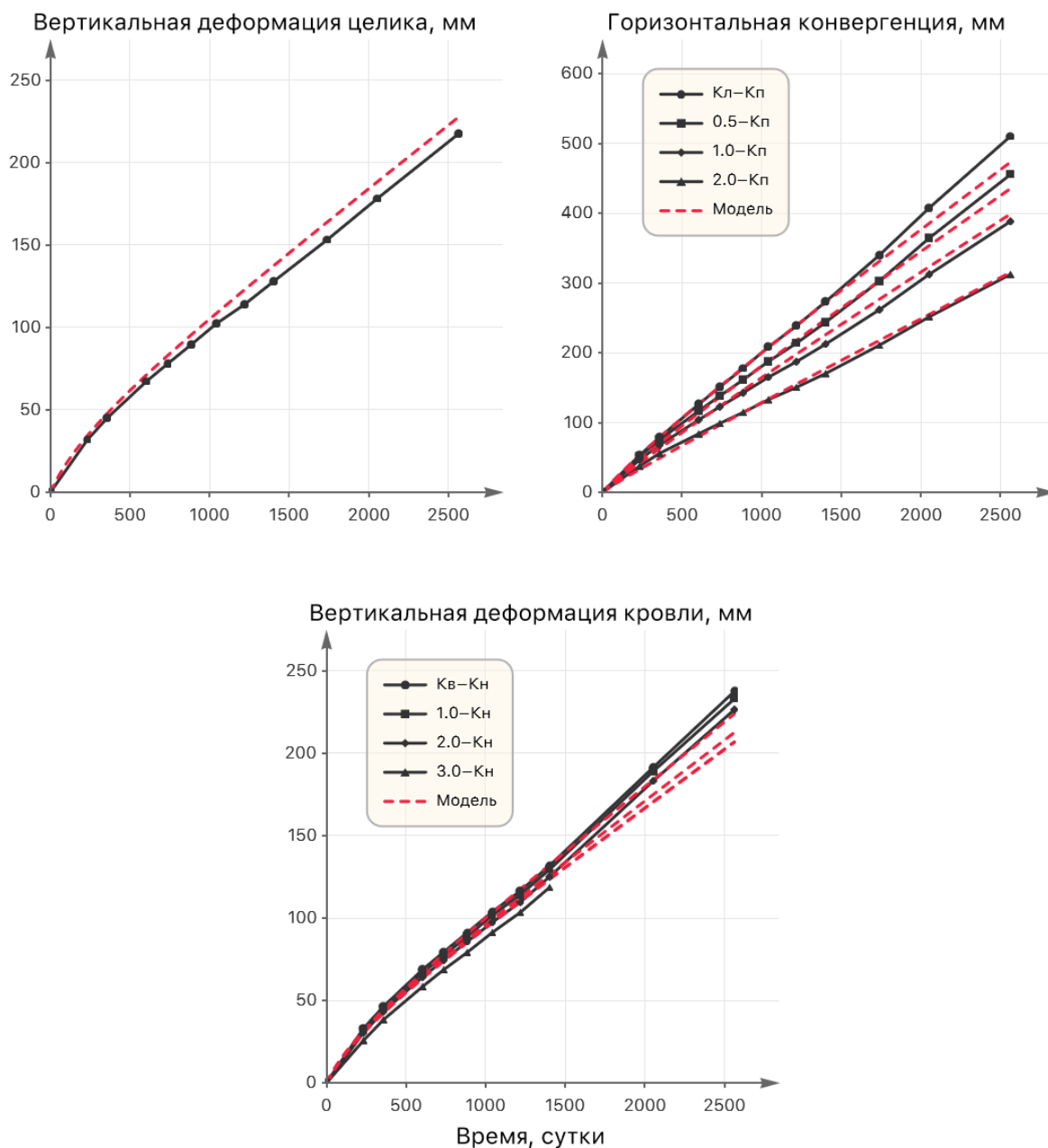


Рисунок 4.9 – Результаты моделирования процесса деформирования камерного блока участка станции №4 (ассоц. Объёмный + Перич)

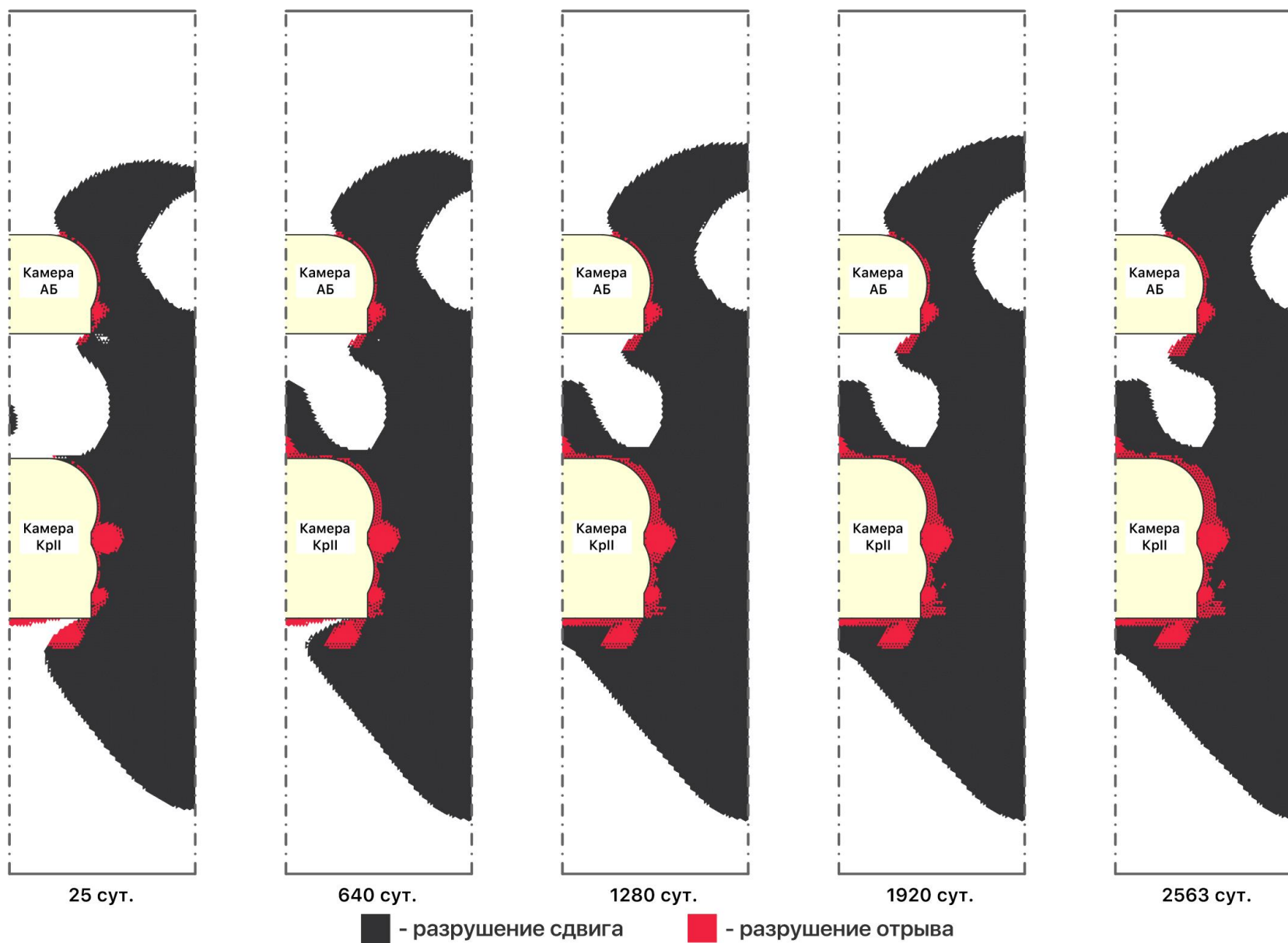


Рисунок 4.10 – Зоны разрушения вмещающих пород на участке станции №4 (ассоциированный Объёмный + Перич)

4.4 Модифицированный метод проекции напряжений

Снижение прочностных свойств соляных пород для обеспечения требуемых скоростей деформации в междукламерных целиках указывает на возможность и уместность использовать широко известный закон ползучести Нортона [73,114,115], где отсутствует поверхность текучести как таковая. Впрочем, её отсутствие говорит о том, что материал находится в состоянии ползучести при любых испытываемых нагрузках, в том числе и гидростатическом давлении. Однако, в лабораторных экспериментах [153] развитие деформаций в соляных образцах под постоянным гидростатическим давлением не наблюдается. Более того, предположение об отсутствии поверхности текучести должно активировать процессы ползучести по всему объёму породного массива, от земной поверхности до центра Земли, что не имеет никакого физического смысла. Таким образом, должен существовать некий предел напряжённого состояния ниже предела текучести, по достижению которого материал переходит из упругого состояния в фазу ползучести, но его несущая способность сохраняется. Назовём его пределом ползучести. При этом должен сохраняться феномен текучести для ограничения действующих напряжений в материале.

В инженерных программных комплексах Ansys и Abaqus FEA есть реализованная модель ползучести, которая удовлетворяет вышеописанным требованиям. Модель называется Extended Drucker-Prager (EDP) Creep Model [88,127] или расширенная модель ползучести Друкера-Прагера. Согласно официальной документации в EDP предполагается, что при неупругом деформировании в материале наблюдаются как пластические деформации, так и деформации ползучести. Другими словами, предполагается аддитивное разложение тензора скорости неупругих деформаций на две составляющие: независимую и зависящую от времени

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \dot{\varepsilon}^p + \dot{\varepsilon}^{cr}. \quad (4.29)$$

Тензоры скоростей пластической деформации и деформации ползучести соответственно записываются как

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad \dot{\varepsilon}^{cr} = \dot{\lambda}^{cr} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (4.30)$$

Заметим, что здесь используется один пластический потенциал для обоих видов неупругой деформации. Это позволяет не усложнять модель и совместно использовать параметрическое обеспечение, полученное для пластической модели деформирования материала. Развитие пластической деформации начинается при достижении предела текучести и ограничивает действующие напряжения соответствующей поверхностью. В то время как деформации ползучести могут развиваться и при напряжениях ниже этого предела. С этого момента вводятся понятия изоповерхности (рис. 4.11) и эквивалентного напряжения ползучести. В качестве уравнения изоповерхности ползучести используется уравнение поверхности текучести. В этом случае в двух произвольных точках напряжённого состояния, находящихся на изоповерхности, ползучесть может быть измерена одним и тем же эквивалентным напряжением. Определение эквивалентного напряжения вне изоповерхности выполняется из результатов испытания на ползучесть при одноосном сжатии. Записывается уравнение поверхности текучести с напряжениями, соответствующими одноосному сжатию

$$\Phi\left(A(-\frac{1}{3}\bar{\sigma}^{cr}, \bar{\sigma}^{cr}), \sigma_y\right) = 0, \quad (4.31)$$

где $\bar{\sigma}^{cr}$ это эквивалентное одноосное напряжение из эксперимента на ползучесть. Затем из него выражается предел текучести, как функция от эквивалентного напряжения ползучести

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\sigma}^{cr}). \quad (4.32)$$

Далее подставляется в уравнение поверхности текучести для произвольного напряжённого состояния

$$\Phi(B(p, q), \sigma_y(\bar{\sigma}^{cr})) = 0. \quad (4.33)$$

В общем случае уравнение (4.33) является нелинейным. Решая это уравнение относительно $\bar{\sigma}^{cr}$, получаем для произвольной точки $B(p, q)$ эквивалентное

напряжение, которое уже используется для определения скорости деформации материала.

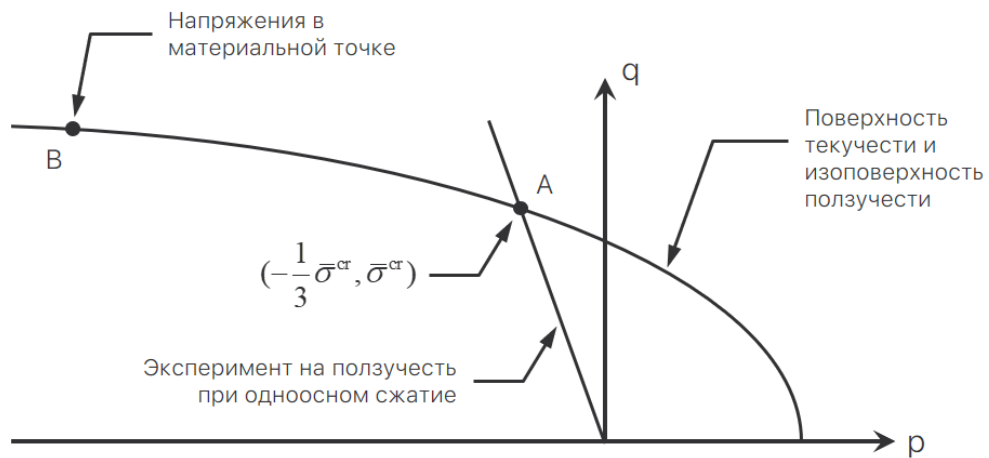


Рисунок 4.11 – Поверхность текучести и изоповерхность ползучести

Такой способ определения эквивалентного напряжения может давать отрицательные его значения для напряжённого состояния ниже предела текучести. Согласно официальной документации Ansys в этом случае используется метод проекции напряжений, изображённый на рис. 4.12.

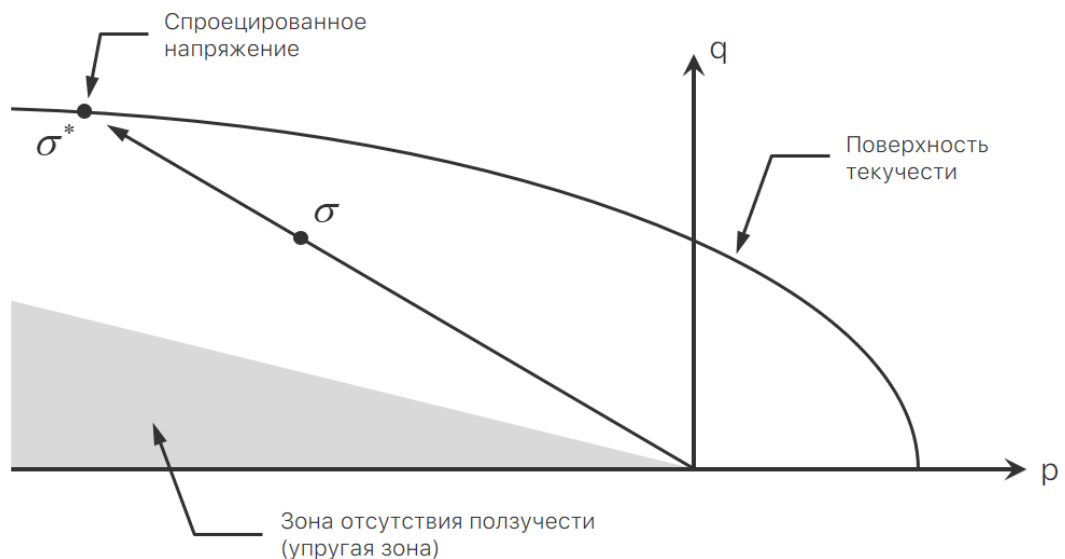


Рисунок 4.12 – Метод проекции напряжений

Здесь вводится проекция напряжений на поверхность текучести

$$\sigma^* = \beta \sigma, \quad (4.34)$$

Подставив σ^* в уравнение поверхности текучести

$$\Phi(\sigma^*, \sigma_y) = 0, \quad (4.35)$$

находим значение фактора β . Затем вместо $V(p, q)$ и $\bar{\sigma}^{cr}$ в уравнении (4.33) подставляются, соответственно, проекция напряжений σ^* и эквивалентное напряжение $\bar{\sigma}^{cr*}$ на поверхности текучести

$$\Phi(\sigma^*, \sigma_y(\bar{\sigma}^{cr*})) = 0. \quad (4.36)$$

Решение этого уравнения относительно $\bar{\sigma}^{cr*}$ позволяет определить искомое эквивалентное напряжение из следующего выражения

$$\bar{\sigma}^{cr} = \frac{\bar{\sigma}^{cr*}}{\beta}. \quad (4.37)$$

Уравнение развития деформаций ползучести (4.30)₂ при этом преобразуется в выражение

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \dot{\lambda}^{cr} \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma^*}. \quad (4.38)$$

Таким образом определяется эквивалентное напряжение ползучести ниже предела текучести. Для некоторого диапазона напряжений решение уравнения (4.35) имеет отрицательные значения β . Такая область напряжений схематично показана закрашенной зоной на рис. 4.12. В этой зоне предполагается отсутствие ползучести. Отчасти это имеет физический смысл, поскольку здесь преобладает действие гидростатического давления.

EDP – весьма интересная математическая модель, описывающая совместно пластическое деформирование и ползучесть при минимуме входных данных, что актуально для моделирования деформационных процессов в соляных породах. Однако, есть одна особенность данной модели. Зона отсутствия ползучести полностью определяется поверхностью текучести, т.е. критерием пластичности. Так для линейных критериев наподобие Кулона-Мора поверхность, ограничивающая упругие напряжения, будет иметь вид аналогичный поверхности текучести за исключением того, что она будет пересекать пространство напряжений в нулевой точке. Как следствие, при больших наклонах поверхности

текучести к гидростатической оси (например, при больших значениях угла внутреннего трения – рис. 4.13) зона ползучести включает в себя меньший диапазон напряжений по сравнению с упругой зоной. Напротив, для параболических критериев таких, как объёмный критерий прочности [118], упругая зона вырождается в отрицательную/сжимающую полуось гидростатического давления, тем самым охватывая весь диапазон напряжений зоной ползучести до предела текучести. С точки зрения вычислительной механики получить напряжения, находящиеся на гидростатической оси, очень сложно ввиду ошибки округления. В связи с чем, материал будет находиться в состоянии ползучести практически при любых возникающих напряжениях ниже предела текучести, что также не имеет физического смысла для соляных пород. Отсюда возникает необходимость в новой модели ползучести с ранее требуемыми свойствами.

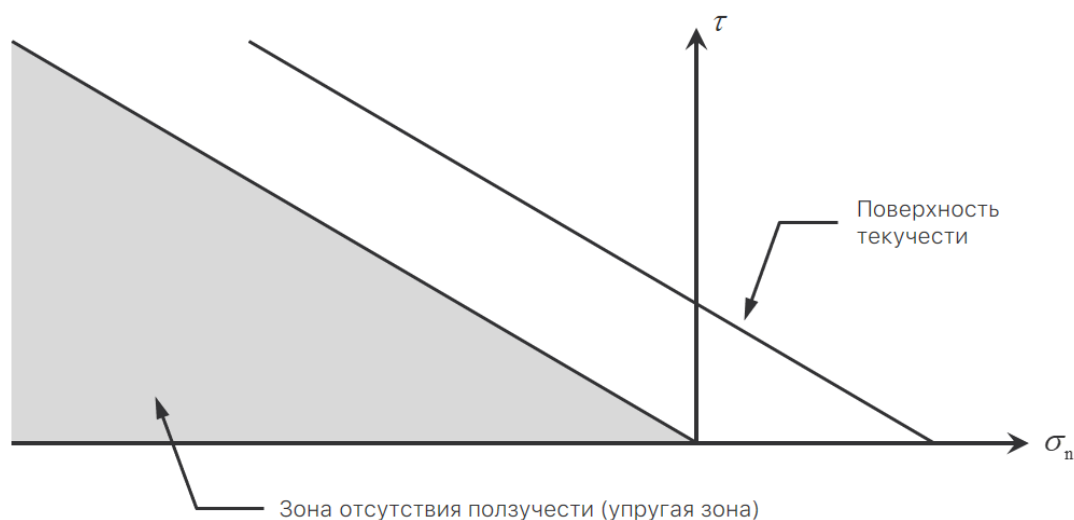


Рисунок 4.13 – Метод проекции напряжений для критерия Кулона-Мора

Вызывает интерес двигаться в направлении развития концепции метода проекции напряжений. Основная идея модификации этого метода будет заключаться во введении предела ползучести σ_{CP} (CP – Creep Point), как дополнительного внутреннего параметра вязкопластической модели, и соответствующего способа вычисления эквивалентного напряжения ползучести. Параметр σ_{CP} регулирует размер упругой зоны, зоны отсутствия ползучести. Также подобно модели EDP он связан с критерием пластичности через предел

текучести σ_y , дабы сохранить простоту вязкопластической модели при минимуме входных данных. Предел ползучести представляет из себя масштабированный с помощью коэффициента — назовём его коэффициент ползучести — предел текучести

$$\sigma_{CP} = w\sigma_y, \quad w \in (0,1), \quad (4.39)$$

и обозначает уровень напряжённого состояния относительно предела текучести, с которого активируется процесс ползучести материала. Схематично на рис. 4.14 изображены две поверхности, соответствующие пределам σ_{CP} и σ_y . Теперь сфокусируемся на определении эквивалентного напряжения ползучести для произвольного напряжённого состояния.

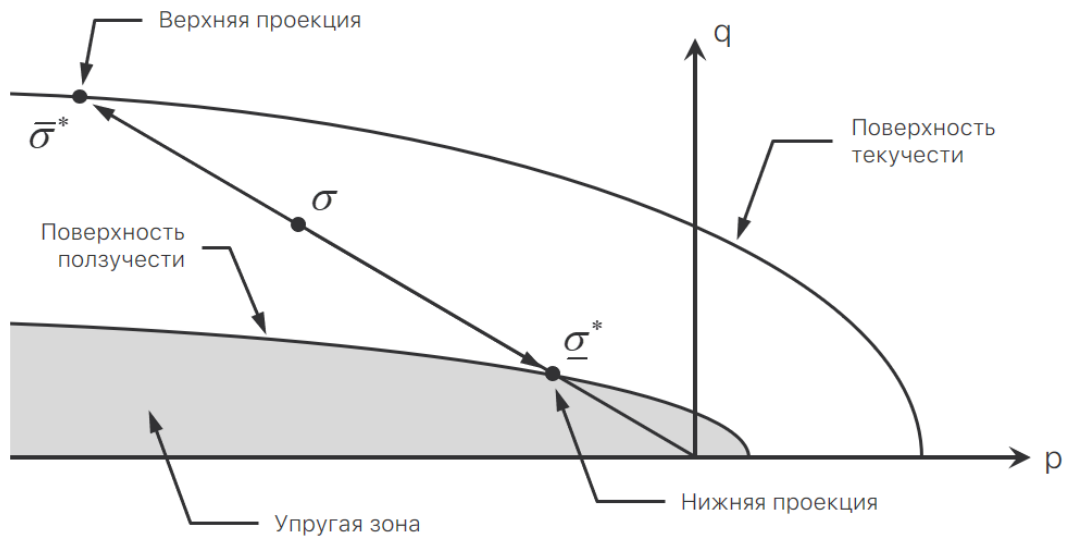


Рисунок 4.14 – Модифицированный метод проекции напряжений

На этом этапе введём проекции напряжений на каждую поверхность подобно методу, описанному в модели EDP. Назовём их нижней и верхней проекцией, и обозначим соответствующими символами: $\underline{\sigma}^*$ и $\bar{\sigma}^*$. Согласно методу проекции напряжений они определяются через следующие выражения

$$\underline{\sigma}^* = \omega\sigma, \quad \bar{\sigma}^* = \beta\sigma, \quad (4.40)$$

где коэффициенты проекций ω и β тензора напряжений на поверхности ползучести и текучести, соответственно. Эквивалентное напряжение ползучести будем определять в виде функции от тензора напряжений

$$\bar{\sigma}^{\text{cr}} = s(\sigma), \quad (4.41)$$

Предположим, что на поверхности ползучести эквивалентное напряжение (4.41) равно нулю, т.е. имеет место полное отсутствие ползучести. В то время как на поверхности текучести оно имеет максимальное значение, единицу. Другими словами, справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} s &= 0, & \text{при } \omega &= 1, \\ s &= 1, & \text{при } \beta &= 1. \end{aligned} \quad (4.42)$$

По сути, эквивалентное напряжение в модифицированном методе проекции напряжений показывает относительный уровень напряжённого состояния между двух пределов: ползучести и текучести. Интерполируем значения s на отрезке $\underline{\sigma}^* \bar{\sigma}^*$. Для этого запишем выражения относительных длин составляющих его отрезков:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^* \sigma &= 1 - \omega, \\ \sigma \bar{\sigma}^* &= \beta - 1. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Из геометрических соображений отношение отрезков (4.43), удовлетворяющее условиям (4.42), будет иметь вид

$$s = \frac{\underline{\sigma}^* \sigma}{\underline{\sigma}^* \sigma + \sigma \bar{\sigma}^*} = \frac{1 - \omega}{\beta - \omega}. \quad (4.44)$$

Значения отношения (4.44) принадлежат отрезку $[0,1]$ для напряжений, находящихся между двумя поверхностям включительно. За пределами поверхности текучести (4.44) также имеет положительные значения (>1). Это условие требуется для корректного построения схем локального интегрирования. Ниже поверхности ползучести функция относительного уровня напряжений принимает отрицательные значения, что соответствует упругой зоне и полному отсутствию ползучести. Таким образом, математическая модель определения эквивалентного напряжения ползучести для модифицированного метода проекций напряжений поставлена корректно. Следует отметить интересное следствие, вытекающее из (4.44). При отсутствии введённого предела ползучести ($\omega = 0$) это выражение преобразуется в

$$s = \frac{1}{\beta}, \quad (4.45)$$

что соответствует определению эквивалентного напряжения ползучести (4.37) для модели EDP при напряжениях ниже предела текучести.

Развитие неупругих деформаций ползучести определяется соответствующим тензором на поверхности текучести из выражения

$$\dot{\varepsilon}^{\text{cr}} = \dot{\lambda}^{\text{cr}} \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\sigma}^*} \quad (4.46)$$

аналогично модели EDP при напряжениях ниже предела текучести.

4.5 Численная реализация модифицированного метода проекции напряжений

Теперь рассмотрим построение вязкопластической модели, совместно описывающей ползучесть материала и его пластические свойства, с помощью модифицированного метода проекции напряжений. Применение метода изменяет систему невязок неявной схемы алгоритма обратного отображения для локального интегрирования вязкопластических соотношений следующим образом. Добавляется уравнение (4.44), описывающее связь текущих напряжений с относительным уровнем нагрузки. В виде невязки оно выглядит как

$$\mathbf{R}_s \equiv s_n - \frac{1 - \omega(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}})}{\beta(\sigma_n, \sigma_y) - \omega(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}})} = 0, \quad (4.47)$$

где коэффициенты проекций ω и β являются положительными корнями соответствующих уравнений

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\sigma}^*, \sigma_{\text{CP}}) = 0 &\Rightarrow \omega(\sigma, \sigma_{\text{CP}}) = R_+(\sigma, \sigma_{\text{CP}}), \\ \Phi(\bar{\sigma}^*, \sigma_y) = 0 &\Rightarrow \beta(\sigma, \sigma_y) = R_+(\sigma, \sigma_y). \end{aligned} \quad (4.48)$$

В свою очередь, функция s относительного уровня напряжений участвует в определении вязкопластического множителя λ^{cr} .

Поскольку напряжения, при которых проявляется ползучесть, находятся в основном ниже предела текучести, то в качестве уравнения развития λ^{cr} попробуем использовать широко известный степенной закон Нортона в следующем виде

$$\dot{\lambda}^{\text{cr}} = \frac{1}{\eta} (\bar{\sigma}^{\text{cr}})^{1/m}. \quad (4.49)$$

Здесь эффективное напряжение ползучести $\bar{\sigma}^{\text{cr}}$ определяется из (4.41) согласно модифицированному методу проекции напряжений. Соответствующее (4.49) уравнение невязки для дискретного шага по времени записывается как

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv s(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}}, \sigma_y)^{1/m} - \eta \frac{\Delta \lambda^{\text{cr}}}{\Delta t} = 0. \quad (4.50)$$

Однако, такая запись имеет вычислительную особенность при определении якобиана системы невязок. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \sigma} = \frac{1}{m} s(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}}, \sigma_y)^{1/m-1} \frac{\partial s}{\partial \sigma}. \quad (4.51)$$

Видно, что производная при значениях $m > 1$ на поверхности ползучести не определена. При этом если переписать невязку (4.50) в следующем виде

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv s(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}}, \sigma_y) - \left(\eta \frac{\Delta \lambda^{\text{cr}}}{\Delta t} \right)^m = 0, \quad (4.52)$$

то здесь также возникает вычислительная сложность уже аналогичная вязкопластической модели Пержины, где производная

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \Delta \lambda^{\text{cr}}} = \frac{m}{\Delta \lambda^{\text{cr}}} \left(\eta \frac{\Delta \lambda^{\text{cr}}}{\Delta t} \right)^{m-1} \quad (4.53)$$

не определена при начальных условиях итерационного процесса Н-Р ($\Delta \lambda^{\text{cr}} = 0$).

Во избежание данной проблемы можно записать уравнение развития вязкопластического множителя λ^{cr} подобно вязкопластическому закону Перича следующим образом

$$\dot{\lambda}^{\text{cr}} = \frac{1}{\eta} \left[(1 + \bar{\sigma}^{\text{cr}})^{1/m} - 1 \right], \quad (4.54)$$

где $\bar{\sigma}^{\text{cr}}$ так же определяется согласно модифицированному методу проекции напряжений. Выражение под степенью есть аналог нормированного

эквивалентного напряжения в модели Перича. Отметим, что при $m = 1$ (4.54) восстанавливает закон Нортон (4.49). Таким образом, вязкопластический закон (4.54) удовлетворяет условиям (4.42). Соответствующее (4.54) уравнение невязки может принимать вид

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv \left[1 + s(\sigma_n, \sigma_{CP}, \sigma_y) \right]^{1/m} - \frac{\eta \Delta \lambda^{cr} + \Delta t}{\Delta t} = 0 \quad (4.55)$$

или

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv s(\sigma_n, \sigma_{CP}, \sigma_y) - \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{cr} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0. \quad (4.56)$$

Запишем производную (4.55) по тензору напряжений

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{m} \left[1 + s(\sigma_n, \sigma_{CP}, \sigma_y) \right]^{1/m-1} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.57)$$

Видно, что на поверхности ползучести производная определена даже при $m > 1$.

Запишем также производную (4.56) по инкременту $\Delta \lambda^{cr}$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda}{\partial \Delta \lambda^{cr}} = \frac{m \eta}{\Delta t} \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{cr} + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1}. \quad (4.58)$$

Как можно заметить, она определена при любых значениях инкремента вязкопластического множителя (помним, что $\Delta \lambda^{cr} \geq 0$). Исходя из вышеизложенного, для вязкопластического закона (4.54) в обоих случаях все необходимые производные невязки определены. Однако, наиболее предпочтительной является запись невязки (4.56) из соображений сходимости решения системы уравнений неявной схемы алгоритма обратного отображения (аналогично закону Перича).

Коэффициенты проекций ω и β определены как корни уравнений критерия пластичности. В общем виде критерии имеют нелинейный вид. Производная $\mathbf{R}_s$ по тензору напряжений в таком случае может иметь громоздкий вид. С точки зрения вычислительного процесса это может вызвать трудности. Заменим невязку $\mathbf{R}_s$ двумя составляющими её уравнениями

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\omega &\equiv \omega_n - \omega(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}}) = 0, \\ \mathbf{R}_\beta &\equiv \beta_n - \beta(\sigma_n, \sigma_y) = 0,\end{aligned}\tag{4.59}$$

и перепишем уравнение (4.56) для подобной закону Перича вязкопластической модели (4.54) в следующем виде

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv \frac{1 - \omega_n}{\beta_n - \omega_n} - \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0.\tag{4.60}$$

Теперь вычисление производных уравнений невязок типа (4.59) и (4.60) становится более удобным.

Учитывая, что тензор неупругих деформаций ползучести определяется по формуле (4.46), получаем общий вид системы невязок неявной схемы локального интегрирования по алгоритму обратного отображения с использованием модифицированного метода проекции напряжений в матричном виде

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n - \sigma^{\text{trial}} + \Delta \lambda^{\text{cr}} \beta_n \mathbf{D}^e \mathbf{N}_\beta = 0, \\ \mathbf{R}_\omega \equiv \omega_n - \omega(\sigma_n, \sigma_{\text{CP}}) = 0, \\ \mathbf{R}_\beta \equiv \beta_n - \beta(\sigma_n, \sigma_y) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \frac{1 - \omega_n}{\beta_n - \omega_n} - \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0, \end{cases}\tag{4.61}$$

где

$$\mathbf{N}_\beta \equiv \mathbf{N}(\beta_n \sigma_n, \sigma_y).\tag{4.62}$$

Также векторы невязок и неизвестных системы, соответственно, имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_\omega, \mathbf{R}_\beta, \mathbf{R}_\lambda)^T, \\ \mathbf{v} &= (\sigma_n, \omega_n, \beta_n, \Delta \lambda^{\text{cr}})^T,\end{aligned}\tag{4.63}$$

а вектор начального приближения итерационного процесса Ньютона-Рафсона решения системы (4.61)

$$\mathbf{v}_0 = (\sigma^{\text{trial}}, \omega(\sigma^{\text{trial}}, \sigma_{\text{CP}}), \beta(\sigma^{\text{trial}}, \sigma_y), 0)^T.\tag{4.64}$$

Общий вид якобиана системы (4.61) записывается следующим образом

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \Delta\lambda^{\text{cr}} \beta_n^2 \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma} & \mathbf{0} & \Delta\lambda^{\text{cr}} \mathbf{D}^e \left(\mathbf{N}_\beta + \beta_n \frac{\partial \mathbf{N}_\beta}{\partial \beta} \right) & \mathbf{P}_\beta \\ -\left(\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right)^T & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \right)^T & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \frac{1-\beta}{(\beta-\omega)^2} & \frac{\omega-1}{(\beta-\omega)^2} & -\frac{m\eta}{\Delta t} \left(\frac{\eta \Delta\lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

где $\mathbf{P}_\beta = \beta_n \mathbf{D}^e \mathbf{N}_\beta$.

Наряду с деформациями ползучести вязкопластическая модель должна также учитывать пластические деформации согласно аддитивному разложению (4.29) тензора скорости неупругих деформаций. Совместное их развитие реализуется с помощью алгоритма, описанного в работах [154,155]. В соответствии с ним в деформационном процессе с преобладанием ползучести, когда не наблюдается изменение внешних нагрузок и деформация ползучести имеет тенденцию к релаксации градиента напряжений, пластическая деформация может быть вызвана только ползучестью. Таким образом, поиск конечного решения задачи локального интегрирования выполняется в два этапа. Сначала решается упруго-вязкопластическая задача по определению пробных напряжений

$$\sigma_{\text{cr}}^{\text{trial}} = \sigma_n \quad (4.66)$$

в результате деформационного процесса ползучести, т.е. решается система (4.61). Затем если полученные напряжения превышают заданный предел текучести

$$\Phi(\sigma_{\text{cr}}^{\text{trial}}, \sigma_y) > 0, \quad (4.67)$$

то они корректируются путём решения системы локального интегрирования для упругопластических соотношений при $\sigma^{\text{trial}} = \sigma_{\text{cr}}^{\text{trial}}$, по результатам которой получают напряжения σ_n , ограниченные поверхностью текучести, и определяется инкремент пластических деформаций $\Delta \varepsilon^p$. Инкремент тензора деформаций ползучести можно вычислить из выражения аддитивного разложения тензора деформаций следующим образом

$$\Delta \varepsilon^{\text{cr}} = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^e - \Delta \varepsilon^p. \quad (4.68)$$

Здесь $\Delta \varepsilon$ это инкремент тензора полной деформаций, полученный из пробного решения, а второе слагаемое в правой части уравнения – инкремент упругой деформации, который определяется как

$$\Delta \varepsilon^e = \left[D^e \right]^{-1} (\sigma_n - \sigma_{n-1}). \quad (4.69)$$

Приведённые соотношения полностью описывают численную математическую модель ползучести, построенную с применением модифицированного метода проекции напряжений.

Апробирование полученной вязкопластической модели ползучести проводилось аналогично модели соляных образцов – на задаче о деформировании двухпластового камерного блока. Адаптация модели к условиям плоского деформированного состояния выполнялась с помощью ранее описанного алгоритма в разделе 3.2. Так в системе (4.61) уравнение невязки $\mathbf{R}_\sigma$ разделяется на два уравнения $\mathbf{R}_\sigma$ и $\mathbf{R}_z$. Вместе с тем в силу того, что одна компонента тензора напряжений линейно зависима от двух других в неявной схеме локального интегрирования алгоритма обратного отображения аргумент σ_n функций заменяется на σ_n^{2D} и ε_2^{in} вместо него. Система (4.61) в пространстве главных напряжений преобразуется следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n^{2D} - \sigma^{\text{trial}} + \Delta \lambda^{\text{cr}} \beta_n D_{2D}^e \Theta_\beta = 0, \\ \mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{in} - \varepsilon_{2,n-1}^{in} - \Delta \lambda^{\text{cr}} \beta_n N_{2,\beta}^{3D} = 0, \\ \mathbf{R}_\omega \equiv \omega_n - \omega(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \sigma_{\text{CP}}) = 0, \\ \mathbf{R}_\beta \equiv \beta_n - \beta(\sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \sigma_y) = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv \frac{1 - \omega_n}{\beta_n - \omega_n} - \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0, \end{cases} \quad (4.70)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_\beta &= \Theta_\Delta(\beta_n \sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \sigma_y), \\ N_{2,\beta}^{3D} &= N_2^{3D}(\beta_n \sigma(\sigma_n^{2D}, \varepsilon_{2,n}^{in}), \sigma_y). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Соответствующие векторы невязок и неизвестных системы

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_\omega, \mathbf{R}_\beta, \mathbf{R}_\lambda)^T, \\ \mathbf{v} &= (\sigma_n^{2D}, \varepsilon_2^{in}, \omega_n, \beta_n, \Delta\lambda)^T.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Вектор начального приближения итерационного процесса Ньютона-Рафсона для решения нелинейной системы (4.70) выглядит как

$$\mathbf{v}_0 = (\sigma^{\text{trial}}, \varepsilon_{2,n-1}^{in}, \omega(\sigma^{\text{trial}}, \sigma_{\text{CP}}), \beta(\sigma^{\text{trial}}, \sigma_y), 0)^T. \quad (4.73)$$

Формулировка (4.70)-(4.73) определяет неявную схему локального интегрирования вязкопластических соотношений алгоритма обратного отображения для условий ПДС.

Отсчётное поле напряжений определялось как сумма упругого и упругопластического решений

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}^{\text{intact}} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{in}), \quad (4.74)$$

где $\mathbf{u}^{in}$ является решением нелинейно системы

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{in})\mathbf{u}^{in} = \mathbf{F}_{\text{diff}}^{\text{ext}}. \quad (4.75)$$

Здесь используется упругопластическое решение $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{in})$ поскольку для активации процесса ползучести в вязкопластической модели, построенной с помощью модифицированного метода проекции напряжений, не требуется, чтобы напряжения были вне поверхности текучести. Ползучесть будет наблюдаться даже для напряжений, находящихся на ней.

Объёмный критерий

На первом этапе реализация модифицированного метода проекции напряжений производилась с использованием параболического объёмного критерия [118], поскольку его уравнение имеет непрерывный вид и инвариантно к тензору напряжений. На начальной стадии определялась функция относительного уровня напряжений $s(\sigma)$, которая, в свою очередь, выражается через коэффициенты проекций ω и β . Известно, что они представляют собой

положительные корни уравнения критерия пластичности (4.48) при разных пределах. Для объёмного критерия пределы определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\sigma_y &\equiv \mathbf{A}_\beta = \mathbf{A} = \{\sigma_c, \sigma_t\}, \\ \sigma_{cp} &\equiv \mathbf{A}_\omega = w\mathbf{A} = \{w\sigma_c, w\sigma_t\}.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Коэффициенты проекций при этом равны

$$\begin{aligned}\beta, \omega = R_+(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega}) &= \frac{-b(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega}) + \sqrt{D(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega})}}{2a(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega})}, \\ D &= b^2(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega}) - 4a(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega})c(\mathbf{A}_{\beta, \omega}),\end{aligned}\quad (4.77)$$

где коэффициенты квадратного уравнения в пространстве главных напряжений записываются как функции от напряжений и набора внутренних параметров $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}a(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega}) &= \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \\ b(\sigma, \mathbf{A}_{\beta, \omega}) &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_c - \sigma_t), \\ c(\mathbf{A}_{\beta, \omega}) &= -\sigma_c \sigma_t.\end{aligned}\quad (4.78)$$

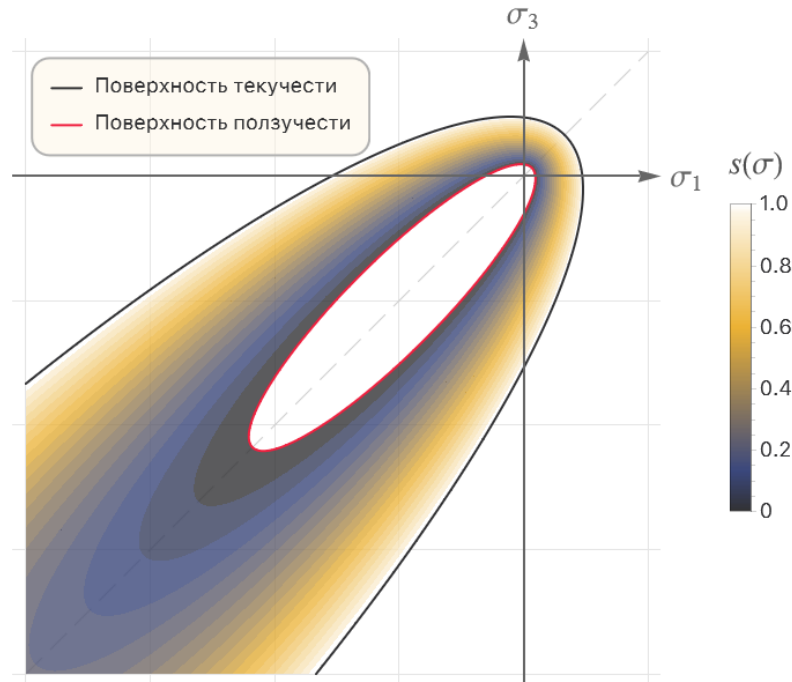


Рисунок 4.15 – Поле значений функции относительного уровня напряжений для объёмного критерия в пространстве главных напряжений для условий ПДС

Согласно условиям ПДС, заменив среднюю компоненту σ_2 тензора напряжений соответствующим выражением (4.7), в результате получается функция

относительного уровня напряжений для условий плоского деформированного состояния, которую можно графически представить. Диаграмма поля значений функции $s(\sigma)$ при $\varepsilon_2^{in} = 0$, $m = 1$ и $\nu = 0.3$ в пространстве главных напряжений для условий ПДС изображена на рис. 4.15.

Вычисление производных корней (4.77)₁, необходимых для построения якобиана системы невязок, можно свести к матричным вычислениям, представив выражение для корня в виде обыкновенной дроби

$$R_+ = \frac{Nm}{Dm}. \quad (4.79)$$

Символы Nm и Dm обозначают числитель и знаменатель, соответственно. Тогда производная корня по вектору неизвестных системы невязок запишется как скалярное произведение матрицы на вектор в следующем виде

$$\frac{\partial R_+}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{M} \mathbf{g}, \quad (4.80)$$

где матрица и вектор в правой части принимают вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Nm}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial Dm}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{Dm^2} \begin{bmatrix} Dm \\ -Nm \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Также выражения для векторов матрицы выглядят как

$$\begin{aligned} \frac{\partial Nm}{\partial \mathbf{v}} &= -\frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{v}}, \quad \frac{\partial Dm}{\partial \mathbf{v}} = 2 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}}, \\ \frac{\partial D}{\partial \mathbf{v}} &= 2b \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}} - 4c \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Таким образом, чтобы вычислить производную корня квадратного уравнения по вектору, необходимо знать только производные соответствующих коэффициентов по этому вектору. В системе невязок корни уравнения критерия пластичности участвуют в уравнениях $\mathbf{R}_\omega$ и $\mathbf{R}_\beta$, которые зависят только от напряжений, накопленной неупругой деформации вдоль оси z и параметров внутреннего состояния (пределов прочности). Поскольку в процессе ползучести упрочнение не предполагается, то необходимыми для вычисления производными являются $\partial/\partial \sigma^{2D}$ и $\partial/\partial \varepsilon_2^{in}$. Обозначим вектор соответствующих переменных как

$$\mathbf{s} = (\sigma^{2D}, \varepsilon_2^{in})^T, \quad (4.83)$$

который будет участвовать в вычислениях вместо вектора $\mathbf{v}$. Тогда производные коэффициента (4.78)₁ по вектору (4.83) можно записать в виде скалярного произведения матрицы на вектор

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{\Xi} \mathbf{s}, \quad (4.84)$$

где матрица в правой части принимает вид

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} g & g-3 & k \\ g-3 & g & k \\ k & k & 2E^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} g &= 2(\nu^2 - \nu + 1), \\ k &= E(1 - 2\nu). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Производная коэффициента (4.78)₂ по вектору $\mathbf{s}$ записывается в следующем виде

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{s}} = (\sigma_c - \sigma_t) \begin{bmatrix} 1 + \nu \\ 1 + \nu \\ -E \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Коэффициент (4.78)₃ не зависит от тензора напряжений, а также ввиду того, что упрочнение не предполагается, его производная по вектору $\mathbf{s}$ равна нулю.

Также для построения якобиана системы невязок необходимы производные векторов (4.71) по вектору $\mathbf{s}$, которые можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial \mathbf{s}} &= \beta_n \frac{\partial \Theta_\Delta}{\partial \mathbf{s}}, \\ \frac{\partial N_{2,\beta}^{3D}}{\partial \mathbf{s}} &= \beta_n \frac{\partial N_2^{3D}}{\partial \mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

где для объёмного критерия $\partial \Theta_\Delta / \partial \mathbf{s}$ и $\partial N_2^{3D} / \partial \mathbf{s}$ соответствуют (4.25).

Результаты многовариантного численного моделирования процесса ползучести двухпластового камерного блока под действием сил гравитации продемонстрированы на рис. 4.16-4.23 для различных участков. Соответствующие механические параметры областей камерных блоков указаны в табл. 4.2.

Таблица 4.2

**Физико-механические параметры камерных блоков
экспериментальных участков**

Толща	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, 10^4 Н/м^3	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Коэффициент вязкости, сутки	Чувствительность скорости	Коэффициент ползучести
Участок №2								
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	1	21	$2 \cdot 10^8$	0.4	0.1
Пласт КрII	1	0.3	2.2	1	23	$1.3 \cdot 10^7$	0.2	0.1
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	1	23	$2.5 \cdot 10^6$	0.2	0.1
Участок №3								
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	1	30	10^8	1.0	0.1
Пласт КрII	1	0.3	2.2	1	23	$8.5 \cdot 10^6$	1.0	0.1
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	1	23	$9 \cdot 10^5$	1.0	0.1
Участок №4								
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	1	22	$6.4 \cdot 10^7$	0.2	0.1
Пласт КрII	1	0.3	2.2	1	23	$1.27 \cdot 10^7$	0.2	0.1
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	1	21	$3.6 \cdot 10^6$	0.2	0.1
Участок №6								
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	1	25	$4 \cdot 10^6$	1.0	0.1
Пласт КрII	1	0.3	2.2	1	23	$5.5 \cdot 10^6$	1.0	0.1
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	1	21	$3 \cdot 10^6$	1.0	0.1

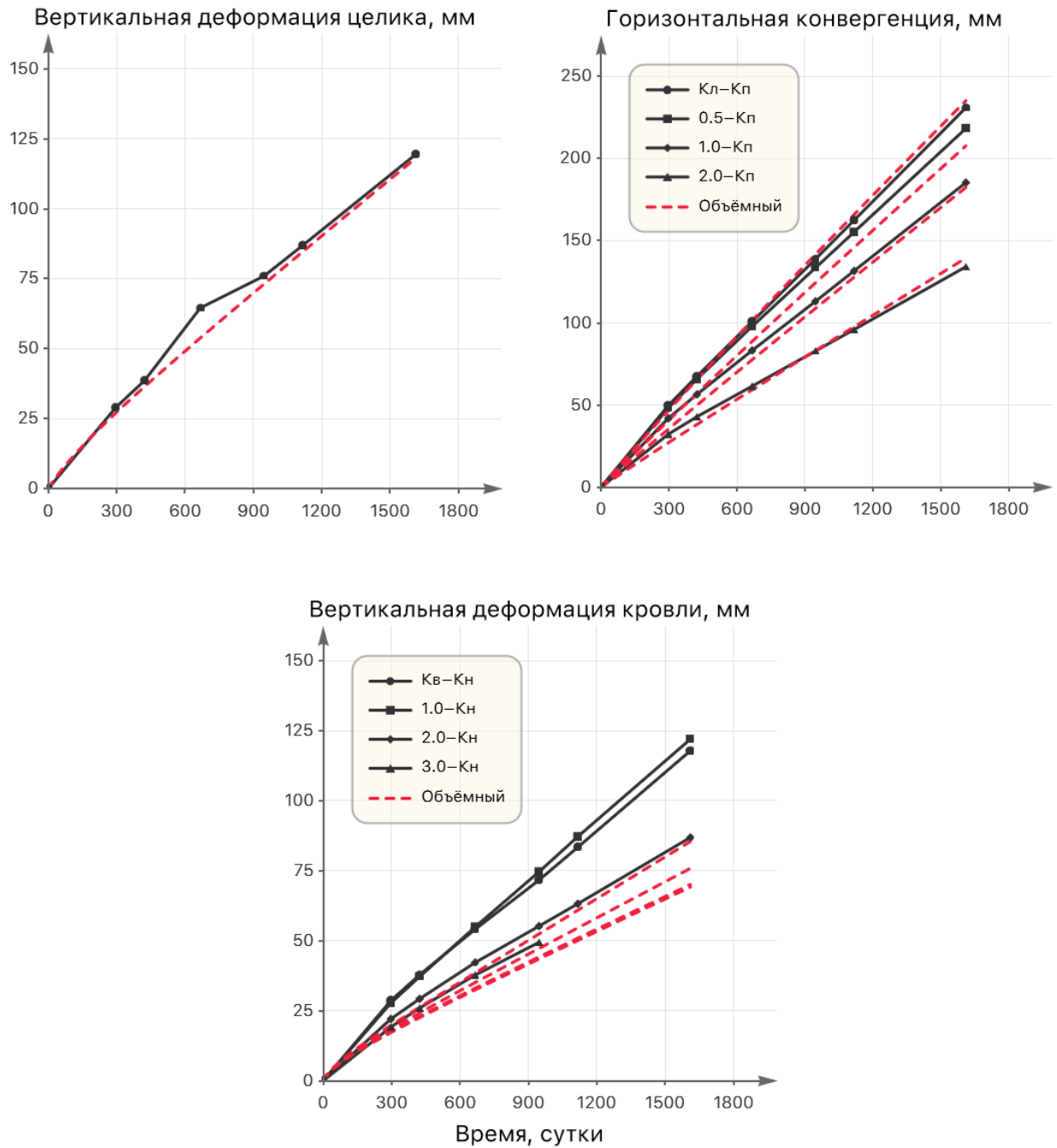


Рисунок 4.16 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №2 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

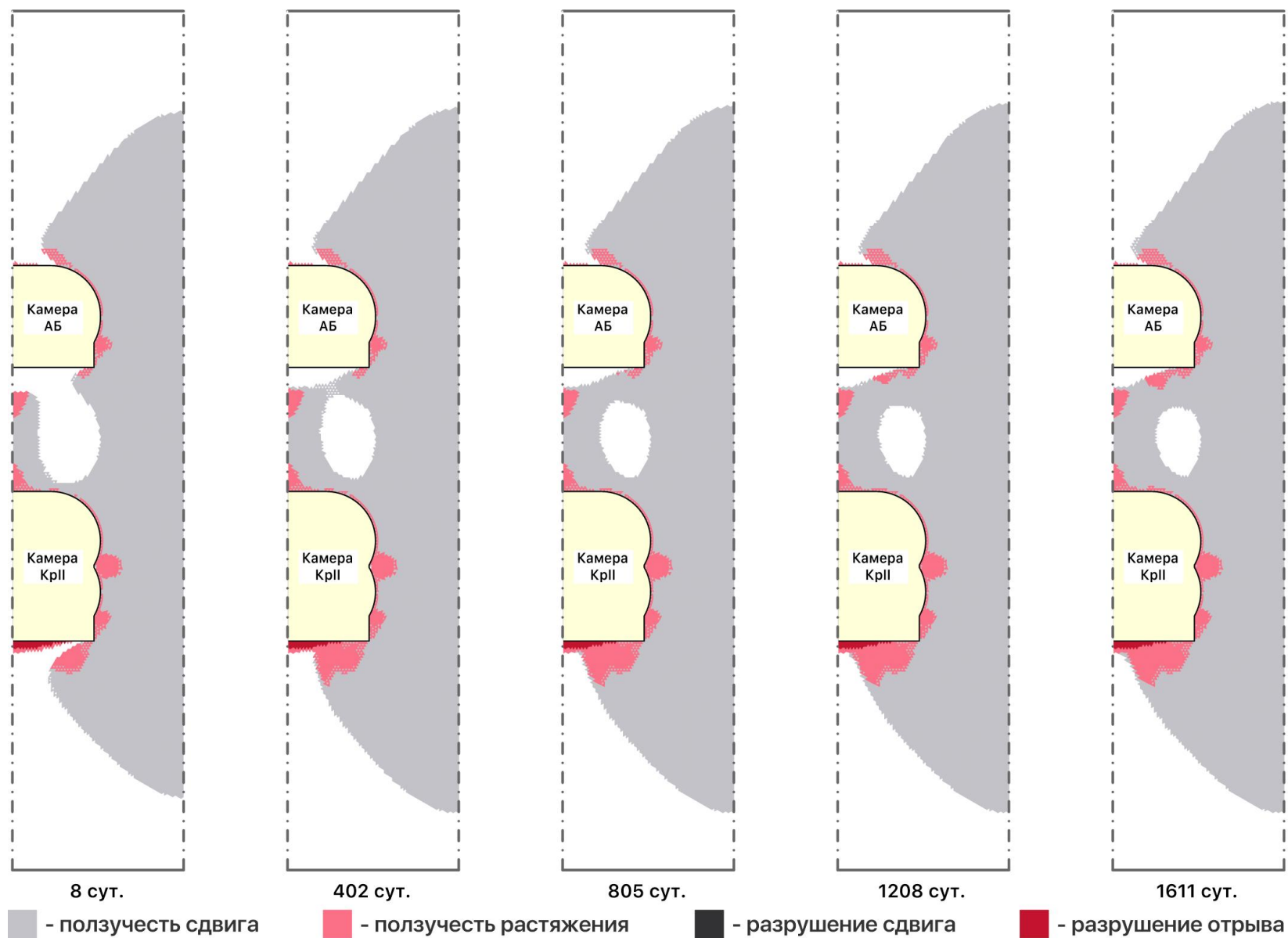


Рисунок 4.17 – Зоны ползучести и разрушения вмещающих пород на участке станции №2 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

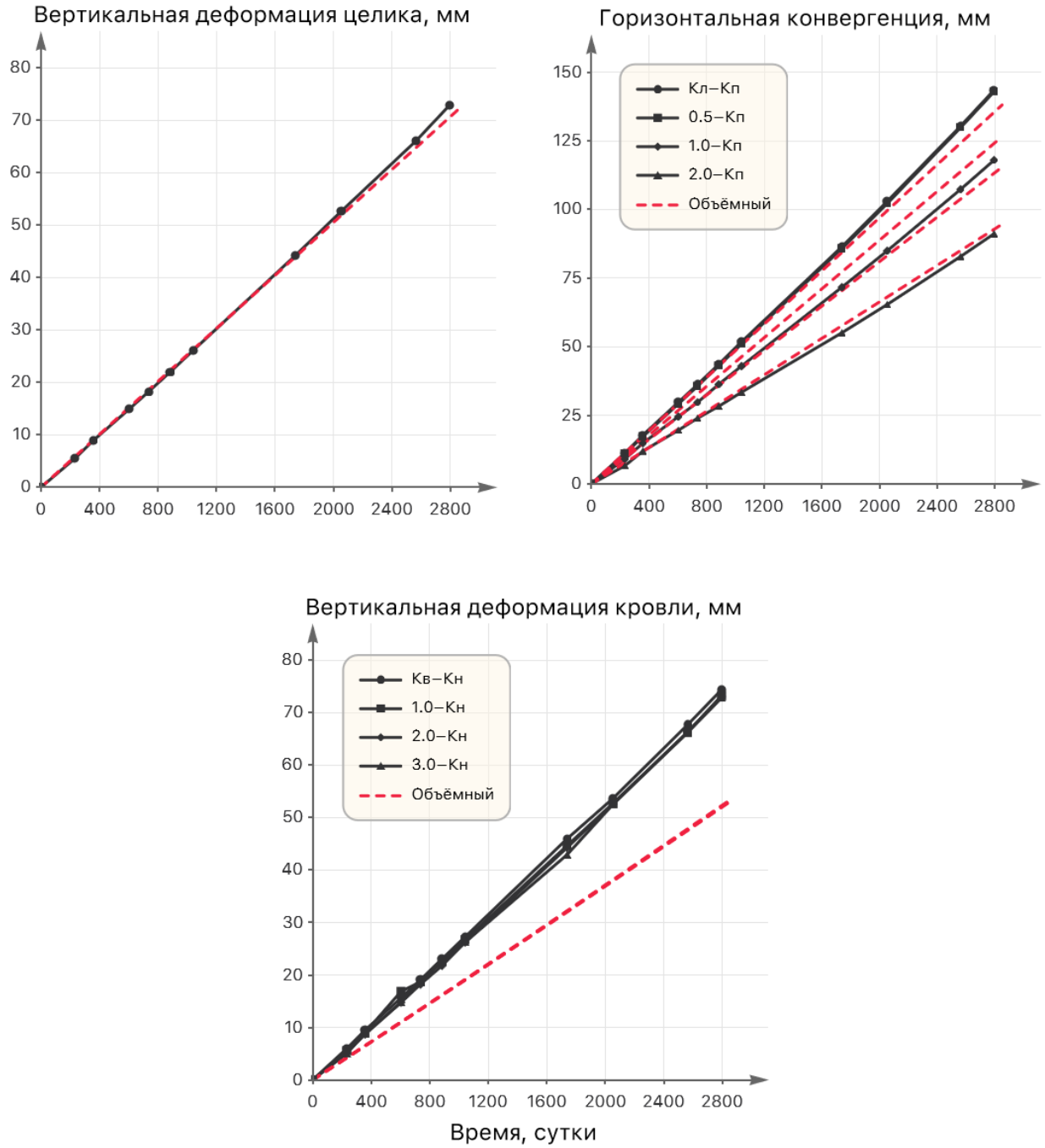


Рисунок 4.18 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №3 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

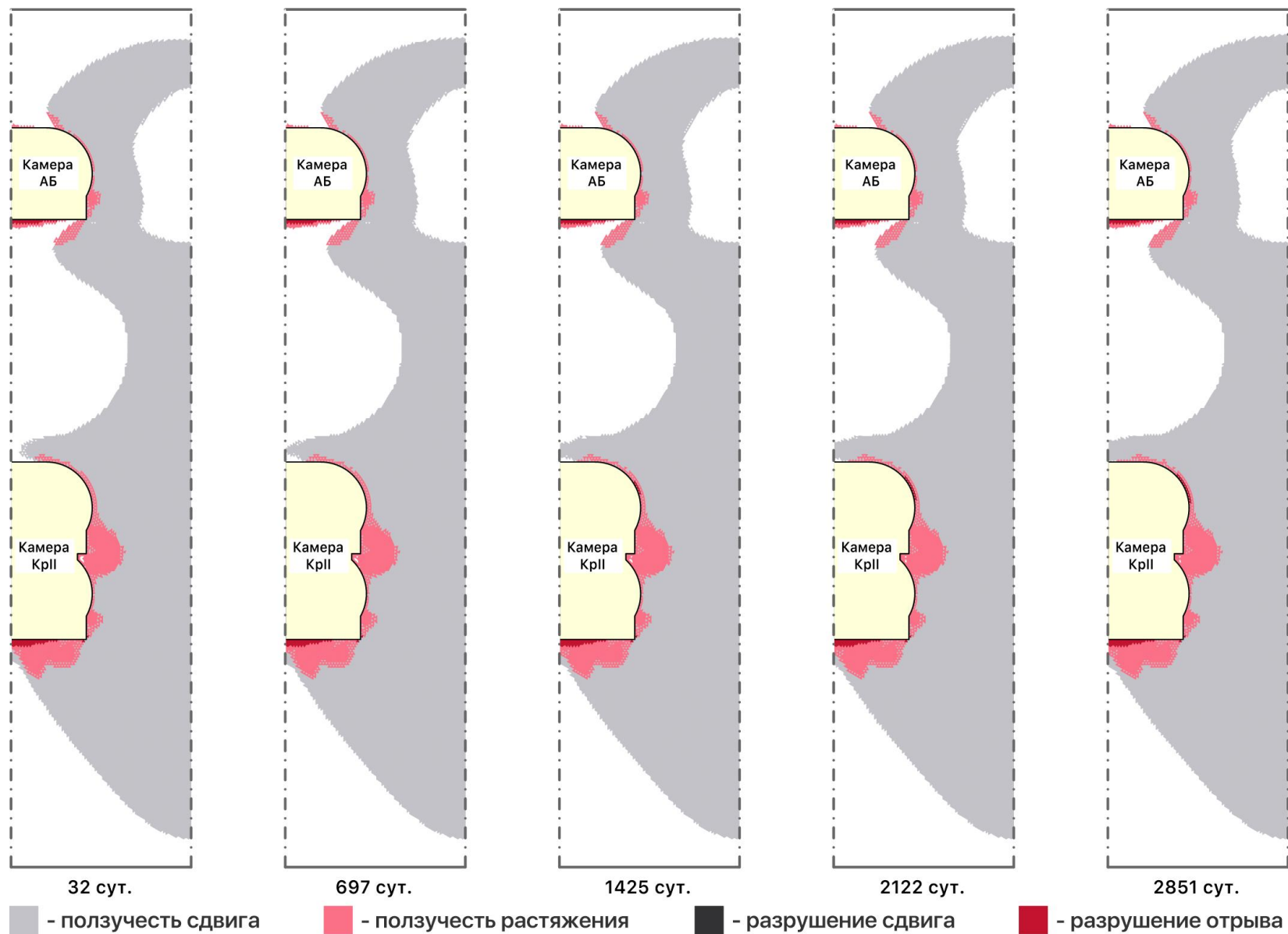


Рисунок 4.19 – Зоны ползучести и разрушения вмещающих пород на участке станции №3 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

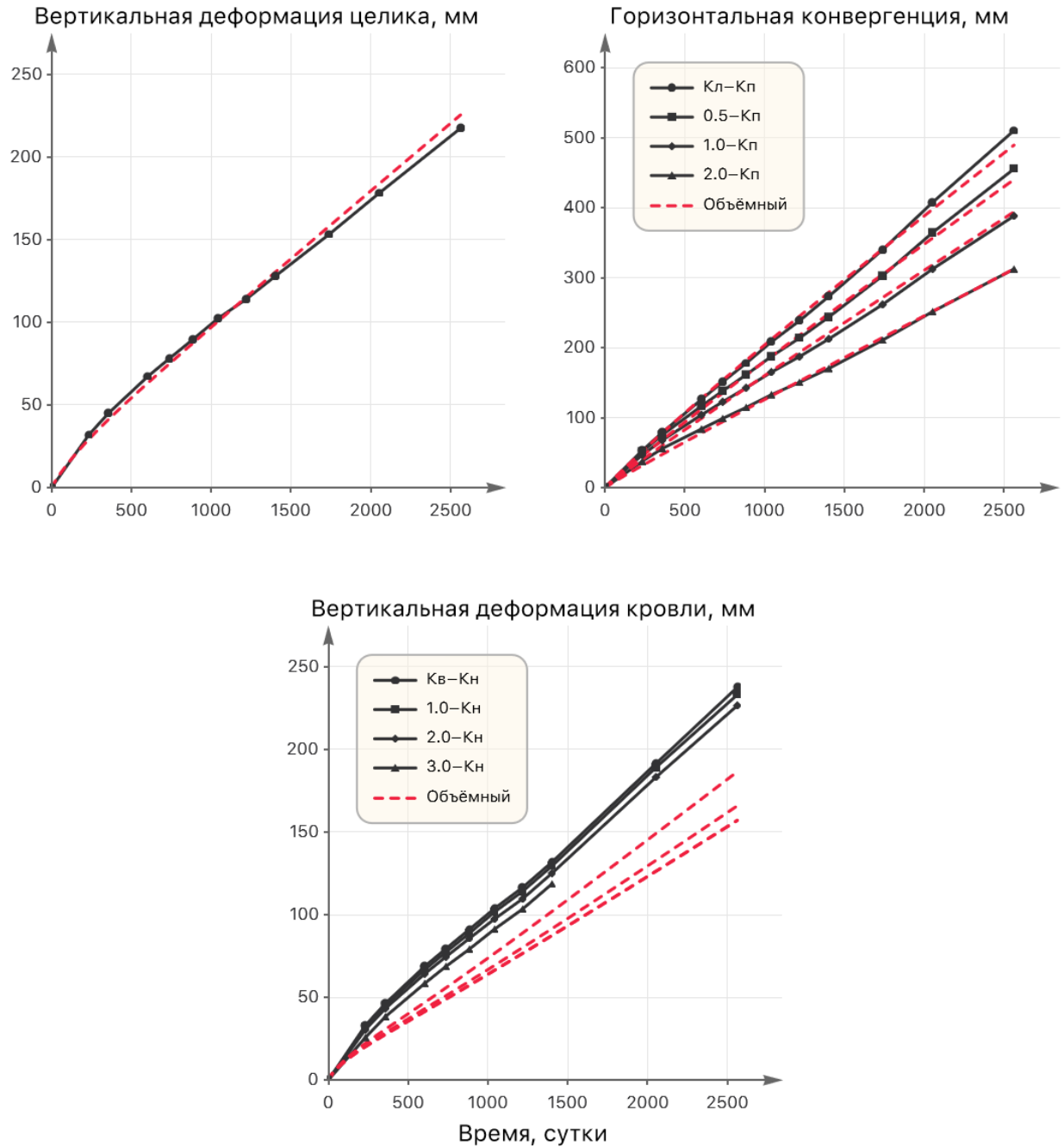


Рисунок 4.20 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №4 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

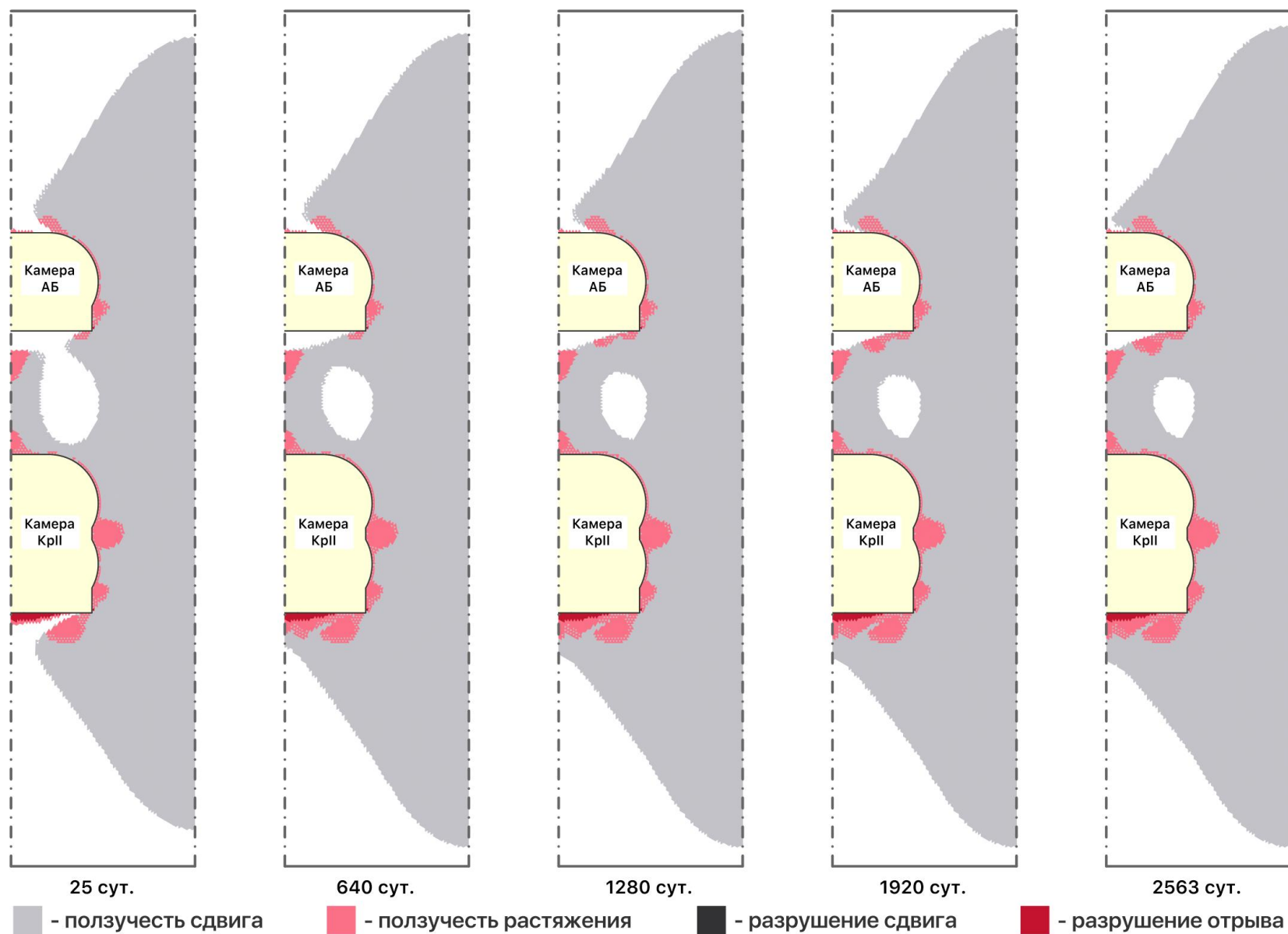


Рисунок 4.21 – Зоны ползучести и разрушения вмещающих пород на участке станции №4 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

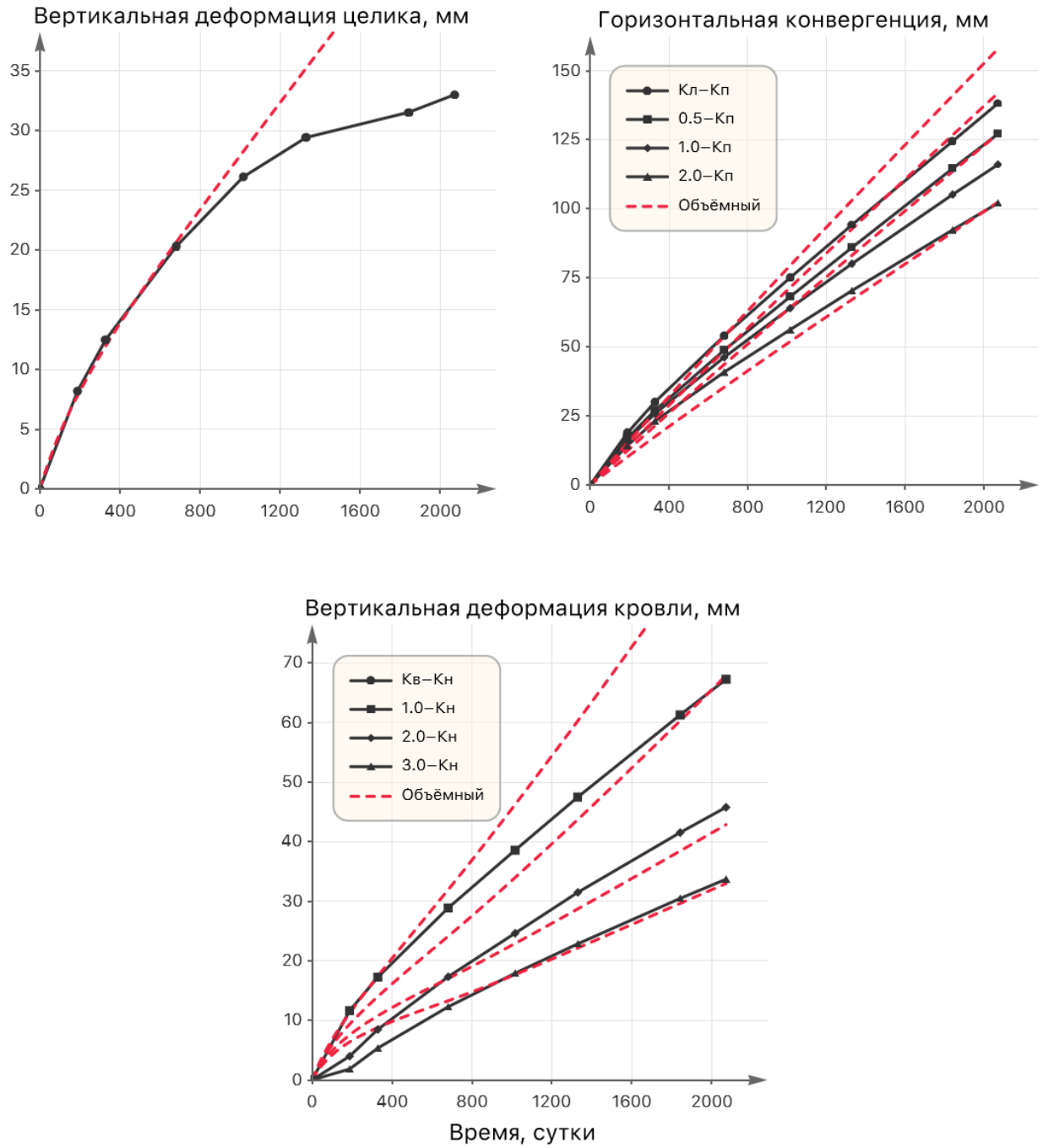


Рисунок 4.22 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №6 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

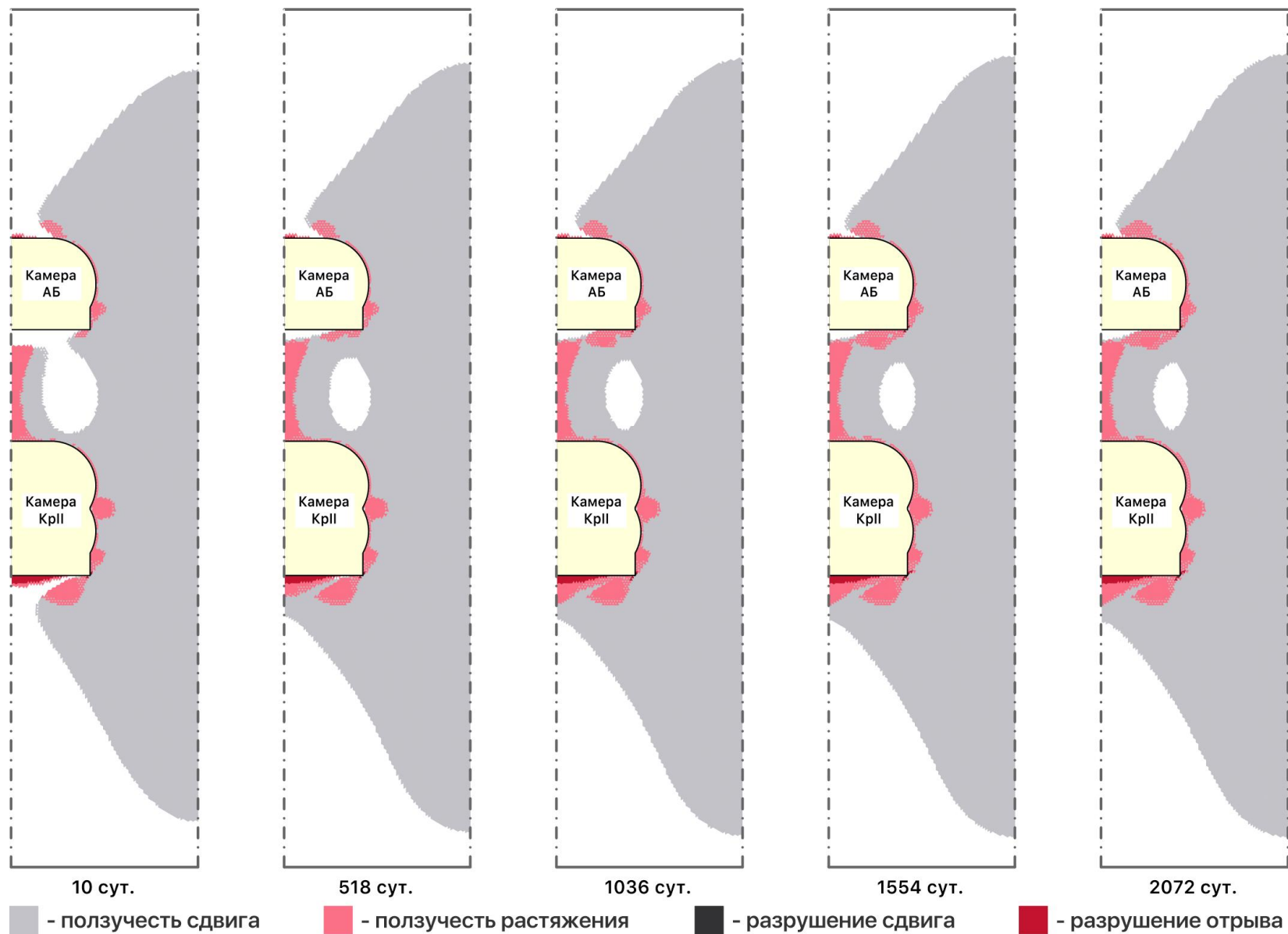


Рисунок 4.23 – Зоны ползучести и разрушения вмещающих пород на участке станции №6 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (ассоциированный Объёмный)

Критерий Кулона-Мора

В сравнении с объёмным критерием применение модифицированного метода проекции напряжений к критерию пластичности Кулона-Мора вызывает некоторые сложности с вычислением предела ползучести. Тривиальное его вычисление относительно предела текучести аналогичное объёмному критерию (4.76)

$$\begin{aligned}\sigma_y &\equiv \mathbf{A}_\beta = \mathbf{A} = \{c, \phi\}, \\ \sigma_{cp} &\equiv \mathbf{A}_\omega = w\mathbf{A} = \{wc, w\phi\},\end{aligned}\quad (4.88)$$

приводит к пересечению поверхностей текучести и ползучести, что продемонстрировано на рис. 4.24. При этом упругая зона выходит за пределы поверхности текучести. Такой вариант определения предела ползучести для критерия Кулона-Мора неприемлем. В связи с чем требуется ввести для него новый способ вычисления предела ползучести.

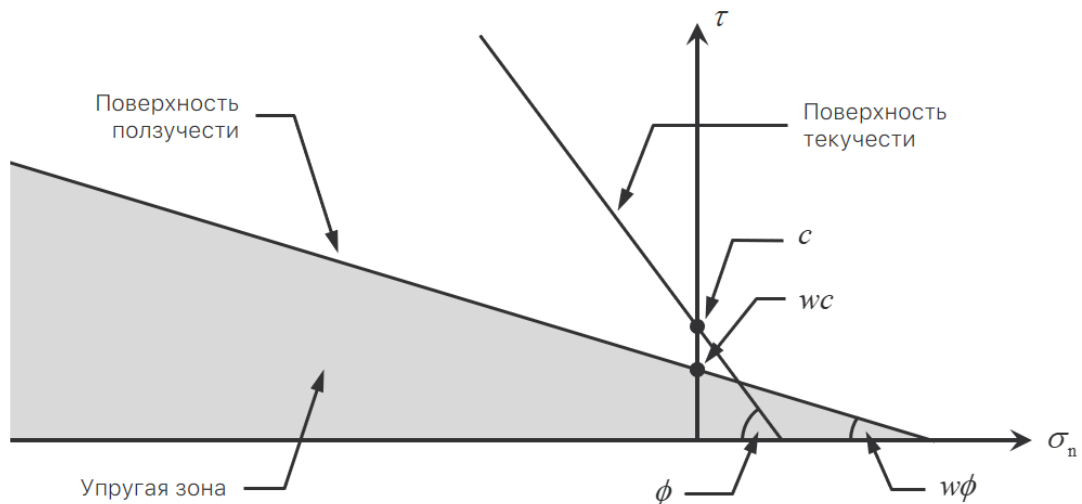


Рисунок 4.24 – Пересечение поверхностей ползучести и текучести при вычислении предела ползучести для критерия Кулона-Мора согласно (4.88)

Рассмотрим подробнее процесс вычисления предела ползучести для критерия Кулона-Мора. Масштабирование в меньшую сторону предела текучести с помощью коэффициента w в соответствии с (4.88) даёт недостаточное уменьшение коэффициента сцепления чтобы избежать пересечения предельных поверхностей. Таким образом, при определении предела ползучести необходимо

проводить вычисление его составляющих по-отдельности. Причём один прочностной параметр будет зависеть от другого. Здесь существует два пути: либо сначала масштабируется коэффициент сцепления, а затем вычисляется подходящий угол, чтобы предельные поверхности не пересекались; либо сперва масштабируется угол ϕ , а после определяется новый коэффициент сцепления, соответствующий поверхности ползучести, не пересекающейся с поверхностью текучести. Первый способ логичен, т.к. коэффициент сцепления представляет из себя предел прочности, который масштабируется для получения предела ползучести. Второй способ выглядит привлекательней с точки зрения простоты из геометрических соображений. Однако, найдя зависимость между двумя параметрами предела ползучести, можно выразить один через другой.

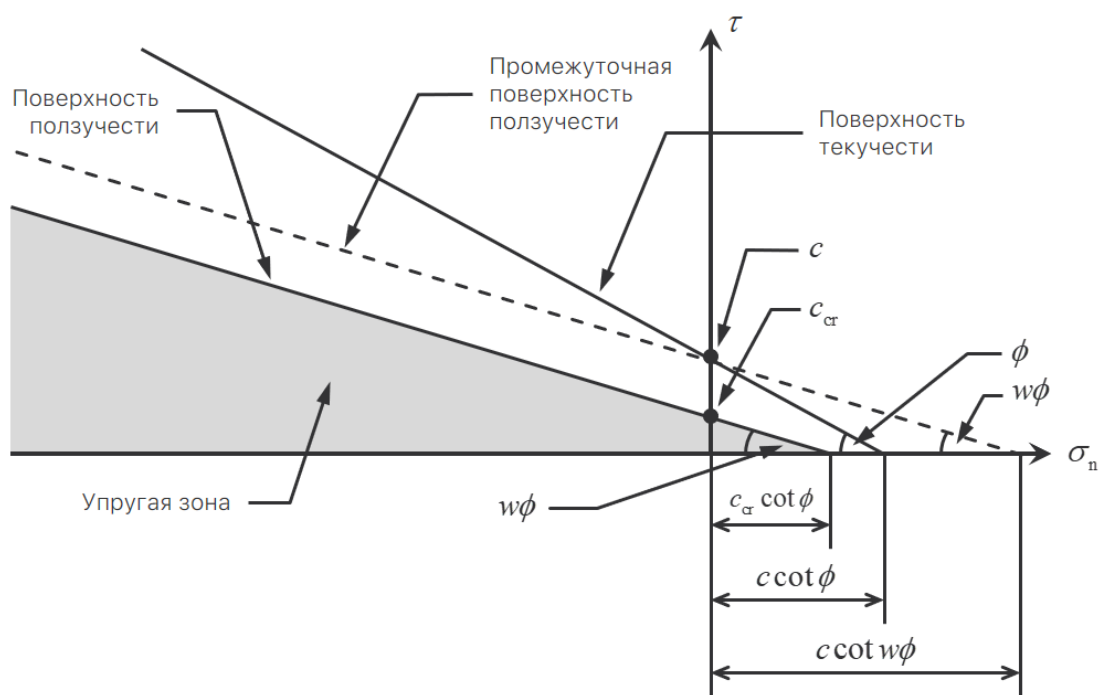


Рисунок 4.25 – Второй способ вычисления предела ползучести для критерия Кулона-Мора

Исходя из вышеописанного, вычисление предела ползучести начнём со второго способа, т.е. с масштабирования угла внутреннего трения ϕ коэффициентом w . Это соответствует повороту поверхности текучести против часовой стрелки вокруг точки $(0, c)$ в осях $\sigma_n - \tau$, в результате которого получается промежуточная поверхность ползучести. Геометрическая интерпретация второго

способа вычисления предела ползучести представлена на рис. 4.25. Здесь полученная поверхность изображена штриховой линией. Теперь её необходимо сдвинуть параллельно так, чтобы результирующая и исходная поверхности не пересекались. Иначе говоря, необходимо найти подходящий коэффициент c_{cr} . Его будем вычислять относительно точек пересечения поверхностей с осью σ_n . Из рис. 4.25 видно, что при повороте поверхности увеличивается координата точки её пересечения с этой осью в положительную сторону. Введём следующее отношение координат точек пересечения с осью σ_n поверхности текучести и промежуточной поверхности ползучести:

$$P_w = \frac{c \cot w\phi}{c \cot \phi} = \frac{\cot w\phi}{\cot \phi}. \quad (4.89)$$

Такое отношение показывает во сколько раз увеличивается координата точки пересечения с осью σ_n при масштабировании угла внутреннего трения. Тем не менее, требуется, чтобы для конечной поверхности ползучести координата пересечения уменьшалась по мере уменьшения коэффициента w . Теперь предположим, что это уменьшение происходит обратно пропорционально (4.89), т.е. имеет место следующее уравнение

$$c_{cr} \cot w\phi = \frac{1}{P_w} c \cot \phi. \quad (4.90)$$

Из этого уравнения легко выразить искомый коэффициент c_{cr} для поверхности ползучести, которая не пересекается с поверхностью текучести. Таким образом, вычисление предела ползучести по второму способу выглядит как

$$\begin{aligned} \phi_{cr} &= w\phi, \\ c_{cr} &= c \cot^2 \phi \tan^2 \phi_{cr}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Теперь из уравнения (4.91)₁ можно получить обратную зависимость, соответствующую первому способу вычисления предела ползучести. Заменив в (4.91) $c_{cr} \rightarrow wc$ и приняв ϕ_{cr} за неизвестную, запишем выражения для первого способа:

$$c_{cr} = wc,$$

$$\phi_{cr} = \arctan \frac{\sqrt{w}}{\cot \phi}. \quad (4.92)$$

Итак, новый способ вычисления предела ползучести для критерия Кулона-Мора записывается следующим образом

$$\sigma_{CP} \equiv \mathbf{A}_\omega = \{c_{cr}, \phi_{cr}\}, \quad (4.93)$$

где выражения для c_{cr} и ϕ_{cr} соответствуют одному из способов (4.91) или (4.92).

Далее в работе будем использовать только первый способ (4.92).

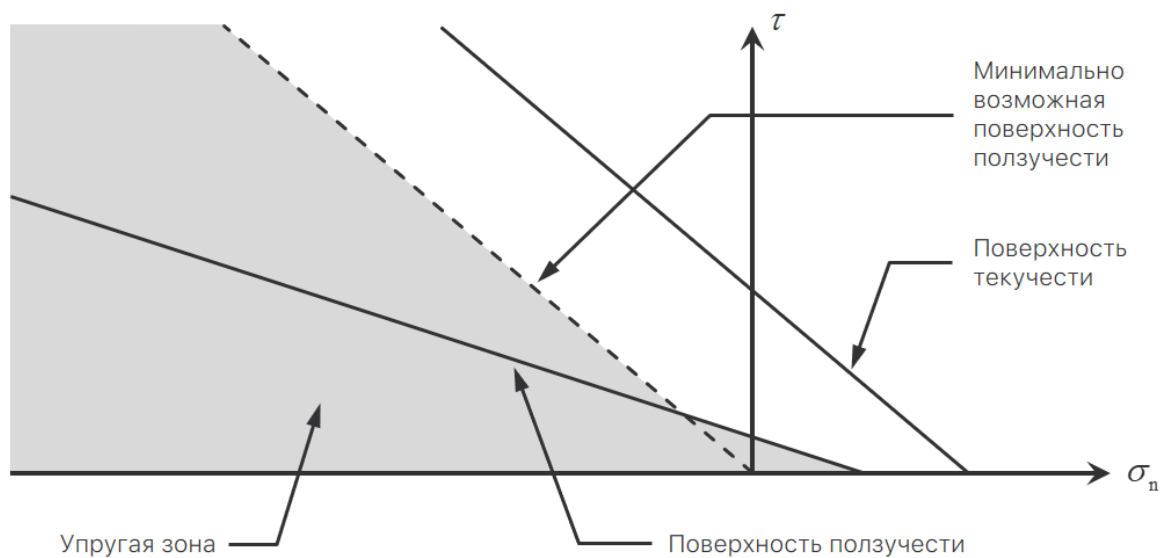


Рисунок 4.26 – Нарушение выпуклости поверхности ползучести для критерия Кулона-Мора

Помимо определения предела ползучести необходимо также иметь корректное определение эффективного напряжения, а именно в нашем случае функции относительного уровня напряжений. Рассмотрим процесс её вычисления для критерия Кулона-Мора подробнее. Ранее уже говорилось о том, что для подобных линейных критериев пластичности зона отсутствия ползучести, т.е. упругая зона, не может быть меньше минимально возможного размера (см. рис. 4.13). Таким образом, предел ползучести, вычисляемый одним из способов (4.93), будет приводить к пересечению соответствующей поверхности с минимально возможной, что продемонстрировано на рис. 4.26. Как следствие, выпуклость поверхности ползучести нарушается. Во избежание возникшей

сложности нужно установить новый способ проецирования напряжений на верхнюю и нижнюю предельные поверхности.

Критерий Кулона-Мора, по сути, сравнивает максимальные значения касательного и нормального напряжений в определённом соотношении. Геометрически это можно представить через круги Мора, где

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (4.94)$$

определяет центр круга, расположенный на оси σ_n , а

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (4.95)$$

задаёт радиус этого круга так, чтобы он касался критической линии. В связи с чем применение метода проекции напряжений в изначальном его виде масштабирует и σ_n и $\tau_{\max}$ что приводит к уже известным последствиям. Для того, чтобы возможно было определить проекции напряжений как на нижнюю, так и на верхнюю поверхности, масштабировать будем только $\tau_{\max}$, а напряжение σ_n оставим неизменным. Иначе говоря, проекции напряжений будут определять радиусы кругов Мора. Так нижняя проекция означает во сколько раз необходимо уменьшить радиус текущего круга, чтобы он касался нижней предельной линии, в то время как верхняя проекция – во сколько раз увеличивается радиус при достижении верхней. Таким образом, описанный способ вычисления проекций напряжений в конечном итоге приводит к определению эффективного напряжения, как относительного уровня касательной нагрузки между двумя пределами. Графически предложенный модифицированный метод проекции напряжений для критерия Кулона-Мора изображён на рис. 4.27. Математически этот метод сводится к нахождению корней линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi(\omega\tau_{\max}, \sigma_n, \sigma_{\text{CP}}) &= 0, \\ \Phi(\beta\tau_{\max}, \sigma_n, \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

В пространстве главных напряжений выражения для коэффициентов проекций ω и β записываются следующим образом:

$$\omega_{MC} = \frac{2c_{cr} \cos \phi_{cr} - (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi_{cr}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}},$$

$$\beta_{MC} = \frac{2c \cos \phi - (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}. \quad (4.97)$$

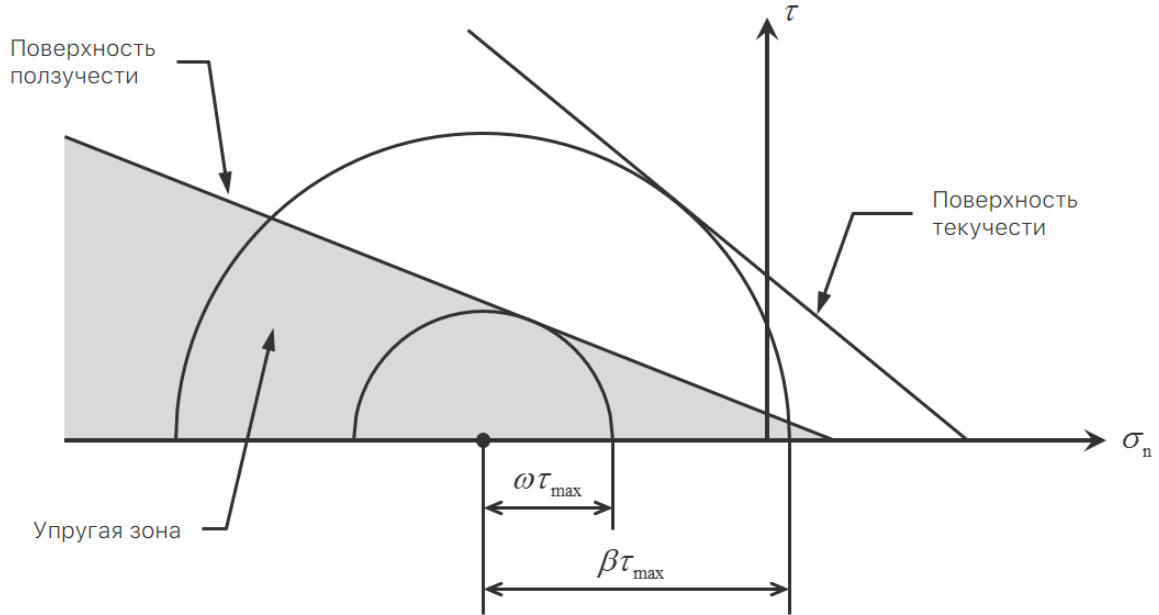


Рисунок 4.27 – Модифицированный метод проекции напряжений для критерия Кулона-Мора

Теперь, подставляя их в выражение для функции относительного уровня напряжений (4.44) и заменяя среднюю компоненту тензора напряжений σ_2 на (4.7), получается функция относительного уровня касательных напряжений $s_{MC}(\sigma)$ для условий ПДС аналогично объёмному критерию. Общий аналитический её вид записывается как

$$s_{MC}(\sigma) = \frac{\sigma_{\max}(1 + \sin \phi_{cr}) - \sigma_{\min}(1 - \sin \phi_{cr}) - 2c_{cr} \cos \phi_{cr}}{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})(\sin \phi_{cr} - \sin \phi) + 2(c \cos \phi - c_{cr} \cos \phi_{cr})}. \quad (4.98)$$

Поля значений для всех шести зон при $\varepsilon_2^{in} = 0$ и $m = 1$ в пространстве главных напряжений наглядно продемонстрировано на рис. 4.28. Очевидно, что в системе невязок локальной схемы интегрирования предпочтительнее использовать функцию (4.98) в чистом виде, а не уравнения (4.97) по-отдельности, как было показано в (4.61), поскольку выражения коэффициентов проекций при равных значениях $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ не определены. Однако, равенство $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ справедливо только на гидростатической оси, отрицательная полуось (зона всестороннего

сжатия) которой полностью входит в упругую зону. Тем не менее использование уравнений (4.97) по-отдельности в области растяжения может приводить к вычислительным трудностям при приближении тензора напряжений к гидростатической оси.

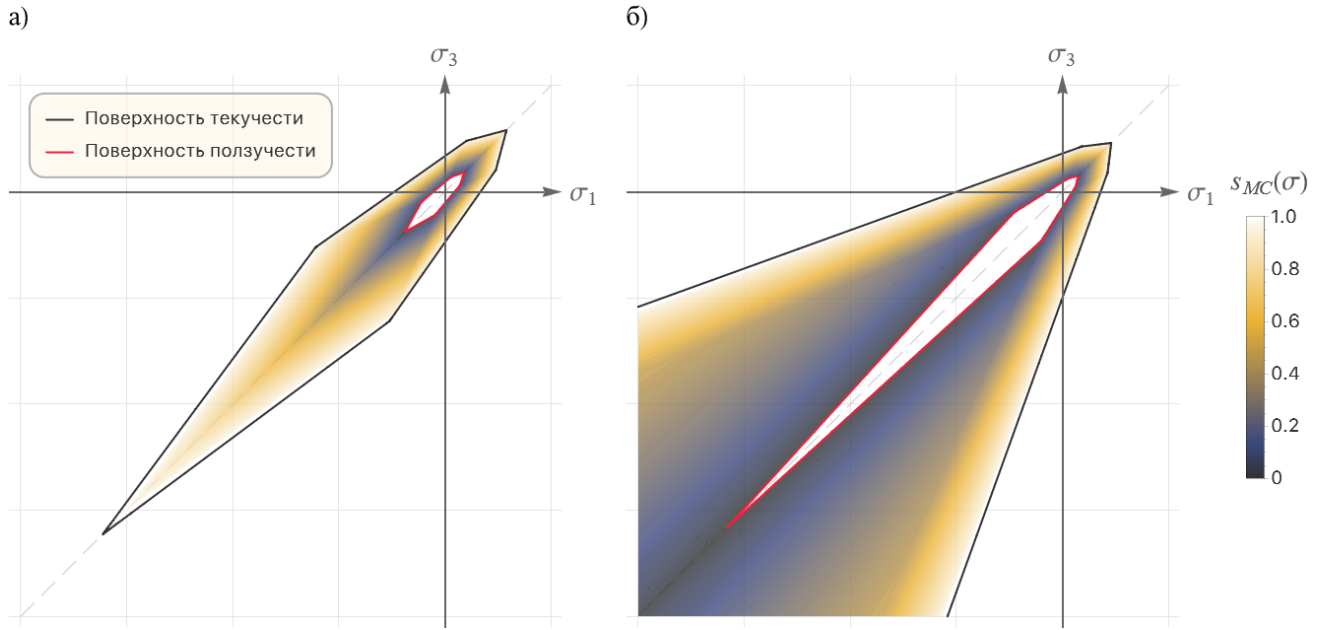


Рисунок 4.28 – Поле значений функции относительного уровня касательных напряжений в пространстве главных напряжений для условий ПДС, где коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и:
а) $\phi < \arcsin(1 - 2\nu)$, б) $\phi \geq \arcsin(1 - 2\nu)$

Известно, что критерий Кулона-Мора в области растяжения существенно завышает предел текучести, что, как следствие, приводит к завышенному пределу ползучести. Для таких геоматериалов, как соляные породы, растягивающие напряжения сильно ограничены. В этой связи будет уместным использовать критерий Рэнкина (2.43) в области растяжения подобно тому, как было сделано для параболической огибающей кругов Мора (см. главу 2). В таком случае исключается неопределённость выражений (4.97) при решении системы уравнений локального интегрирования. Математика вычислений коэффициентов проекций ω и β в пространстве главных напряжений довольно проста:

$$\omega_R = \frac{w\sigma_t}{\sigma_{\max}}, \quad \beta_R = \frac{\sigma_t}{\sigma_{\max}}. \quad (4.99)$$

Проводя аналогичные шаги по подстановке их в выражение для функции относительного уровня напряжений (4.44), получаем уже функцию относительного уровня растягивающих напряжений

$$s_R(\sigma) = \frac{\sigma_{\max} - w\sigma_t}{\sigma_t - w\sigma_t}. \quad (4.100)$$

Объединяя её с функцией $s_{MC}(\sigma)$ критерия Кулона-Мора для совместного действия, записываем общую функцию относительного уровня напряжений

$$s_{MC/R}(\sigma) = \begin{cases} s_{MC}(\sigma), & s_{MC}(\sigma) > s_R(\sigma), \\ s_R(\sigma), & s_{MC}(\sigma) \leq s_R(\sigma), \end{cases} \quad (4.101)$$

которая учитывает как сдвиговые, так и растягивающие напряжения. На рис. 4.29 можно увидеть графически представленное поле значений функции (4.101) для условий ПДС в пространстве главных напряжений ($\varepsilon_2^{in} = 0$ и $m = 1$).

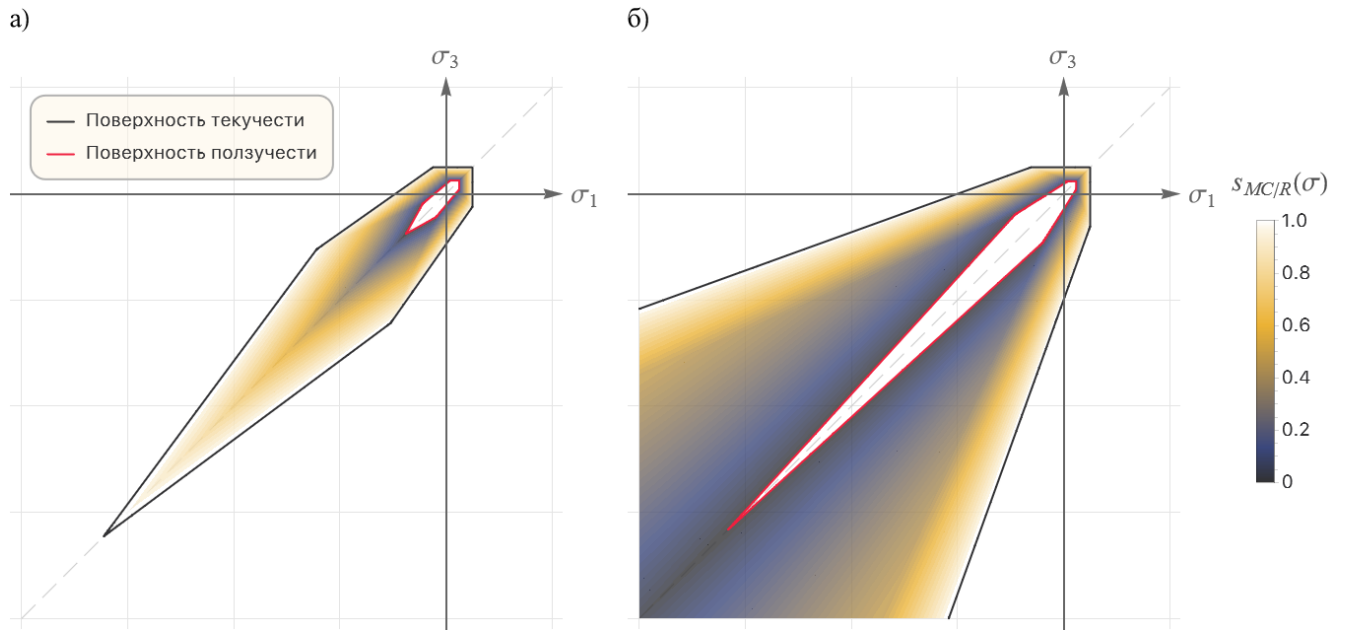


Рисунок 4.29 – Поле значений функции относительного уровня напряжений критерия Кулона-Мора/Рэнкина в пространстве главных напряжений для условий ПДС, где коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и: а) $\phi < \arcsin(1 - 2\nu)$, б) $\phi \geq \arcsin(1 - 2\nu)$

Ещё один момент, который требует рассмотрения, это используемый потенциал неупругих деформаций для описания развития деформаций ползучести. Согласно методу проекции напряжений пластический потенциал берётся на поверхности текучести, т.е. на верхней проекции, если говорить в контексте

модифицированного метода проекции напряжений. Для критерия Кулона-Мора верхняя проекция определяется из (4.96)₂. Тогда, если взять это уравнение за пластический потенциал

$$\Psi_{MC} \equiv \Phi^{MC}(\beta_{MC}\tau_{\max}, \sigma_n, \sigma_y), \quad (4.102)$$

то тензор направления развития неупругих деформаций будет иметь вид

$$\frac{\partial \Psi_{MC}}{\partial \sigma} = \beta_{MC} \frac{\partial \Phi^{MC}}{\partial \tau_{\max}} \frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^{MC}}{\partial \sigma_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial \sigma}, \quad (4.103)$$

что не соответствует (4.38), где коэффициент верхней проекции β появляется перед производной пластического потенциала. Это логично, т.к. верхняя проекция была введена путём масштабирования только касательных напряжений. Стоит заметить, что в отличие от чисто пластического течения тензор неупругих деформаций ползучести не является константным в пределах одной из зон (4.8), поскольку в нём участвует коэффициент верхней проекции β . Общий вид тензора развития неупругих деформаций ползучести для критерия Кулона-Мора принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_{MC}^{cr} = \dot{\lambda}^{cr} \frac{\partial \Psi_{MC}}{\partial \sigma}. \quad (4.104)$$

В пространстве главных напряжений векторы деформаций ползучести для зон Ω_{123} , Ω_{213} и Ω_{132} записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{MC,123}^{3D} &= (\sin \varphi + \beta_{MC}, 0, \sin \varphi - \beta_{MC})^T, \\ N_{MC,213}^{3D} &= (0, \sin \varphi + \beta_{MC}, \sin \varphi - \beta_{MC})^T, \\ N_{MC,132}^{3D} &= (\sin \varphi + \beta_{MC}, \sin \varphi - \beta_{MC}, 0)^T. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Заменяя угол внутреннего трения ϕ на угол дилатансии ψ , можно регулировать уровень объёмных неупругих деформаций аналогично неассоциированному пластическому течению Кулона-Мора (см. главу 2). В области растяжения, где действует критерий Рэнкина, тензор неупругих деформаций ползучести соответствует (4.38):

$$\dot{\varepsilon}_R^{cr} = \dot{\lambda}^{cr} \beta_R \frac{\partial \Psi_R}{\partial \sigma}, \quad \Psi_R \equiv \Phi^R. \quad (4.106)$$

Таким образом, неявная схема локального интегрирования в виде алгоритма обратного отображения в пространстве главных напряжений сводится к решению системы невязок из трёх уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n^{2D} - \sigma^{\text{trial}} + D_{2D}^e \Delta \lambda^{\text{cr}} \Theta_{\Delta, MC/R} = 0, \\ \mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{\text{in}} - \varepsilon_{2,n-1}^{\text{in}} - \Delta \lambda^{\text{cr}} N_{2, MC/R}^{3D} = 0, \\ \mathbf{R}_\lambda \equiv s_{MC/R}(\sigma_n^{2D}, \sigma_y, \sigma_{\text{CP}}) - \left(\frac{\eta \Delta \lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0, \end{cases} \quad (4.107)$$

где

$$\Theta_{\Delta, MC/R} = \begin{cases} \Theta_\Delta(\Psi_{MC}), & s_{MC}(\sigma) > s_R(\sigma), \\ \beta_R \Theta_\Delta(\Psi_R), & s_{MC}(\sigma) \leq s_R(\sigma). \end{cases} \quad (4.108)$$

Конечно же, напряжения, полученные в результате решения системы (4.107), могут выходить за пределы начальной зоны (та, к которой принадлежат напряжения σ^{trial}). Либо в её пределах может меняться часть кусочной функции (4.101) (смена действующего критерия), т.е. нарушаться одно из начальных условий: $s_{MC}(\sigma^{\text{trial}}) > s_R(\sigma^{\text{trial}})$ или $s_{MC}(\sigma^{\text{trial}}) \leq s_R(\sigma^{\text{trial}})$. В обоих случаях определяется смежная зона и смежный критерий аналогично упругопластической модели (см. главу 2) и с помощью обобщения Койтера включается в систему невязок, вводя дополнительное уравнение и изменяя существующие:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\sigma \equiv \sigma_n^{2D} - \sigma^{\text{trial}} + D_{2D}^e (\Delta \lambda_{\text{init}}^{\text{cr}} \Theta_{\Delta, \text{init}} + \Delta \lambda_{\text{adj}}^{\text{cr}} \Theta_{\Delta, \text{adj}}) = 0, \\ \mathbf{R}_z \equiv \varepsilon_{2,n}^{\text{in}} - \varepsilon_{2,n-1}^{\text{in}} - \Delta \lambda_{\text{init}}^{\text{cr}} N_{2, \text{init}}^{3D} - \Delta \lambda_{\text{adj}}^{\text{cr}} N_{2, \text{adj}}^{3D} = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda, \text{init}} \equiv s_{\text{init}}(\sigma_n^{2D}, \sigma_y, \sigma_{\text{CP}}) - \left(\frac{\eta \Delta \lambda_{\text{init}}^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0, \\ \mathbf{R}_{\lambda, \text{adj}} \equiv s_{\text{adj}}(\sigma_n^{2D}, \sigma_y, \sigma_{\text{CP}}) - \left(\frac{\eta \Delta \lambda_{\text{adj}}^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0. \end{cases} \quad (4.109)$$

Индексные подписи *init* и *adj* обозначают принадлежность к начальным и смежным зоне/критерию, соответственно.

В построении якобианов систем (4.107) и (4.109) участвуют производные функций относительного уровня напряжений $\partial s_{MC/R}(\sigma) / \partial \mathbf{v}$ и коэффициентов верхних проекций $\partial \beta_{MC/R} / \partial \mathbf{v}$. Сведём их вычисление к векторно-матричным

операциям аналогично тому, как это было сделано для объёмного критерия. Вместо вектора $\mathbf{v}$ неизвестных систем невязок используем вектор $\mathbf{s}$ из (4.83), т.к. упрочнение не предполагается. Тогда производные функций относительного уровня напряжений по этому вектору можно записать в виде скалярного умножения матрицы на вектор вида (4.80), где сами матрица и вектор имеют вид (4.81). Работая в пространстве главных напряжений, начальная зона может соответствовать одной из трёх: Ω_{123} , Ω_{132} и Ω_{213} ; а смежная – одной из пяти: Ω_{123} , Ω_{132} , Ω_{312} , Ω_{213} и Ω_{231} . Производные числителей коэффициентов β_{MC} для этих зон выглядят как

$$\begin{aligned} \frac{\partial Nm(\beta_{MC,123})}{\partial \mathbf{s}} &= -\sin \phi (1, 1, 0)^T, \\ \frac{\partial Nm(\beta_{MC,213})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Nm(\beta_{MC,312})}{\partial \mathbf{s}} = -\sin \phi (\nu, 1 + \nu, E)^T, \\ \frac{\partial Nm(\beta_{MC,132})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Nm(\beta_{MC,231})}{\partial \mathbf{s}} = -\sin \phi (1 + \nu, \nu, E)^T, \end{aligned} \quad (4.110)$$

а также производные их знаменателей –

$$\begin{aligned} \frac{\partial Dm(\beta_{MC,123})}{\partial \mathbf{s}} &= (1, -1, 0)^T, & \frac{\partial Dm(\beta_{MC,231})}{\partial \mathbf{s}} &= (\nu - 1, \nu, -E)^T, \\ \frac{\partial Dm(\beta_{MC,213})}{\partial \mathbf{s}} &= (\nu, \nu - 1, -E)^T, & \frac{\partial Dm(\beta_{MC,312})}{\partial \mathbf{s}} &= (-\nu, 1 - \nu, E)^T, \\ \frac{\partial Dm(\beta_{MC,132})}{\partial \mathbf{s}} &= (1 - \nu, -\nu, E)^T, \end{aligned} \quad (4.111)$$

Отметим, что производные (4.110) и (4.111) являются константными, а следовательно, и матрица $\mathbf{M}$ является таковой, что позволяет вычислить её заранее. Таким образом, в локальном итерационном процесса Ньютона-Рафсона необходимо обновлять только вектор $\mathbf{g}$ для вычисления производных коэффициента верхней проекции $\partial \beta_{MC} / \partial \mathbf{s}$. Аналогично для пяти зон записываются производные числителей функций относительного уровня касательных напряжений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Nm(s_{MC,123})}{\partial \mathbf{s}} &= (a, b, 0)^T, & \frac{\partial Nm(s_{MC,231})}{\partial \mathbf{s}} &= (av + b, av, -Ea)^T, \\
\frac{\partial Nm(s_{MC,213})}{\partial \mathbf{s}} &= (av, av + b, -Ea)^T, & \frac{\partial Nm(s_{MC,312})}{\partial \mathbf{s}} &= (bv, a + bv, -Eb)^T, \\
\frac{\partial Nm(s_{MC,132})}{\partial \mathbf{s}} &= (a + bv, bv, -Eb)^T,
\end{aligned} \tag{4.112a}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \sin \phi_{cr} + 1, \\
b &= \sin \phi_{cr} - 1,
\end{aligned} \tag{4.112б}$$

и их знаменателей

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Dm(s_{MC,123})}{\partial \mathbf{s}} &= (\sin \phi_{cr} - \sin \phi)(1, 1, 0)^T, \\
\frac{\partial Dm(s_{MC,213})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Dm(s_{MC,312})}{\partial \mathbf{s}} = (\sin \phi_{cr} - \sin \phi)(\nu, 1 + \nu, E)^T, \\
\frac{\partial Dm(s_{MC,132})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Dm(s_{MC,231})}{\partial \mathbf{s}} = (\sin \phi_{cr} - \sin \phi)(1 + \nu, \nu, E)^T.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Производные (4.112a) и (4.113) так же являются константными. Выражения соответствующих $\partial \beta_R / \partial \mathbf{s}$ и $\partial s_R / \partial \mathbf{s}$ производных для критерия Рэнкина имеют довольно простой вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Dm(\beta_{R,123})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Dm(\beta_{R,132})}{\partial \mathbf{s}} = (1, 0, 0)^T, \\
\frac{\partial Nm(\beta_R)}{\partial \mathbf{s}} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial Dm(\beta_{R,213})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Dm(\beta_{R,231})}{\partial \mathbf{s}} = (\nu, \nu, -E)^T, \\
& & \frac{\partial Dm(\beta_{R,312})}{\partial \mathbf{s}} &= (0, 1, 0)^T. \\
\frac{\partial Nm(s_{R,123})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Nm(s_{R,132})}{\partial \mathbf{s}} = (1, 0, 0)^T, \\
\frac{\partial Nm(s_{R,213})}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial Nm(s_{R,231})}{\partial \mathbf{s}} = (\nu, \nu, -E)^T, & \frac{\partial Dm(s_R)}{\partial \mathbf{s}} &= \mathbf{0}. \\
\frac{\partial Nm(s_{R,312})}{\partial \mathbf{s}} &= (0, 1, 0)^T.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Результаты многовариантного численного моделирования процесса ползучести двухпластового камерного блока под действием гравитации для критерия Кулона-Мора с применением модифицированного метода проекции

напряжений продемонстрированы на рис. 4.30-4.37 для различных участков. Соответствующие механические параметры областей камерных блоков указаны в табл. 4.3.

Таблица 4.3

**Физико-механические параметры камерных блоков
экспериментальных участков**

Толща	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, 10^4 Н/м^3	Коэффициент сцепления, МПа	Угол внутреннего трения, град.	Угол дилатансии, град.	Коэффициент вязкости, сутки	Чувствительность скорости	Коэффициент ползучести
<i>Участок №2</i>									
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	5	35	35	$7.5 \cdot 10^5$	0.2	0.2
Пласт КрII	1	0.3	2.2	8	25	25	$2 \cdot 10^5$	0.2	0.25
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	8	25	25	$2 \cdot 10^5$	0.2	0.25
<i>Участок №3</i>									
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	10	35	35	$6 \cdot 10^5$	0.2	0.2
Пласт КрII	1	0.3	2.2	8	25	23	$8.5 \cdot 10^4$	0.2	0.25
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	8	25	23	$3.5 \cdot 10^4$	0.2	0.25
<i>Участок №4</i>									
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	10	25	25	$9 \cdot 10^5$	0.2	0.23
Пласт КрII	1	0.3	2.2	8	25	25	$1.9 \cdot 10^5$	0.2	0.25
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	8	25	25	$2 \cdot 10^5$	0.2	0.25
<i>Участок №6</i>									
Вышележащая толща	1	0.3	2.2	6	35	20	$9 \cdot 10^4$	0.2	0.2
Пласт КрII	1	0.3	2.2	10	25	25	$4.9 \cdot 10^4$	0.2	0.25
Нижележащая толща	1	0.3	2.2	8	25	25	$1.4 \cdot 10^5$	0.2	0.24

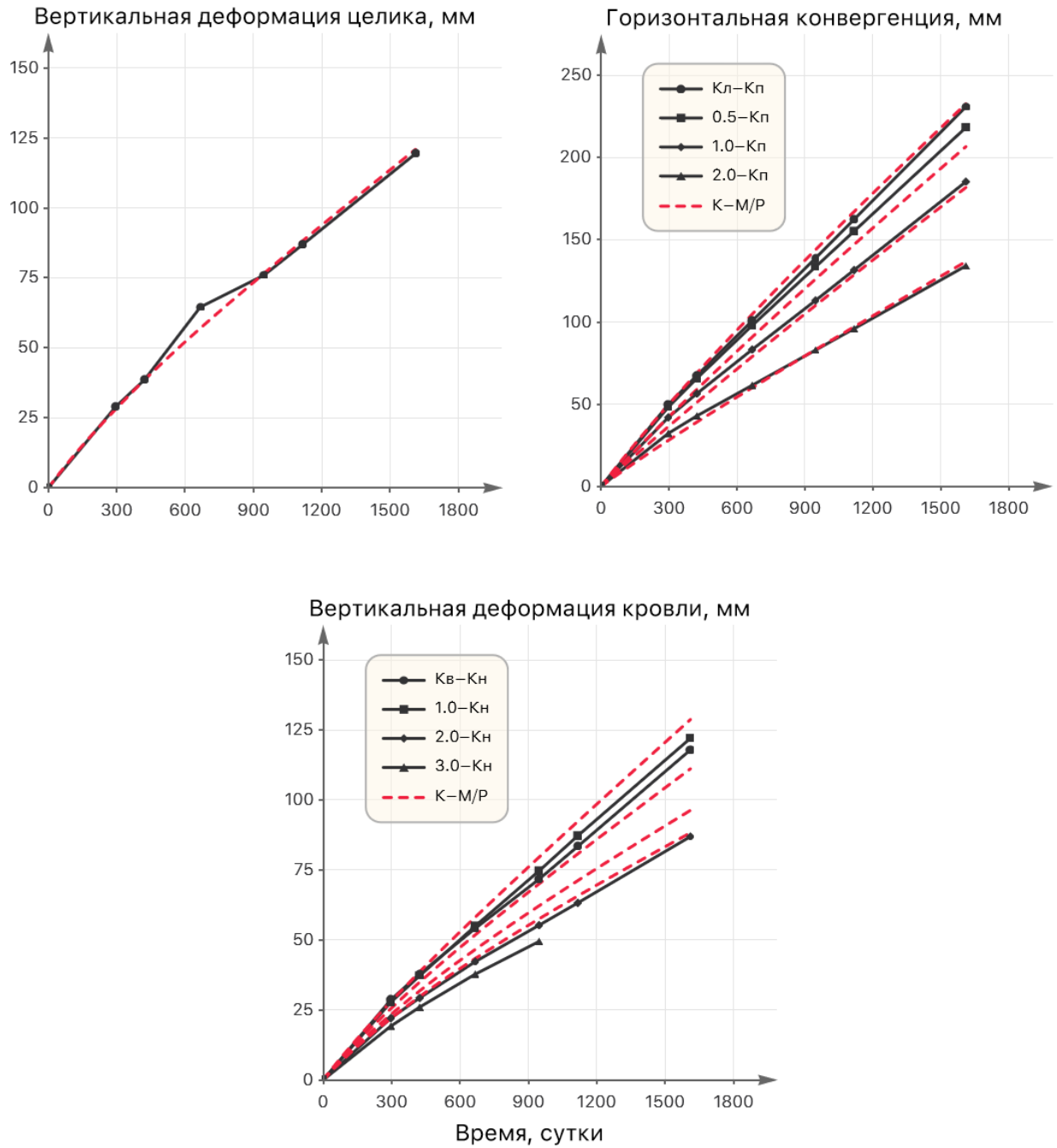


Рисунок 4.30 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №2 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

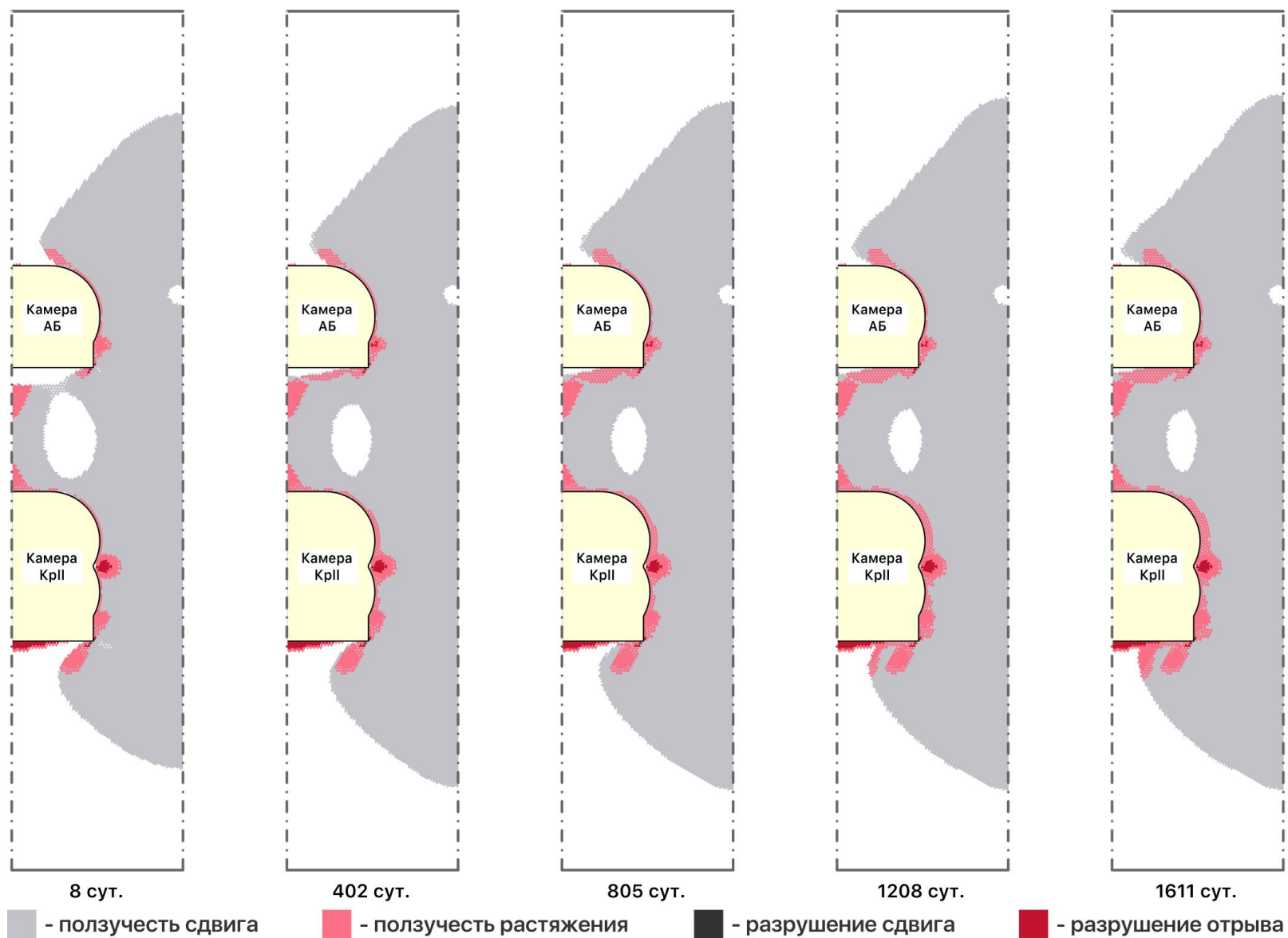


Рисунок 4.31 – Зоны ползучести и нарушения вмещающих пород на участке станции №2 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

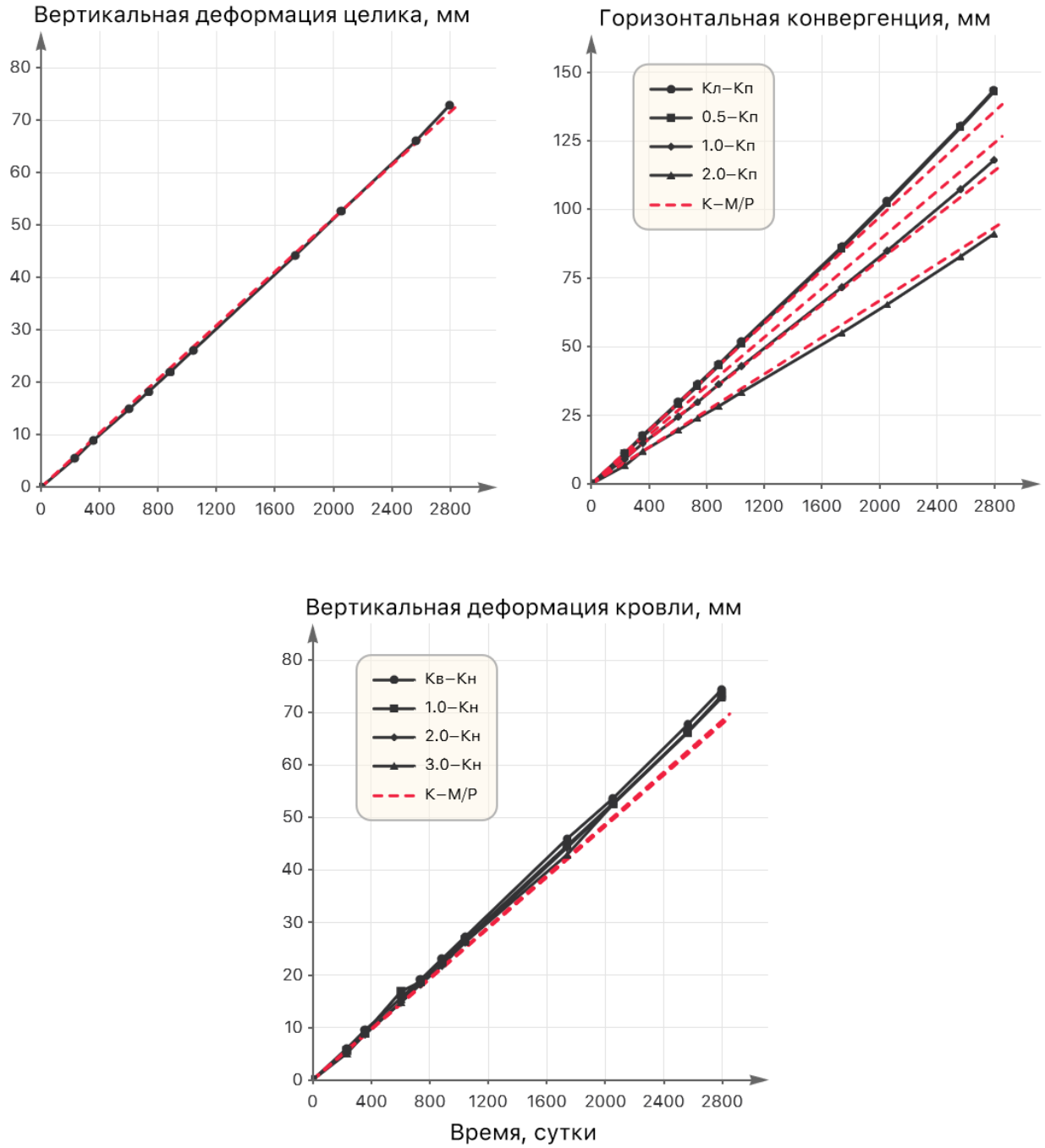


Рисунок 4.32 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №3 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

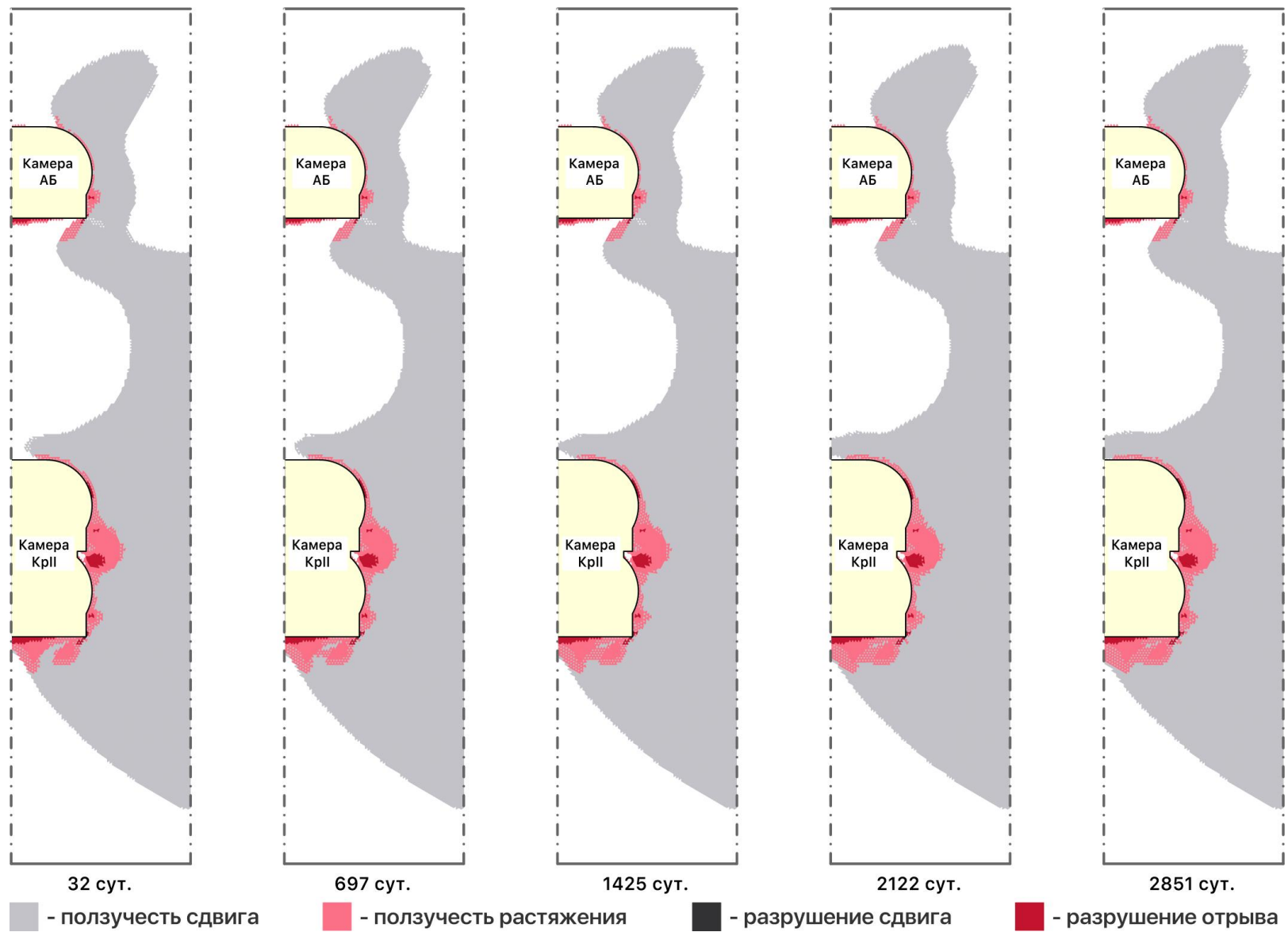


Рисунок 4.33 – Зоны ползучести и нарушения вмещающих пород на участке станции №3 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

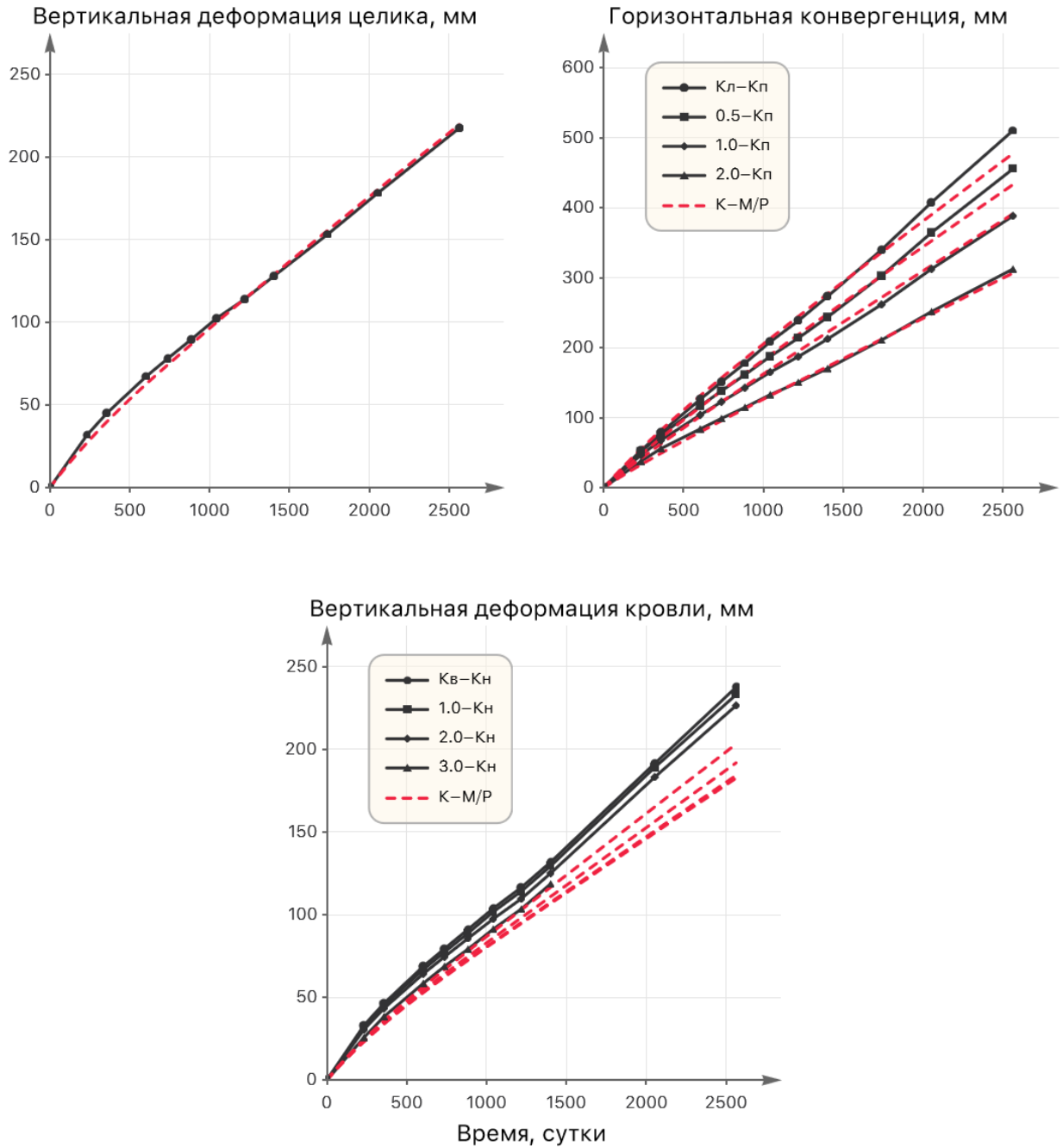


Рисунок 4.34 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №4 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

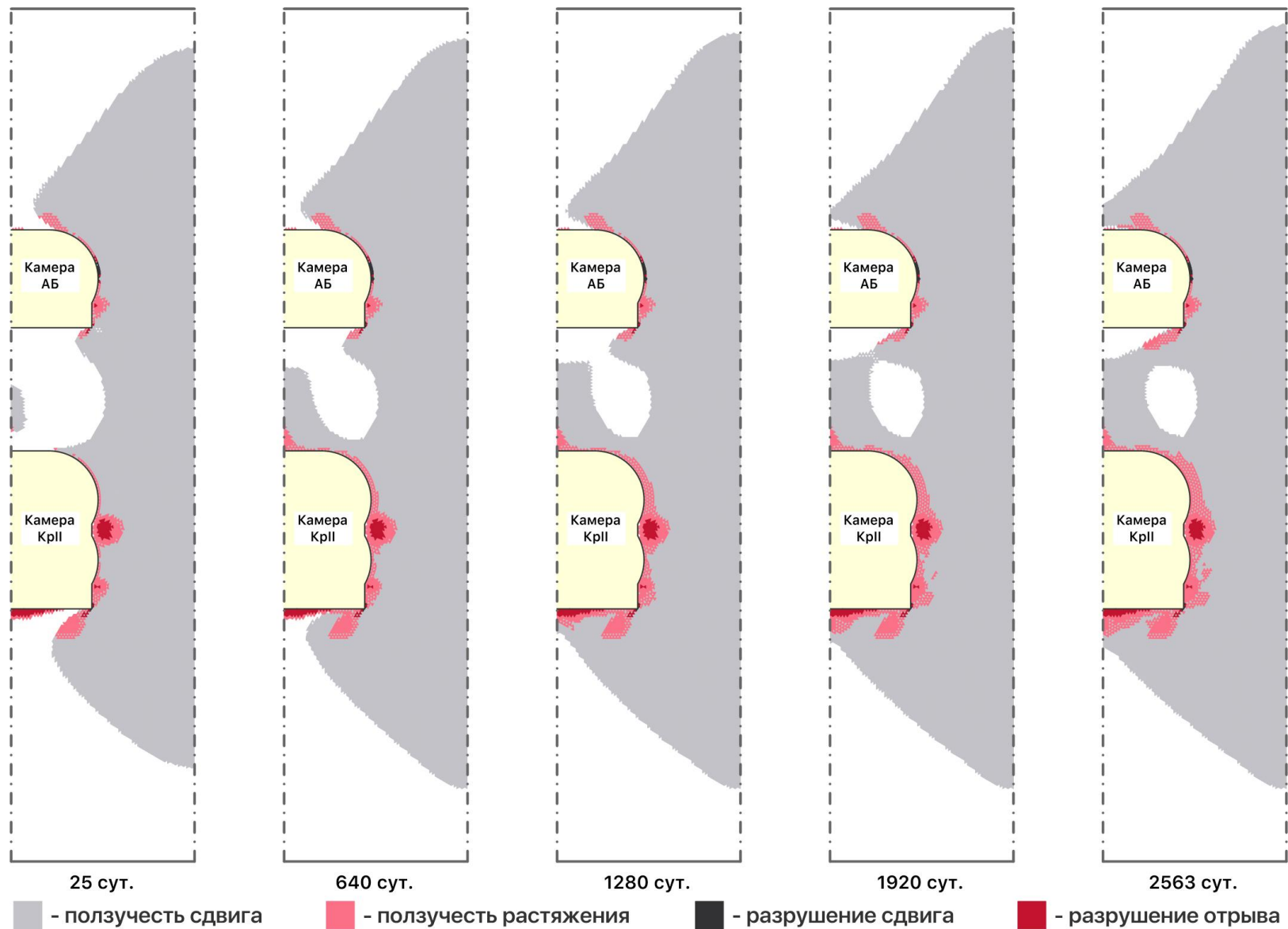


Рисунок 4.35 – Зоны ползучести и нарушения вмещающих пород на участке станции №4 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

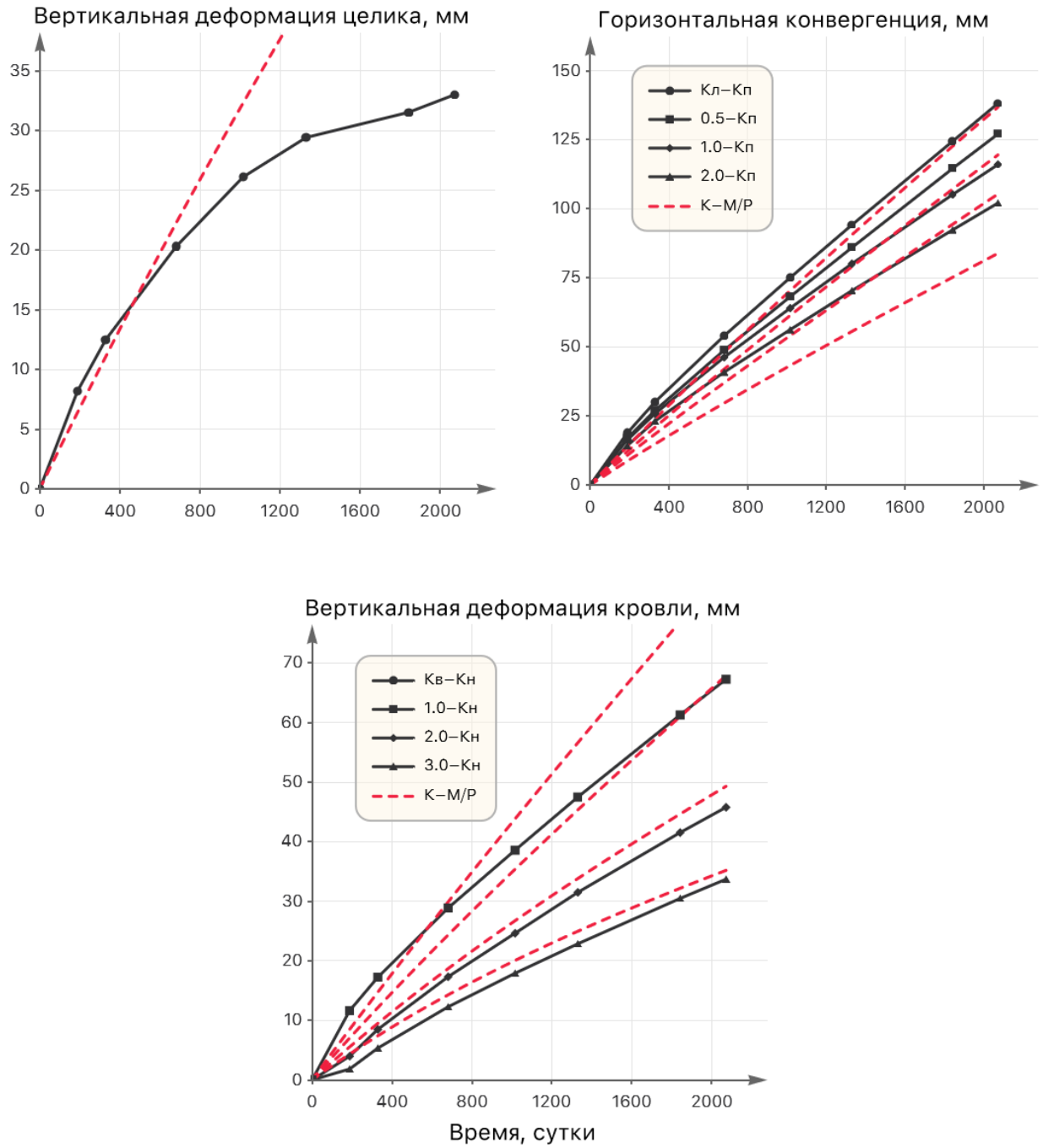


Рисунок 4.36 – Результаты моделирования процесса ползучести в камерном блоке участка станции №6 вследствие применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

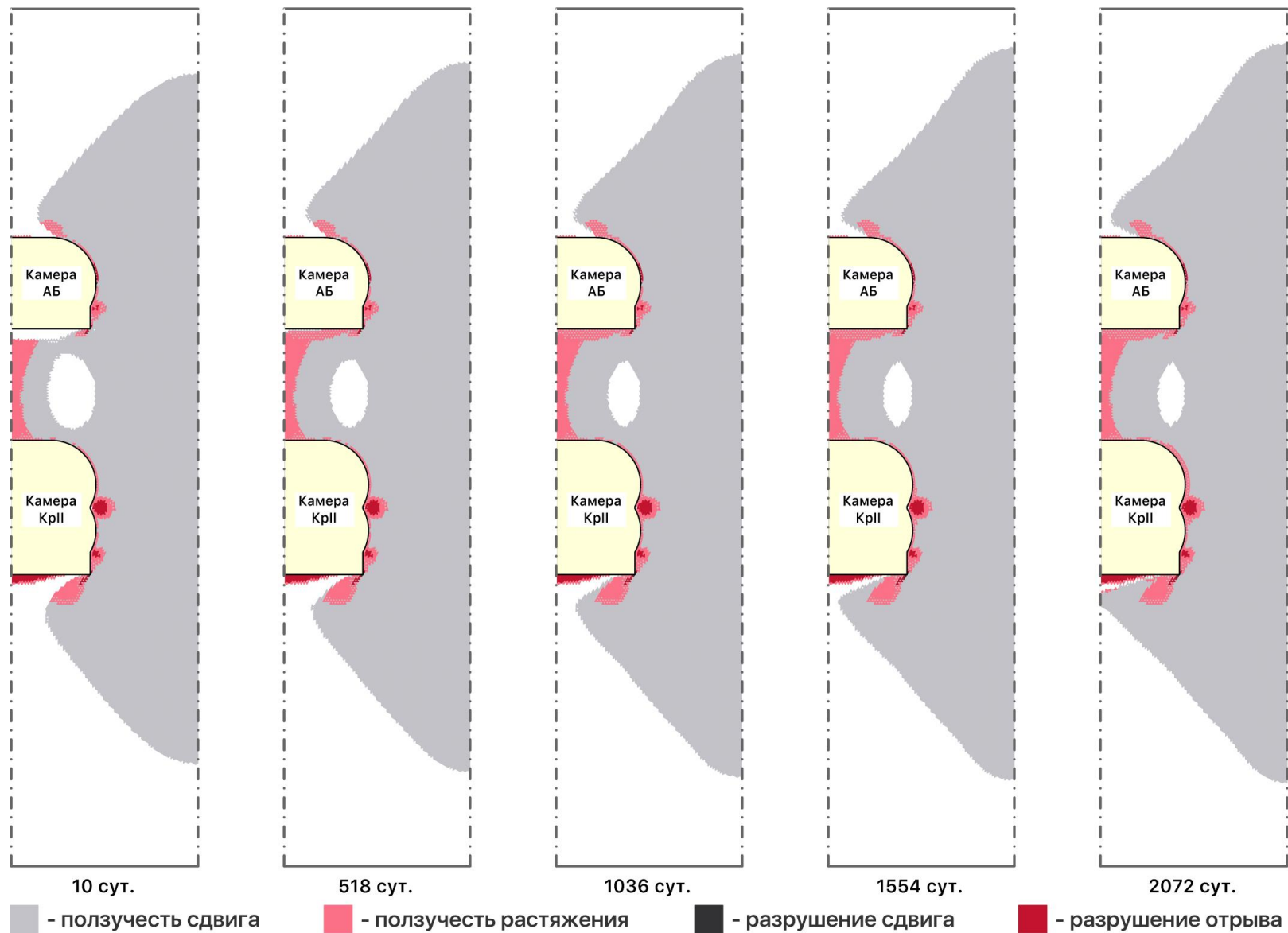


Рисунок 4.37 – Зоны ползучести и нарушения вмещающих пород на участке станции №6 в результате применения модифицированного метода проекции напряжений (неассоциированный Кулон-Мор)

Как видно из диаграмм нарастания деформаций в камерном блоке в процессе ползучести модифицированный метод проекции напряжений, реализованный для критериев пластичности Кулона-Мора и объёмного параболического, позволяет адекватно с приемлемой точностью описать как продольную, так и поперечные (горизонтальные конвергенции стенок камер) деформации междукammerных целиков. Аддитивное разложение тензора скорости неупругих деформаций на независимую и зависящую от времени составляющие вместе с введённым пределом ползучести модифицированного метода проекции напряжений даёт возможность ограничить зоны вмещающих пород, где активизируются процессы ползучести, а также получить области нарушения, наиболее соответствующие фактическому характеру разрушения междукammerных целиков. При этом параметрическое обеспечение расчётов базируется на реальных свойствах соляных пород.

4.6 Выводы

1. На основе многовариантного численного моделирования напряженно-деформированного состояния камерного блока показано, что упруго-вязкопластическая модель, базирующаяся на ассоциированном объёмном критерии пластичности и законе вязкопластичности Перича, качественно и количественно описывает характер деформирования междукammerных целиков. Вместе с тем для обеспечения требуемых скоростей их деформации необходимым является существенное снижение предела прочности на сжатие соляных пород, что обуславливает интенсификацию процесса разрушения целиков, которая не соответствует результатам визуальных и инструментальных наблюдений. Таким образом, упруго-вязкопластическая модель, успешно реализованная при моделировании ползучести образцов в условиях одноосного сжатия, не позволяет адекватно описать процесс разрушения междукammerных целиков. Данный факт может быть связан с тем, что напряженное состояние камерного блока не соответствует одноосному сжатию.

2. Разработана модификация метода проекции напряжений, основанная на введении в вязкопластическую модель дополнительного внутреннего параметра, предела ползучести, и соответствующего способа вычисления эквивалентного напряжения ползучести. Предел ползучести регулирует размер упругой зоны (зоны отсутствия ползучести) и связан с критерием пластичности через предел текучести. Предел ползучести представляет из себя масштабированный с помощью коэффициента ползучести предел текучести и определяет уровень напряжённого состояния относительно предела текучести, с которого активируется процесс ползучести материала.

3. Построен алгоритм численной реализации модифицированного метода проекций напряжений в связке с объёмным критерием пластичности и критерием Кулона-Мора. Алгоритм основан на неявной схеме Эйлера локального интегрирования вязкопластических соотношений методом обратного отображения, где в соответствующую систему невязок добавляется уравнение, описывающее связь текущих напряжений с функцией относительного уровня напряжений, которая участвует в вычислении эквивалентного напряжения ползучести в уравнении развития вязкопластического множителя. В качестве этого уравнения предложена вязкопластическая модель подобная закону Перича. Для объёмного критерия пластичности рекомендовано использовать уравнения коэффициентов проекций напряжений вместо уравнения функции относительного уровня напряжений во избежание вычислительных трудностей. В связи с тем, что для критерия Кулона-Мора модифицированный метод проекции напряжений некорректно определяет предел ползучести, разработан отдельный алгоритм его вычисления, а также функций относительного уровня напряжений и соответствующего эквивалентного напряжения ползучести. Совместное развитие деформаций ползучести и деформаций пластичности реализовано с помощью двухэтапного алгоритма локального интегрирования. В соответствии с ним сначала решается система невязок упруго-вязкопластических уравнений, а затем, если полученные напряжения выходят за предел текучести, решается система невязок

упругопластических соотношений, ограничивая тем самым действующие напряжения поверхностью текучести.

4. Модифицированный метод проекции напряжений, реализованный для критериев пластичности Кулона-Мора и объёмного параболического, в связке с вязкопластической моделью подобной закону Перича позволяет адекватно с приемлемой точностью описать продольную и поперечные деформации междукammerных целиков. Аддитивное разложение тензора скорости неупругих деформаций на независимую и зависящую от времени составляющие вместе с введённым пределом ползучести модифицированного метода проекции напряжений даёт возможность ограничить зоны вмещающих пород, где активизируются процессы ползучести, а также получить области нарушения, наиболее соответствующие фактическому характеру разрушения междукammerных целиков. При этом параметрическое обеспечение расчётов базируется на реальных свойствах соляных пород.

ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКОВ К ОЦЕНКЕ БЕЗОПАСНЫХ УСЛОВИЙ ПОДРАБОТКИ ВОДОЗАЩИТНОЙ ТОЛЩИ

5.1 Прогноз состояния междукламерных целиков

Подходы к теоретической оценке предельных состояний междукламерных целиков рассмотрены авторами в работе [111]. В ней по результатам многовариантного математического моделирования определены усреднённые показатели относительных скоростей поперечного деформирования целиков при различной начальной степени их нагружения (рис. 5.1). Анализ данных показывает, что при достижении относительной скорости поперечного деформирования целиков 50-100 мм/м в год в дальнейшем происходит стремительное её увеличение. Превышение этих значений может свидетельствовать о потере несущей способности целиков и переходе их в стадию прогрессирующей ползучести (третичной ползучести).

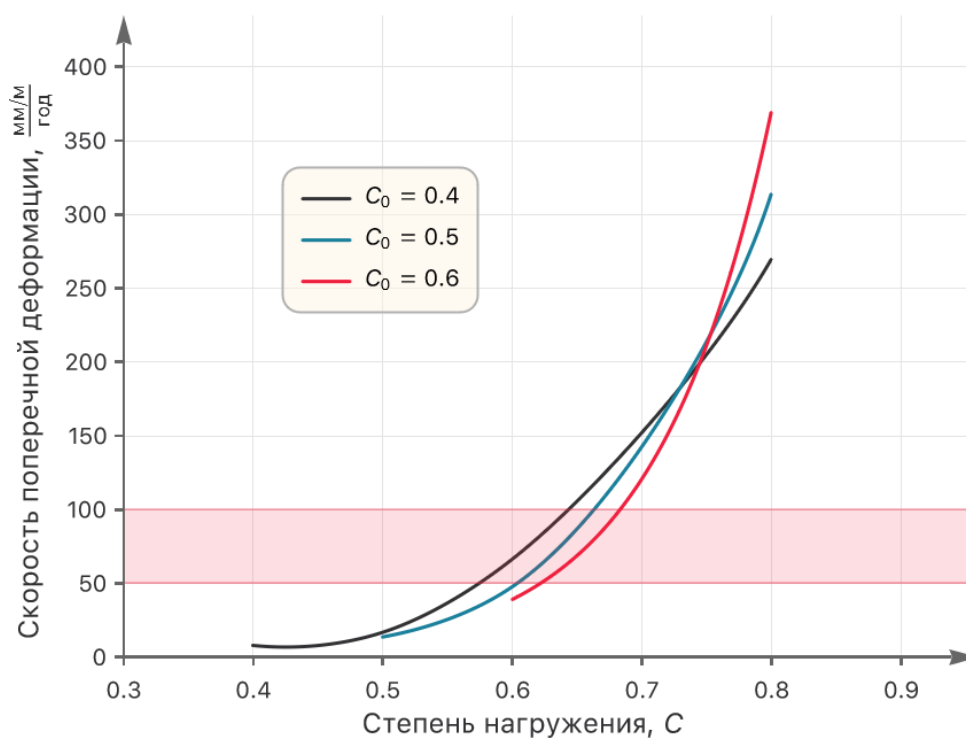


Рисунок 5.1 – Изменение относительной скорости поперечного деформирования целиков при различной начальной степени их нагружения

Таким образом, интервал значений скорости поперечного деформирования целиков 50-100 мм/м в год, вероятно, можно использовать как индикатор, характеризующий достижение предела устойчивого состояния несущих элементов камерной системы разработки. Для своевременной реакции на возможную потерю несущей способности междуканальных целиков в виде принятия дополнительных мер охраны регламентируется использовать значение скорости поперечной деформации 30 мм/м в год. Данные оценки стали основой для разработки методики оперативного контроля состояния междуканальных целиков [113] и организации массовых измерений горизонтальной конвергенции очистных камер на рудниках Верхнекамского месторождения.

Вместе с тем, следует отметить, что, когда скорости поперечных деформаций целиков приближаются к критическим значениям, доступ в очистные камеры, как правило, ограничен и, зачастую, к этому времени обычно производят закладку очистных камер. Таким образом, продолжение дальнейших инструментальных наблюдений становится невозможным.

В этом случае представляется целесообразным использовать прогнозные оценки, базирующиеся на упруго-вязкопластической модели, реализация которой дана в главе 4. В качестве примера с помощью построенной модели деформирования камерного блока выполним прогноз потери несущей способности целиков пласта КрII во времени. Для простоты моделирования и минимальных изменений в схеме интегрирования предположим, что потеря несущей способности целика реализуется за счёт уменьшения коэффициента вязкости во времени. Другими словами коэффициент вязкости теперь является функцией времени $\eta(t)$. Вязкость материалов непосредственно связана с их прочностью, способностью выдерживать нагрузку. Снижение прочности (несущей способности) можно трактовать как уменьшение вязкости. Физически этот факт для соляных пород может быть интерпретирован как нарушение межзёренных связей и развитие микротрещиноватости, что подтверждается лабораторными экспериментами [156]. Функцию уменьшения коэффициента вязкости примем линейной

$$\eta(t) = \eta_0 - \langle \chi(t - t_0) \rangle, \quad (5.1)$$

где η_0 это начальное значение коэффициента вязкости, χ – модуль уменьшения вязкости, t_0 – время отработки пласта, а $\langle \cdot \rangle$ обозначают скобки Маколея. В системы невязок локального интегрирования (4.61) и (4.70) (вариант плоской деформации) неявной схемы алгоритма обратного отображения с применением модифицированного метода проекции напряжений зависимость (5.1) вводится тривиально — путём замены в уравнении невязки $\mathbf{R}_\lambda$ коэффициента вязкости соответствующей функцией, поскольку локальное интегрирование производится при константном инкременте времени Δt . Таким образом уравнение невязки $\mathbf{R}_\lambda$ принимает вид

$$\mathbf{R}_\lambda \equiv \frac{1 - \omega_n}{\beta_n - \omega_n} - \left(\frac{\eta(t_n + \Delta t) \Delta \lambda^{\text{cr}} + \Delta t}{\Delta t} \right)^m + 1 = 0. \quad (5.2)$$

Здесь t_n обозначает предыдущий сошедшийся шаг интегрирования по времени. Для симуляции потери несущей способности междукамерных целиков пласта КрII использовались построенные модели камерных блоков (см. главу 4), расположенных на участках наблюдательных станций №2, №4 и №6. Участок станции №3 не рассматривался, ввиду большой разницы между датами отработки и заложения наблюдательной станции. В качестве пластического потенциала принят ассоциированный объёмный критерий (см. раздел 4.5) и соответствующие ему параметры (табл. 4.2), полученные в предыдущей главе. Модуль уменьшения вязкости χ подбирался таким образом, чтобы развитие продольных и поперечных деформаций целика КрII на начальном этапе максимально соответствовали наблюдаемым на замерных станциях.

Результаты многовариантного численного моделирования потери несущей способности МКЦ пласта КрII во времени в процессе ползучести представлены на рис. 5.2 в виде прогнозных диаграмм развития скоростей относительных поперечных деформаций целиков вместе с их регламентируемыми и критическими значениями. Соответствующие параметры функции уменьшения коэффициента вязкости (5.1) приведены в табл. 5.1. Как видно из графиков, для участков станций

№2 и №4 развитие скоростей относительных деформаций происходит практически одинаково. При этом значения параметров функции спада равны. Это объясняется тем, что степени нагружения целиков для этих станций почти совпадают и составляют $C \approx 0.4$. Степень нагружения целика КрII на станции №6 отличается и равна $C \approx 0.35$, что отражается на диаграммах скоростей относительных поперечных деформаций.

Таблица 5.1

Параметры функции уменьшения коэффициента вязкости

Участок	Начальный коэффициент вязкости, сутки	Модуль уменьшения вязкости
Участок станции №2	$1.4 \cdot 10^7$	$1.64 \cdot 10^3$
Участок станции №4	$1.4 \cdot 10^7$	$1.64 \cdot 10^3$
Участок станции №6	$5.9 \cdot 10^6$	$4.93 \cdot 10^2$

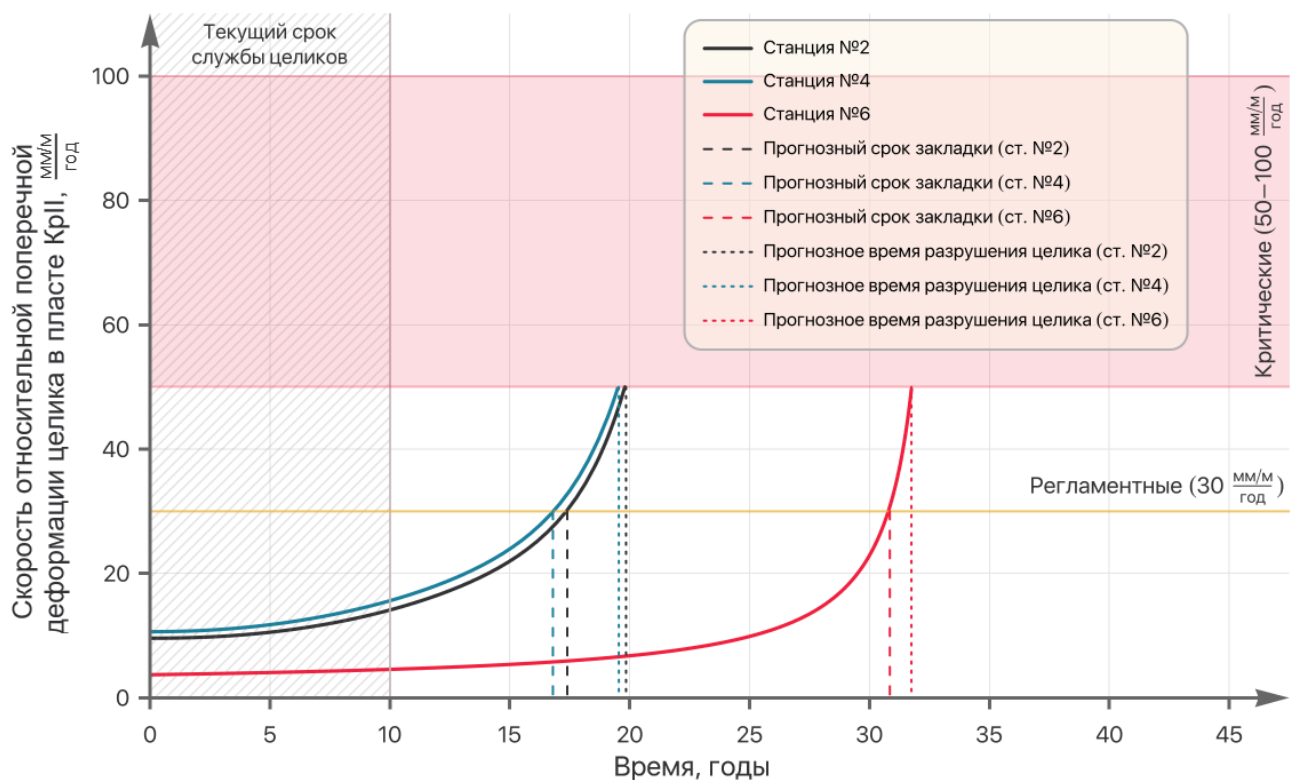


Рисунок 5.2 – Прогнозное развитие скоростей относительных поперечных деформаций междукамерных целиков пласта КрII во времени и оценка остаточного срока их службы

На настоящий момент времени срок службы целиков на участках №2 и №4 и №6 составляет примерно 10 лет. Полученные модельные графики скоростей можно использовать для прогнозных оценок остаточного срока службы междукammerных целиков и регламентированного периода производства необходимых закладочных работ. В частности, период, в течение которого необходимо выполнить закладку очистных камер пласта КрII, определяется точкой пересечения диаграмм скоростей с отметкой 30 мм/м в год. В этом случае для участков №2 и №4 время внесения закладки оценивается ближайшими 7-8 годами, а для участка №6 – примерно 20 годами.

Точка пересечения с нижней границей интервала критических скоростей (50 мм/м в год) может быть интерпретирована как время разрушения междукammerных целиков и может использоваться для оценки остаточного срока службы междукammerных целиков. Судя по результатам модельных расчётов (рис. 5.2), остаточный срок службы целиков пласта КрII на участках замерных станций №2 и №4 составляет приблизительно 10 лет, т.е. 20 лет после отработки. Следует отметить, что похожие результаты (23 года) для целиков с начальной степенью нагружения $C_0 = 0.4$ были получены в работе [47], где моделировалось изменение степени нагружения целиков во времени. Остаточный срок службы целиков на участке замерной станции №6 составляет 22 года.

Таким образом, вышеописанная методика предоставляет принципиальную возможность прогнозирования состояния междукammerных целиков и остаточного срока их службы с помощью построенной упруго-вязкопластической модели деформирования камерного блока во времени. Вместе с тем, необходимо отметить, что полученные оценки нуждаются в корректировке по результатам режимных измерений конвергенции очистных камер, особенно в условиях увеличения скоростей поперечных деформаций междукammerных целиков.

5.2 Оценка и прогноз безопасных условий подработки водозащитной толщи

При разработке месторождений калийных солей главной задачей на рудниках является сохранение водозащитной толщи на протяжении всего срока их эксплуатации. Нарушение целостности ВЗТ непосредственно связано с риском возникновения аварийных ситуаций, обусловленных прорывом пресных или слабонасыщенных вод в выработанное пространство [157,158], что может привести к затоплению и «гибели» рудников [159]. Деформации на земной поверхности при этом, как правило, начинают интенсивно развиваться вследствие растворения соляных пород с возможным образованием провалов, глубина которых может достигать сотен метров [160,161]. Как следствие, возникает угроза разрушения инфраструктуры, расположенной на земной поверхности.

Оценка безопасных условий подработки ВЗТ основывается на сейсмо-геомеханическом подходе, в рамках которого проводится ряд геофизических исследований. Построенные по их результатам физико-геологические модели породного массива образуют параметрическую основу геомеханического обеспечения безопасности горных работ. В процессе геомеханического анализа производятся построение и настройка расчётных схем, соответствующих физико-геологическим моделям и отражающих исходное напряжённое состояние породного массива, закономерности деформирования пород под нагрузкой, а также параметры ведения очистных работ [162]. По данным маркшейдерских наблюдений за оседаниями земной поверхности в совокупности с результатами сейсморазведочных исследований выполняется контроль адекватности геомеханических расчётов.

Однако, маркшейдерскими профилями невозможно охватить всю площадь земной поверхности под рудниками. Существует множество различных факторов, влияющих на их размещение, среди которых самый распространённый это тип местности (болота, водоёмы, городская застройка и т.п.). Частота маркшейдерской съёмки зависит от скорости нарастания оседаний земной поверхности и

представляет относительно трудоёмкий процесс. Кроме того, нередко реперы маркшейдерских профилей могут быть повреждены или утеряны. Всё это в конечном итоге влияет на проводимые оценки и прогнозы состояния водозащитной толщи методами математического моделирования. Таким образом, в некоторых случаях представляется целесообразным использовать косвенные подходы к оценке и прогнозу оседаний земной поверхности. Это позволит расширить площадь наблюдения за оседаниями и производить их контроль на участках, где осуществлять геодезические измерения не представляется возможным.

Исследования деформационных процессов несущих элементов камерной системы непосредственно в выработанном пространстве с помощью наблюдательных станций показывают устойчивую связь скорости вертикальной деформации междуканальных целиков со скоростью оседания земной поверхности. В свою очередь, измерение горизонтальных (поперечных) деформаций МКЦ является наиболее простым с технологической точки зрения способом определения деформационных параметров целиков [113].

В работе [163] предлагается оценивать скорости оседаний земной поверхности как скорректированную сумму скоростей горизонтальных конвергенций очистных камер (скоростей относительных поперечных деформации целиков) отработываемых пластов по следующей формуле

$$\dot{\eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{гор},i}}{\mu_{\text{ц}}} m_i, \quad (5.3)$$

где коэффициент соотношения поперечной и продольных деформаций целиков равен $\mu_{\text{ц}} = 1.6$.

Основываясь на формуле (5.3), модельные скорости относительных поперечных деформаций междуканальных целиков, полученные в результате численного моделирования процессов потери их несущей способности, можно использовать для расчёта скоростей оседаний земной поверхности на соответствующих участках и последующего геомеханического анализа состояния водозащитной толщи.

Геомеханический анализ безопасности ведения горных работ заключается в крупномасштабном моделировании изменения напряжённо-деформированного состояния водозащитной толщи вследствие ведения очистных работ. В этом случае отработанные продуктивные пласты моделируются средой с относительно пониженными механическими свойствами в зависимости от реализуемых параметров системы разработки.

Математическое описание состояния ВЗТ, а также всего подработанного массива, проводится с помощью изотропной идеальной упругопластической модели среды, которая учитывает весь комплекс горно-геологических и горнотехнических условий. Оценка изменения его напряжённо-деформированного состояния во времени осуществляется согласно реологическому подходу, основанному на теории наследственной вязкоупругости, где используются графики нарастания оседаний земной поверхности. Так вертикальные смещения земной поверхности можно выразить соотношением [164]:

$$v(t) = v_0 [1 + F^{cr}(t)], \quad (5.4)$$

где v_0 есть упругие смещения, связанные с формированием выработанного пространства; $F^{cr}(t)$ – функция ползучести. Графики нарастания оседаний, в свою очередь, определяются разностью полных и упругих смещений

$$\eta(t) = v(t) - v_0 = v_0 F^{cr}(t). \quad (5.5)$$

Таким образом, путём подбора теоретической функции $\eta(t)$, оптимально описывающей как наблюдаемые, так и прогнозные оседания земной поверхности, определяются реологические параметры. Реализация данного подхода основывается на модификации известного метода переменных модулей деформаций [165], согласно которому [164] деформирование только отработанных пластов моделируется с помощью переменных модулей. Начальный модуль деформации пласта (на момент его отработки) выражается как

$$E^p = \frac{b}{a+b} E = (1 - \omega) E, \quad (5.6)$$

где a и b это ширина камеры и междукammerного целика, соответственно; ω – коэффициент извлечения руды с пласта; E – модуль деформации породы. В зоне

полной подработки уравнения (5.4) и (5.5) определяют вертикальные смещения пласта, если его переменный модуль записать в виде [164]:

$$E_t^p(t) = \frac{E^p}{1 + (1 - \omega)F^{cr}(t)}. \quad (5.7)$$

Многопластовая отработка отражается путём применения соотношения (5.7) к каждому продуктивному пласту с соответствующими коэффициентом извлечения, модулем деформации и функцией ползучести $F^{cr}(t)$. В связи с чем вышеописанный реологический подход заключается в определении функций ползучести для каждого отработанного пласта с использованием фактических графиков нарастания оседаний земной поверхности. В соответствии с регламентом [8] или посредством экстраполирования маркшейдерских данных по оседаниям выполняется поиск функции $F^{cr}(t)$ для прогнозной оценки геомеханической ситуации на рассматриваемом участке.

При развитии процесса сдвижения анализ состояния ВЗТ производится посредством определения потенциальной возможности формирования субвертикальных трещин в подработанном массиве. Связь деформаций и напряжений на допредельной стадии деформирования описывается законом Гука. В области сжатия предельные напряжения (предел текучести) определяются из критерия Кулона-Мора (2.30) в виде двухзвенной линейной аппроксимации параболической огибающей кругов Мора с коэффициентом сцепления c и коэффициентом внутреннего трения $\tan \phi$ из следующих выражений:

$$c = \begin{cases} c_1, & \sigma_n \geq \sigma_c / 2, \\ c_2, & \sigma_n < \sigma_c / 2, \end{cases} \quad \tan \phi = \begin{cases} \tan \phi_1, & \sigma_n \geq \sigma_c / 2, \\ \tan \phi_2, & \sigma_n < \sigma_c / 2, \end{cases}$$

$$c_1 = \sqrt{\sigma_t} \sqrt{2\sigma_t - 2\sqrt{\sigma_t(\sigma_t + \sigma_c)} + \sigma_c},$$

$$c_2 = 2\left(\sqrt{\sigma_t + \sigma_c / 2} - \sqrt{\sigma_t + \sigma_c}\right) \sqrt{2\sigma_t - 2\sqrt{\sigma_c(\sigma_t + \sigma_c)} + \sigma_c},$$

$$\tan \phi_1 = 2\left(\sqrt{\sigma_t + \sigma_c / 2} - \sqrt{\sigma_t}\right) \sqrt{2\sigma_t - 2\sqrt{\sigma_t(\sigma_t + \sigma_c)} + \sigma_c} / \sigma_c,$$

$$\tan \phi_2 = 2\left(\sqrt{\sigma_t + \sigma_c} - \sqrt{\sigma_t + \sigma_c / 2}\right) \sqrt{2\sigma_t - 2\sqrt{\sigma_t(\sigma_t + \sigma_c)} + \sigma_c} / \sigma_c;$$

где напряжения $\tau_{\max}$ и σ_n вычисляются через значения главных напряжений:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\beta, \\ \sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\beta.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Здесь β это угол между плоскостью роста субвертикальной трещины и одной из горизонтальных осей координат. Критерий Рэнкина (2.43) используется для ограничения напряжений в области растяжения.

В геомеханических расчётах для корректировки прочностных свойств соляных пород и пород надсоляной толщи, развитых в геологическом разрезе, соответственно вводятся коэффициенты длительной прочности и структурного ослабления.

Численная реализация математических моделей выполняется методом конечных элементов в перемещениях для двумерных задач и с помощью полуаналитической схемы МКЭ [84] для трёхмерных, так же в перемещениях. Упругопластическая задача решается методом начальных напряжений [166]. Выделенные по результатам сейсморазведки природные аномалии в геомеханических расчётах учитываются как области соляных пород с пониженными прочностными и деформационными характеристиками. Степень уменьшения свойств пород задаётся в соответствии с установленным по результатам сейсморазведочных работ коэффициентом ослабления. Отражение природного генезиса «ослабленных» зон осуществляется путём определения поля дополнительных напряжений, получаемое только за счёт ведения горных работ. Начальные вертикальные напряжения в массиве, включая «ослабленные» зоны, принимаются равными γH (γ – удельный вес пород, H – глубина горных работ).

Локализация пластических деформаций в интервале водозащитной толщи интерпретируется как нарушение её сплошности. Разделяют два типа разрушения: вследствие развития трещин сдвига (в области сжатия) и трещин отрыва (в области растяжения). На этой основе проводится анализ опасности возникновения сквозного (по интервалу ВЗТ) нарушения сплошности ВЗТ под влиянием горных работ. По результатам математического моделирования выделяются зоны

разрушения пластов, слагающих ВЗТ. Контроль их пространственного местоположения осуществляется посредством сейсморазведочных исследований. Геомеханическая модель может корректироваться по мере необходимости в соответствии с интерпретационными геофизическими оценками прочностных и деформационных свойств пород и развитием процесса сдвижения.

Рассмотрим на примере некоторого гипотетического участка, в пределах которого производились измерения горизонтальной конвергенции очистных камер (замерные станции №2, №4 и №6), реализацию разработанной методики математического моделирования изменения состояния МКЦ во времени, основанной на упруго-вязкопластической модели потери несущей способности целиков (см. раздел 5.1). На участках проводится стандартная двухпластовая отработка продуктивных пластов АБ и КрII. В таком случае функции ползучести $F_i^{cr}(t)$ для каждого отработанного пласта будут определяться из соответствующих скорректированных скоростей горизонтальных (поперечных) деформаций междукamerных целиков по формуле

$$F_i^{cr}(t) = \int_{t_0}^t \dot{\eta}_i dt = \frac{m_i}{\mu_{ц}} \int_{t_0}^t \dot{\epsilon}_{гор, i} dt. \quad (5.9)$$

В качестве функций скоростей горизонтальной деформации под интегралом будем использовать полученные скорости в результате численного моделирования процессов потери несущей способности МКЦ в режиме ползучести (рис. 5.2). Поскольку в численном моделировании рассматривались только деформации в камере пласта КрII, то и на примере гипотетического участка будем определять функцию ползучести только для него: $F_{КрII}^{cr}(t)$. При этом скорости горизонтальных деформаций целиков пласта АБ $\dot{\epsilon}_{гор, АБ} = 0$ и соответственно $F_{АБ}^{cr}(t) = 0$. Принималось, что в ближайшие 30-40 лет вклад пласта АБ в деформацию подработанного массива будет минимальным. В этой связи на данном этапе расчётов его влиянием на состояние ВЗТ пренебрегалось.

Полученные по формуле (5.9) функции ползучести $F_{КрII}^{cr}(t)$ для пласта КрII представлены на рис. 5.3 в виде прогнозных графиков нарастания оседаний для

различных участков замерных станций. Оседания, соответствующие концу процесса сдвижения земной поверхности, определялись по формуле [9]:

$$\eta_{\text{end}} = 0.9 m \omega, \quad \omega = \frac{a}{a+b}; \quad (5.10)$$

где m означает вынимаемую мощность пласта при камерной системе отработки, ω – коэффициент извлечения руды, который вычисляется через ширину очистных камер и ширину междукammerных целиков.

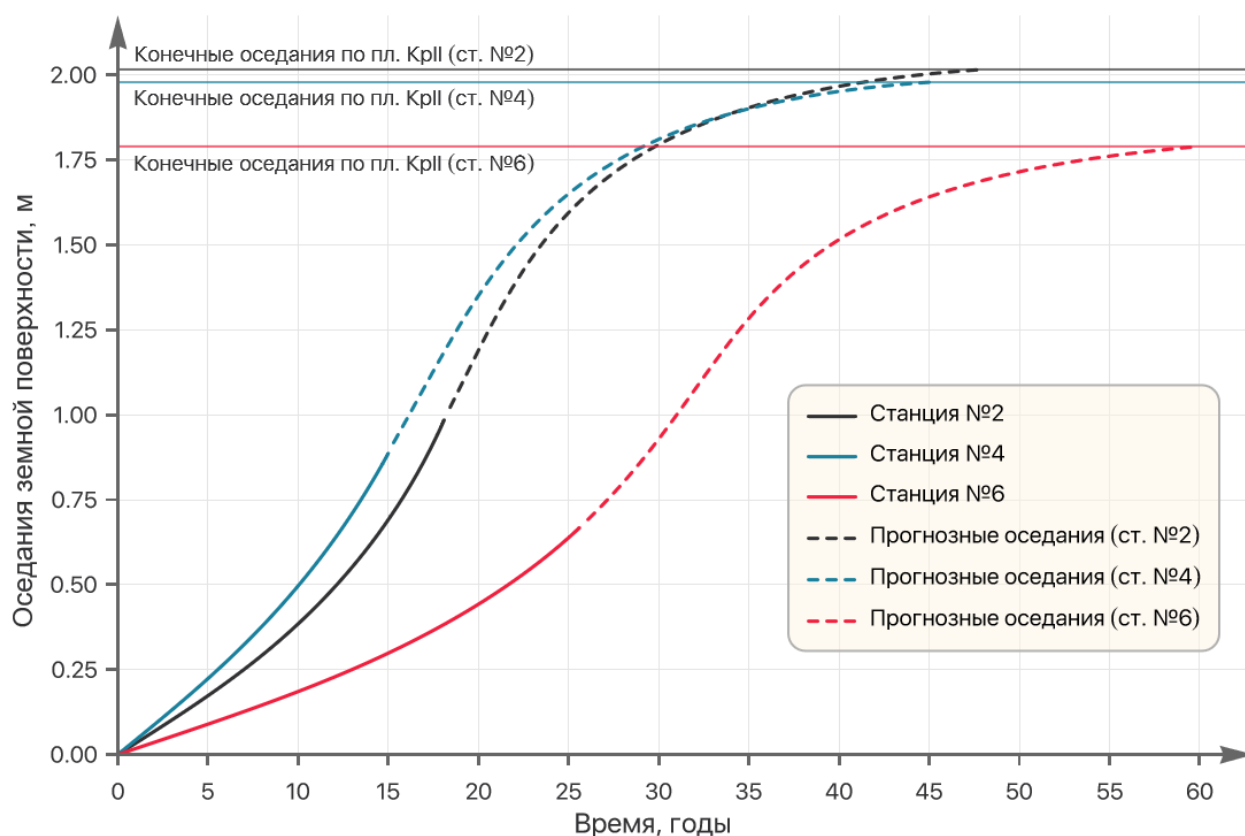


Рисунок 5.3 – Прогнозные графики нарастания оседаний земной поверхности

Оценку и прогноз состояния водозащитной толщи на рассматриваемом участке проводилась в постановке плоско деформированного состояния (ПДС), что соответствует камерной системе разработки. Предположим, что на моделируемом участке находятся три выемочные зоны с параметрами, соответствующими участкам заложения наблюдательных станций №№2, 4 и 6. Две зоны, соответствующие станциям №4 и №6, являются смежными, а между зонами №2 и №4 оставлен целик. Протяжённость каждой зоны (в том числе и целика) вдоль расчётного профиля принималась равной 500 м. Таким образом, общая длина

геомеханического профиля составляет 2 км. Горно-геологические условия на участке моделирования определяются средними для Верхнекамского месторождения показателями (рис. 1.1, см. главу 1). В расчёте также принимались средние физико-механические свойства пород, слагающих геологический разрез ВКМС. Геофизические аномалии природного и техногенного типа не рассматривались. Весь породный массив находится под действием сил гравитации.

Геомеханический расчёт напряжённо-деформированного состояния подработанного массива проводился на несколько временных отрезков: через 5, 10, 15, и 20 лет после отработки участков, а также на конец процесса сдвижения. Прогнозные оседания земной поверхности реализовывались за счёт подстановки зависимостей, отражающих нарастания оседаний (рис. 5.3), в качестве функций ползучести $F_{\text{крII}}^{\text{cr}}(t)$.

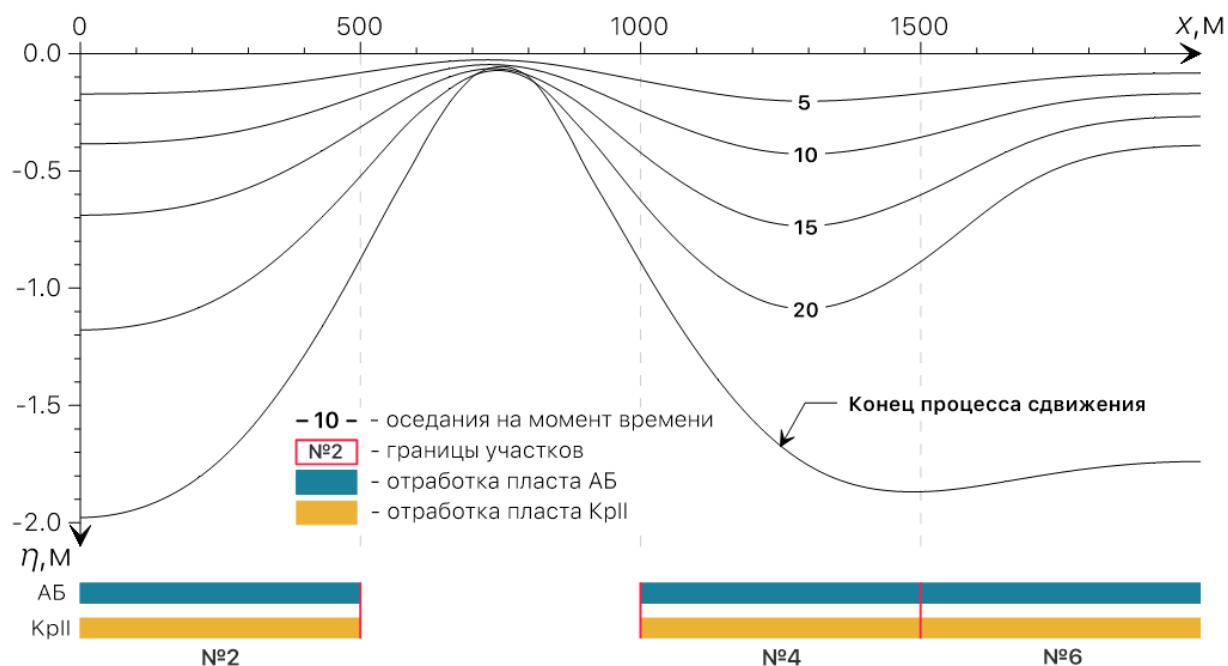


Рисунок 5.4 – Прогнозные расчётные оседания земной поверхности вдоль геомеханического профиля на различные моменты времени после отработки

Результаты математического моделирования процесса деформирования подработанного массива представлены в виде графиков оседаний земной поверхности на расчётные моменты времени (рис. 5.4) и соответствующие картины распределения субвертикальной нарушенности по интервалу водозащитной толщ

(рис. 5.5-5.9). Как видно из графиков, максимальные оседания земной поверхности реализуются в местах, где имеют место более высокие скорости горизонтальной конвергенции и соответственно выше скорости оседаний (зоны отработки №2 и №4). На участке, где расположен целик, формируется перегиб мульды сдвижения с увеличивающимися во времени градиентами на его границах. Полученные прогнозные графики оседаний вдоль расчётного геомеханического профиля в целом соответствуют заданным скоростям (рис. 5.2) на рассматриваемом участке.

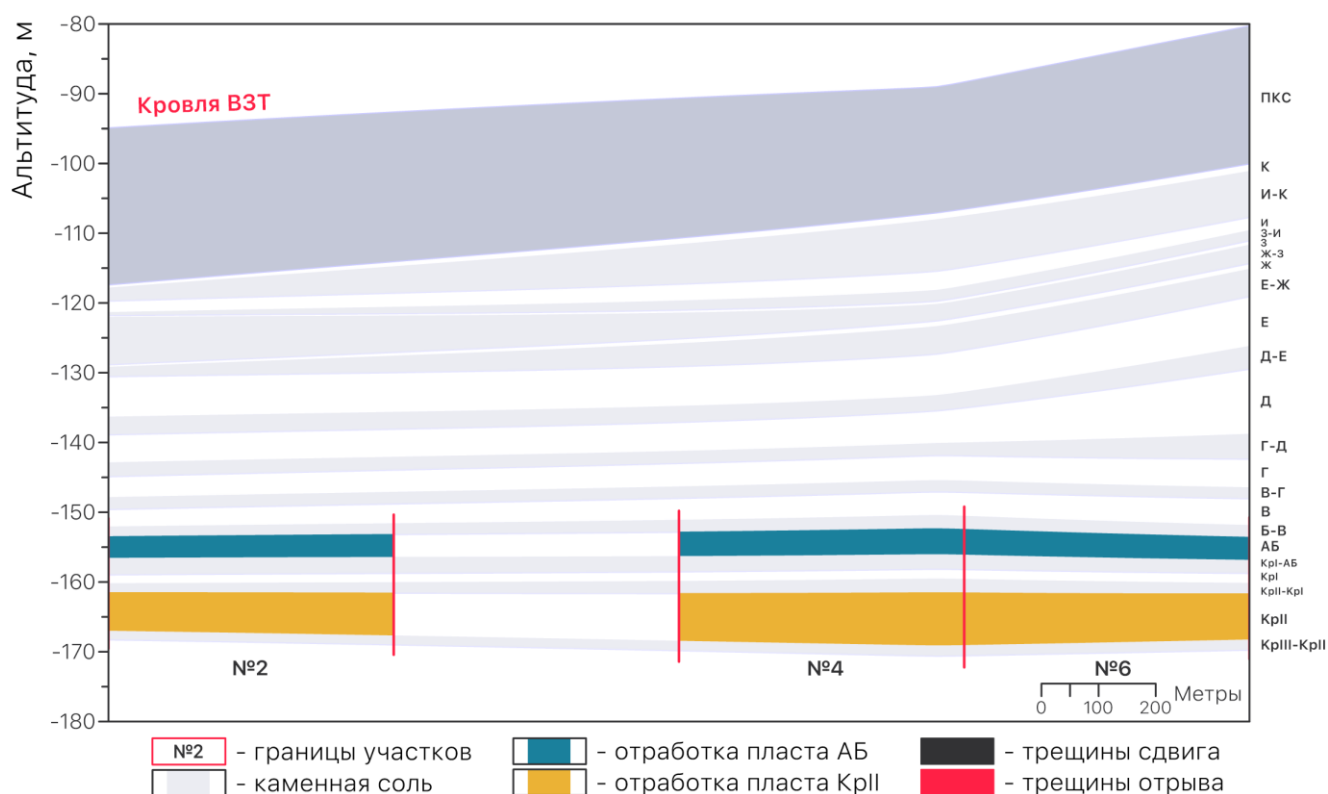


Рисунок 5.5 – Характер нарушения сплошности ВЗТ вдоль геомеханического профиля на прогнозный 5-й год после отработки

Априори высокие градиенты кривой оседания земной поверхности сопровождаются увеличением горного давления и горизонтальных деформаций растяжения в интервале ВЗТ, что в итоге являются предпосылками к образованию трещин субвертикальной ориентации. На рисунках видно, как формируются и развиваются трещины в соляной толще. Согласно результатам моделирования трещины сдвига начинают формироваться через 10 лет после отработки и затрагивают карналлитовый пласт в нижней части ВЗТ между целиком и зоной №4.

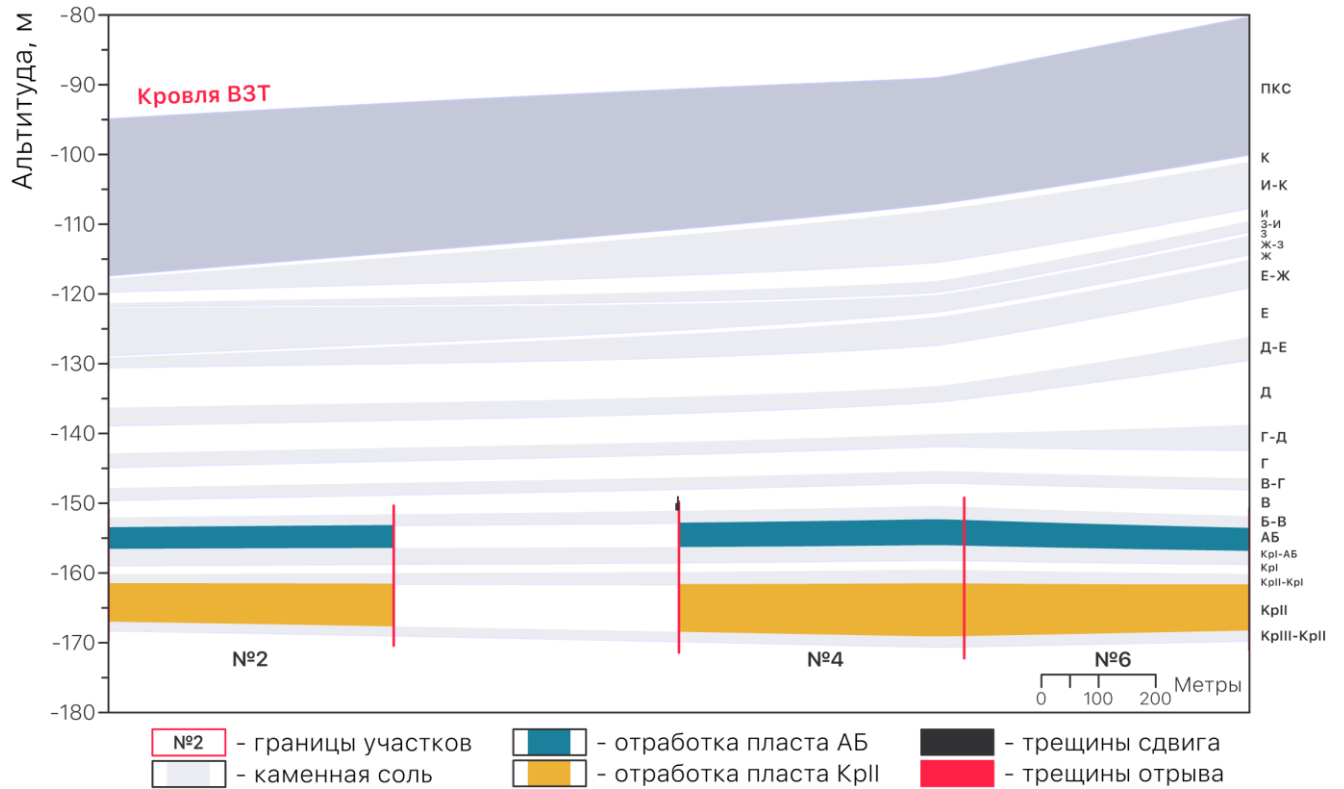


Рисунок 5.6 – Характер нарушения сплошности ВЗТ вдоль геомеханического профиля на прогнозный 10-й год после отработки

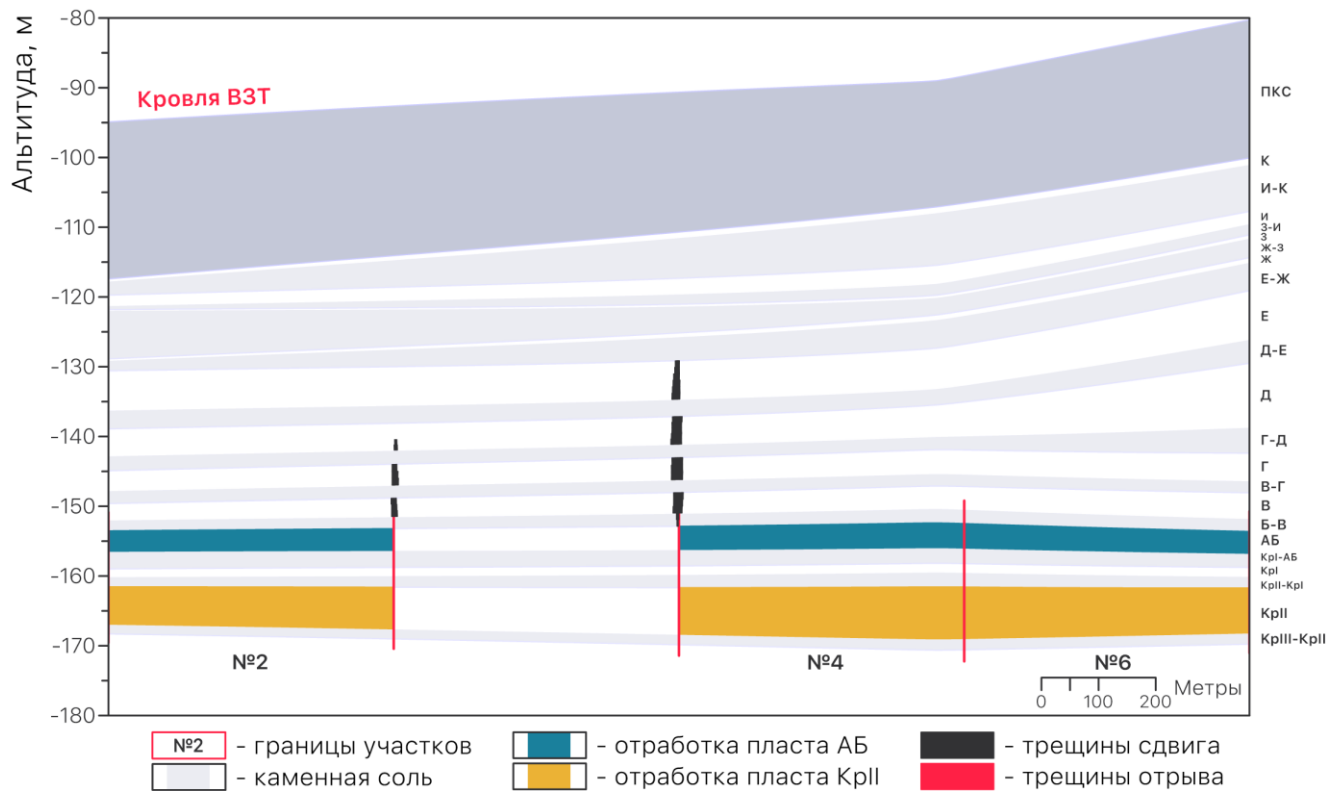


Рисунок 5.7 – Характер нарушения сплошности ВЗТ вдоль геомеханического профиля на прогнозный 15-й год после отработки

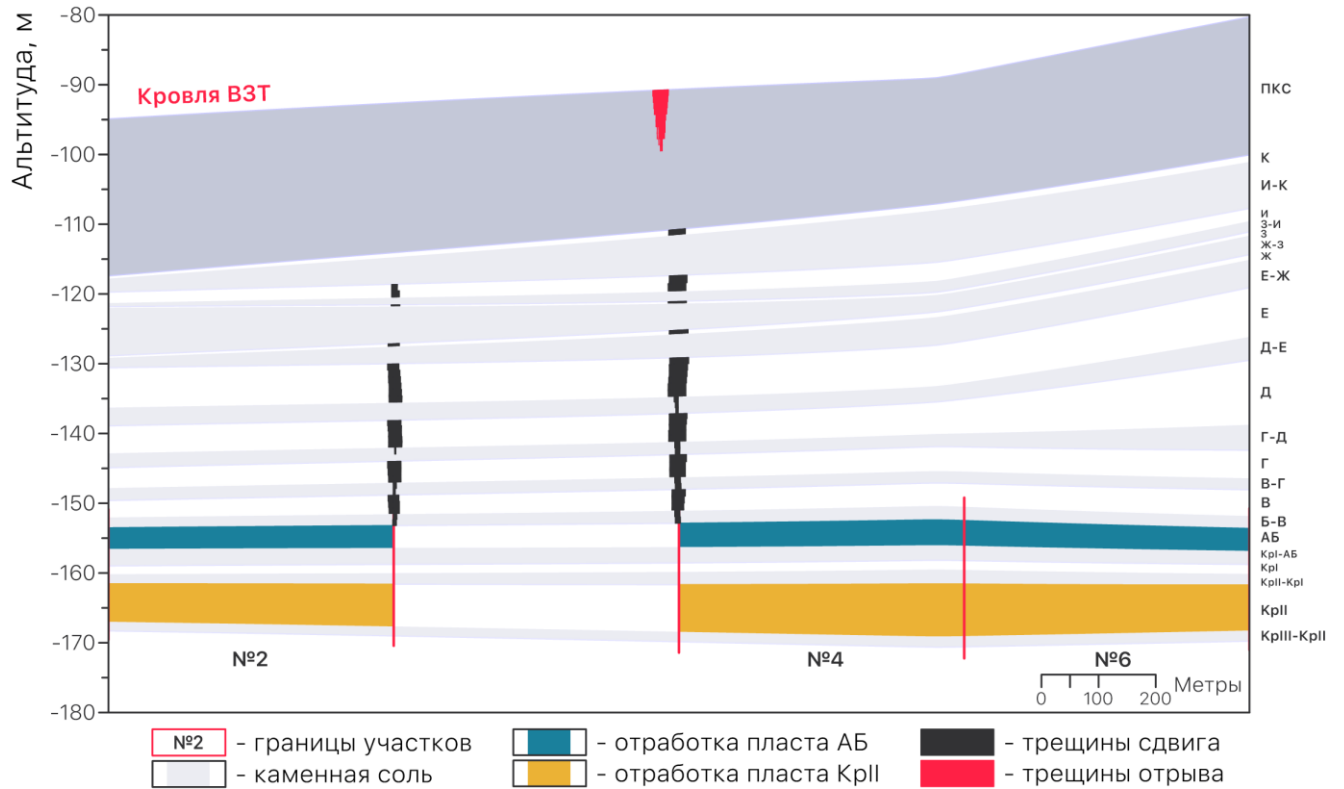


Рисунок 5.8 – Характер нарушения сплошности ВЗТ вдоль геомеханического профиля на прогнозный 20-й год после отработки

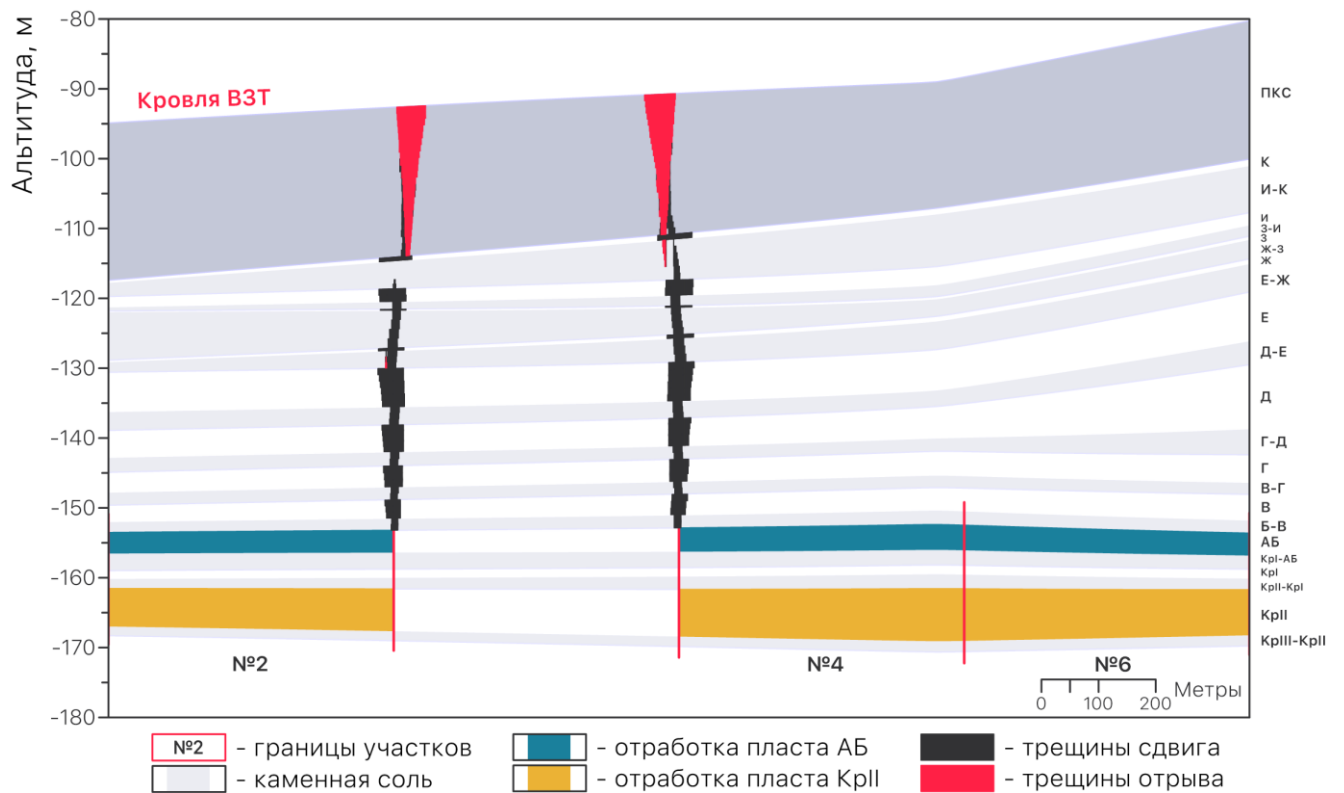


Рисунок 5.9 – Характер нарушения сплошности ВЗТ вдоль геомеханического профиля на конец процесса сдвижения

Со временем сформированные области трещиноватости развиваются в вертикальном направлении. На границе выемочной зоны №2 и целика образуются зоны разрушения вследствие сдвига к 15 прогнозному году. Через 20 лет после отработки начинают разрушаться пласты каменной соли в нижней части ВЗТ и формируются трещины отрыва у верхней её границы. Прогнозная оценка состояния ВЗТ показывает, что через 20 лет (приблизительный срок разрушения целиков КрII на участках замерных станций №2 и №4 по рис. 5.2) на рассматриваемом участке вдоль геомеханического расчётного профиля больше половины интервала ВЗТ подвержено разрушению. На конец процесса сдвижения образуется сквозная область нарушения водоупорной толщи на границе выемочной зоны №4 с целиком.

5.3 Выводы

1. Показана возможность прогноза срока сохранения устойчивого состояния междукammerных целиков, основанная на упруго-вязкопластической модели процесса деформирования камерного блока в режиме ползучести в соответствии с ассоциированным объёмным критерием пластичности и законом вязкопластичности подобным закону Перича.

2. Предложена методическая схема оценки оседаний земной поверхности и параметрического обеспечения анализа безопасных условий подработки водозащитной толщи методами математического моделирования, основанная на прогнозе скорости горизонтальной конвергенции очистных камер модифицированным методом проекции напряжений, реализованном в связке с объёмным критерием пластичности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны математические методы моделирования деформирования и разрушения междокамерных целиков, что представляет собой актуальную научную задачу, имеющую большое значение для теории и практики освоения георесурсов и обеспечения безопасности ведения горных работ.

Основные научные и практические результаты работы заключаются в следующем:

1. Установлено, что наиболее адекватными критериями пластичности для описания процесса одноосного деформирования соляных образцов являются: классический критерий Кулона-Мора с неассоциированным законом течения пластических деформаций и объёмный параболический критерий прочности с ассоциированным пластическим течением и линейным изотропным упрочнением.

2. По результатам анализа откалиброванных параметров упруго-вязкопластической модели установлено, что использование закона Перича для описания стадии установившейся ползучести характеризуется относительно простым, стабильным параметрическим обеспечением при фиксированных параметрах пластичности.

3. В качестве закона вязкопластичности для модели ползучести, построенной с применением модифицированного метода проекции напряжений, предложен закон подобный модели Перича.

4. Разработаны алгоритмы численной реализации модифицированного метода проекций напряжений для критерия пластичности Кулона-Мора и объёмного параболического критерия, основанные на неявной схеме Эйлера интегрирования вязкопластических соотношений методом обратного отображения.

5. Результаты многовариантного численного моделирования показали, что использование модифицированного метода проекции напряжений позволяет адекватно с приемлемой точностью описать нарастание продольной и поперечных деформаций междокамерных целиков.

6. Введённый предел ползучести модифицированного метода проекции напряжений даёт возможность ограничить зоны вмещающих пород, где активизируются процессы ползучести, и получить области нарушения, наиболее соответствующие фактическому характеру разрушения междукammerных целиков.

7. Построенная упруго-вязкопластическая модель процесса деформирования камерного блока во времени позволяет прогнозировать срок сохранения устойчивого состояния междукammerных целиков.

8. Предложена методическая схема оценки оседаний земной поверхности и параметрического обеспечения анализа безопасных условий подработки водозащитной толщи методами математического моделирования, основанная на прогнозе скорости поперечной деформации междукammerных целиков в соответствии с разработанной упруго-вязкопластической моделью процесса деформирования камерного блока.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Голубев Б.М. Строение соляной толщи Верхнекамского месторождения: автореф. ... дисс. канд. техн. наук. — Пермь, 1972. — 17 с.
2. Джиноридзе Н.М. Петротектонические основы безопасной эксплуатации Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей. — Санкт-Петербург, 2000. — 391 с.
3. Иванов А.А., Воронова М.Л. Верхнекамское месторождение калийных солей. — Л.: Недра, 1975. — 219 с.
4. Кудряшов А.И. Верхнекамское месторождение солей. — Пермь, 2001. — 427 с.
5. Кудряшов А.И. Новые проблемы геологического обеспечения безопасной эксплуатации Верхнекамского месторождения калийных солей / А.И. Кудряшов, А.А. Барях, В.М. Новоселицкий // Проблемы безопасности при эксплуатации месторождений полезных ископаемых в зонах градопромышленных агломераций: Тезисы докл. междуна. симпозиума – SPM-95. — Пермь: ГИ УрО РАН, 1995. — С. 85-86.
6. Яржемский Я.Я. Калийные и калиеносные галогенные породы. — Новосибирск: Наука, 1967. — 218 с.
7. Методическое руководство по ведению горных работ на рудниках Верхнекамского калийного месторождения. — М.: Недра, 1992. — 468 с.
8. Указания (мероприятия) по защите рудников ПАО «Уралкалий» от затопления и охране объектов наземной поверхности от вредного влияния подземных разработок на Верхнекамском месторождении солей. Часть 2. Методические рекомендации. — Пермь-Березники, 2022.
9. Указания (мероприятия) по защите рудников ПАО «Уралкалий» от затопления и охране объектов наземной поверхности от вредного влияния подземных разработок на Верхнекамском месторождении солей. Часть 1. Основные положения. — Пермь-Березники, 2022.

10. Борзаковский Б.А., Папулов Л.М. Закладочные работы на верхнекамских калийных рудниках. — М.: Недра, 1994. — 234 с.

11. Tournaire L.-M. Des dimensions a donner aux piliers des carriers et des pressions auxquelles les terrains sont soumis dans les profondeurs //Annales des mine, 1884. — 8 series. — T. V.

12. Goupillière H. Cours d'exploitations des mines. — Paris: Dunod, 1896. — 941 pp.

13. Gruner M.L.-E. Cours d'exploitations des mines. Livre III: Les Methodes d'exploitation. — Paris: Ecole Speciale des travaux publics, 1921. — 330 pp.

14. Шевяков Л.Д. О расчёте прочных размеров и деформаций целиков // Известия АН СССР. Отдел технических наук, 1941. — № 7. — С. 3-13; № 8. — С. 43-58.

15. Шевяков Л.Д. Избранные труды: в 2 т. — М.: Наука, 1968.

16. Шерман Д.И. К вопросу о напряженном состоянии междукammerных целиков. Упругая весомая среда, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы // Известия АН СССР. Отдел технических наук, 1952. — № 6. — С. 840-857; № 7. — С. 992-1000.

17. Руппенейт К.В. Обоснование инженерного метода определения давлений на междукammerные целики / К.В. Руппенейт, Н.А. Давыдова // Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород, 1962. — Вып. 1. — С. 110-122.

18. Космодамианский А.С. Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий // Известия АН АрмССР. Физико-математические науки, 1960. — Т. 13, № 6. — С. 19-26.

19. Космодамианский А.С. О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий // Известия АН СССР. Механика, 1965. — Вып. 4. — С. 145-147.

20. Маховиков В.И. Плоская задача теории упругости анизотропной среды для внешности неограниченного числа равных эллиптических отверстий // Известия высших учебных заведений. Математика, 1962. — № 3. — С. 84-90.

21. Чен Лин-Си. К вопросу о концентрации напряжений при наличии многих отверстий // Проблемы механики сплошной среды. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 494-498.

22. Шереметьев М.П. Определение давления на подкрепляющие стержни внутри отверстия бесконечной пластинки при её растяжении в двух направлениях / М.П. Шереметьев, И.А. Прусов // Прикладная механика, 1955. — Т. 1, № 4.

23. Плахотный П.И. Напряжения в стойках, установленных внутри отверстия упругой плоскости // Прикладная механика, 1967. — Т. 3, № 6.

24. Ержанов Ж.С. Расчёт нагруженности опорных и поддерживающих целиков / Ж.С. Ержанов, Ю.Н. Серегин, В.Ф. Смирнов. — Алма-Ата: Наука; АН КазССР, 1973. — 140 с.

25. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок. — М.: Недра, 1976. — 271 с.

26. Ильштейн А.М. Методы расчёта целиков и потолочин камер рудных месторождений / А.М. Ильштейн, Ю.М. Либерман, Е.А. Мельников, В. Рахимов, В.М. Рыжик. — М.: Наука, 1964. — 142 с.

27. Трофимов В.А. Развитие теории напряжённого состояния горных массивов и проявлений горного давления при разработке пологих месторождений: автореф. дисс. докт. тех. наук. — Москва, 1998. — 50 с.

28. Фаустов Г.Т. К вопросу о расчёте целиков в упруго-пластической постановке / Г.Т. Фаустов, П.А. Абашин // ФТПРПИ, 1973. — № 3.

29. Лавриков С. В. О модели деформирования целиков с учётом эффекта аккумуляции энергии разупрочнения материала / С.В. Лавриков, А.Ф. Ревуженко // ФТПРПИ, 1994. — №6 — С. 12-23.

30. Антонов А.А. О внезапных разрушениях податливых целиков при разработке калийных пластов камерными системами / А.А. Антонов, Я.Б. Ентус, К. Водарц // Межвуз. сб. научн. тр. Разработка соляных месторождений: Перм. политехн. Институт, 1986. — С.84-89.

31. Беляев В.В. Запредельное деформирование ленточных целиков в режиме заданных деформаций // Известия вузов. Горный журнал, 1986. — № 1. — С. 26-30.

32. Барышников В.Д. Анализ НДС конструктивных элементов камерно-целиковой системы разработки / В.Д. Барышников, К.В. Пирля // Аналитические и численные исследования в механике горных пород.: Новосибирск, 1986. — С. 50-54.

33. Вайсруб А.В. Исследование напряженного состояния анизотропного горного массива вблизи подземных выработок / А.В. Вайсруб, А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородиев // Донец. гос. ун-т. Донецк, 1996. — 15 с.

34. Grzaslewicz, Lydzba, D. Application of boundary element method to determination of stresses and displacements in rock mass at room-pillar mining // Int. J. Rock Mech. and Mining Sci. And Geomech. Abstr, 1996. — V. 33, № 3. — 129A.

35. Козлов А.Н., Петренко А.К., Сопоставление расчётных значений средних напряжений в целиках с данными натурных измерений. // Тр. «Исследование проблем механики подземных сооружений». Тула: Тул. политехн. ин.-т, 1987.

36. Коротких В.А. Исследование напряжённо-деформированного состояния вокруг двух очистных выработок без щелей и со щелями в кровле. // Межвуз. сб. научн. тр. Разработка соляных месторождений: Перм. политехн. институт, 1989. — С.181-187.

37. Константинова С.А. Напряжённо-деформированное состояние и устойчивость пород в окрестности очистных выработок при разработке одного сильвинитового пласта / С.А. Константинова, В.В. Хронусов, В.Ю. Соколов // Изв. ВУЗов, Горный журнал, 1993. — №4. — С. 40-45.

38. Жданкин Н.А. Пространственное напряжённо-деформированное состояние массива горных пород в окрестности двух параллельных выработок. // Межвуз. сб. научн. тр. Разработка соляных месторождений: Перм. политехн. институт, 1982. — С.86-90.

39. Зубкова И.А. Напряжённо-деформированное состояние и устойчивость пространственных систем целиков / И.А. Зубкова, М.А. Тлеужанов // Межвуз. сб. научн. тр. Разработка соляных месторождений: Перм. политехн. институт, 1982. — С.91-95.

40. Степанов В.Я. Трёхмерный анализ напряжённого состояния и оценка устойчивости массивов пород вблизи камерных выработок / В.Я. Степанов и др. // 10 Междунар. конф. по мех. горн. пород, 27 сент. – 1 окт., 1993. — С. 64-65.

41. Duncan Fama M.E., Trueman R., Craig M. S. Two and three-dimensional elasto-plastic analysis for coal pillar design and its application to highwall mining // Int. J. Rock Mech. and Mining Sci. and Geomech. Abstr, 1995 — №3. — P. 215-225.

42. Барях А.А. О влияние закладки на распределение напряжений в междуканальных целиках / А.А. Барях, И.Н. Шардаков, В.Я. Ковтун // Межвуз. сб. научн. тр Разработка соляных месторождений: Перм. политехн. институт, 1989. — С.88-95.

43. Барях А.А., Шумихина А.Ю. Крупномасштабное математическое моделирование геомеханических процессов при разработке калийных месторождений // Изв. Вузов. Горный журнал, 1993. — №4. — С. 31-38.

44. Бакиров Ж.Б. Определение ширины целиков при камерной отработке рудного месторождения / Ж.Б. Бакиров, А.А. Такишов, М.Ж. Бакиров, В.Ф. Михайлов // Труды университета, 2021. — № 4 (85). — С. 119-125. DOI: 10.52209/1609_1825_2021_4_119

45. Suorineni F.T. Mining of orebodies under shear loading. Part 2. Failure modes and mechanisms / F.T. Suorineni, J.J. Mgumbwa, P.K. Kaiser, D. Thibodeau // Mining Technology, 2014. — V.123, № 4. — P. 240—249. DOI: 10.1179/1743286314Y.0000000072

46. Барях, А.А. К расчёту устойчивости целиков при камерной системе разработки / А.А. Барях, Н.А. Самоделкина // ФТПРПИ, 2007. — № 1. — С. 11-20.

47. Барях А.А. Анализ изменения степени нагружения междуканальных целиков во времени на верхнекамском месторождении солей / А.А. Барях, С.Ю. Лобанов, И.С. Ломакин // ФТПРПИ, 2015. — № 4. — С. 70-82.

48. Барях А.А. Оценка степени нагружения междуканальных целиков при отработке двух пластов на верхнекамском месторождении солей / А.А. Барях, И.С. Ломакин, Н.А. Самоделкина, Л.О. Тенисон // ГИАБ, 2023. — № 1. — С. 5-19.

49. Martin C.D., Maybee W.G. The strength of hard-rock pillars // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000. — V. 37, № 8. — P. 1239-1246. DOI: 10.1016/S1365-1609(00)00032-0

50. Mortazavi A. A numerical investigation of rock pillar failure mechanism in underground openings / A. Mortazavi, F.P. Hassani, M. Shabani // Computers and Geotechnics, 2009. — V. 36, № 5. — P. 691-697. DOI: 10.1016/j.compgeo.2008.11.004

51. Rashed G. A parametric study for the effect of dip on stone mine pillar stability using a simplified model geometry / G. Rashed, B. Slaker, M.M. Sears, M.M. Murphy // Mining, Metallurgy & Exploration, 2021. — V. 38, № 2. — P. 967-977. DOI: 10.1007/s42461-021-00394-y

52. Hamediazad F., Bahrani N. Simulation of hard rock pillar failure using 2D continuum-based Voronoi tessellated models: The case of Quirke Mine, Canada // Computers and Geotechnics, 2022. — V. 148, article 1048. DOI: 10.1016/j.compgeo.2022.104808

53. Li X. A study of rock pillar behaviors in laboratory and in-situ scales using combined finite-discrete element method models / X. Li, E. Kim, G. Walton // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2019. — V. 118. — P. 21-32. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2019.03.030

54. Булычёв Н.С., Амусин Б.З., Оловянный А.Г. Расчёт крепи капитальных выработок. — М.: Недра, 1974. — 320 с.

55. Векслер Ю.А. Решение пространственной задачи теории упругости для подготовительной выработки / Ю.А. Векслер, Н.А. Жданкин, С.Б. Колобков // ФТПРПИ, 1981. — №4. — С. 15-23.

56. Александров А. Я., Соловьёв Ю. И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов функции комплексного переменного). — М.: Наука, 1978. — 464 с.

57. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 346 с.

58. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. — М.: Гостехиздат, 1953. — 528 с.

59. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1953. — 460 с.

60. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. — М.: Высшая школа, 1974. — 200 с.

61. Ma Zy. Unified elastoplastic finite difference and its application / Zy. Ma, Hj. Liao, Fn. Dang // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. 34, 2013. — P. 457-474. DOI: 10.1007/s10483-013-1683-7

62. Y. Zhou. Meshless Generalized Finite Difference Method Based on Nonlocal Differential Operators for Numerical Simulation of Elastostatics / Y. Zhou, C. Li, X. Zhuang, Z. Wang // Mathematics, 2024. — V.12, №9, 1316. DOI: 10.3390/math12091316

63. Liu Y. Generalized finite difference method based meshless analysis for coupled two-phase porous flow and geomechanics / Y. Liu, X. Rao, H. Zhao, W. Zhan, Y. Xu, Y. Liu // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2023. — V. 146. — P. 184-203. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.10.011

64. Chao Gao. A coupled geomechanics and reservoir simulator with a staggered grid finite difference method / Chao Gao, K.E. Gray // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2022. — V.209, 109818. DOI: 10.1016/j.petrol.2021.109818

65. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела. — М.: Мир, 1987. — 328 с.

66. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. — 494 с.

67. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.

68. Барях А.А. Оценка условий развития трещин в подработанном массиве / А.А. Барях, Н.А. Ерёмина, Е.А. Грачёва // ФТПРПИ, 1994. — №5. — С. 84-88.

69. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. — М.: Недра, 1977. — 143 с.
70. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. — М.: Недра, 1987. — 221 с.
71. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
72. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (7th edition). — Butterworth-Heinemann, 2013. — 714 p. ISBN: 978-1-85617-633-0
73. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu Z. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics (7th edition). — Butterworth-Heinemann, 2014. — 624 p. ISBN: 978-1-85617-634-7
74. Zamora Y., Robey R. Parallel and High Performance Computing. — Manning Publications, 2021. — 704 p. ISBN: 9781617296468
75. McCool M., Robison A.D., Reinders J. Structured Parallel Programming. — Morgan Kaufmann, 2012. — 406 p. ISBN: 978-0-12-415993-8
76. Mattson T.G., He Y., Koniges A.E. The OpenMP Common Core: Making OpenMP Simple Again. — The MIT Press, 2019. — 320 p. ISBN: 9780262359184
77. van der Pas R., Stotzer E., Terboven C. Using OpenMP—The Next Step: Affinity, Accelerators, Tasking, and SIMD. — The MIT Press, 2017. — 392 p. ISBN: 978-0262534789
78. Intel oneAPI Math Kernel Library Cookbook. 2021. — 63 p. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.intel.com/content/www/us/en/docs/onemkl/cookbook/2021-4/overview.html> (Дата обращения: 10.09.2021).
79. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. — М.: Мир, 1977. — 192 с.
80. Брамеллер А., Аллан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы. Анализ электроэнергетических систем. — М.: Энергия, 1979. — 192 с.
81. Pissanetzky S. Sparse Matrix Technology. — Academic Press, 1984. — 321 p. ISBN: 978-0-12-557580-5

82. Schendel U. Sparse matrices: Numerical aspects with applications for scientists and engineers. — Halsted Press, 1989. — 115 p. ISBN: 978-0745806358
83. Duff I.S., Erisman A.M., Reid J.K. Direct Methods for Sparse Matrices (2nd edn). — Oxford University Press, 2017. — 429 p. ISBN: 9780191746420
84. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
85. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — 298 с.
86. Барях А.А. Деформирование и разрушение соляных пород и массивов: дисс. докт. техн. наук. — Пермь, 1993. — 383 с.
87. ANSYS Mechanical APDL. Material Reference. Release 2021 R2. 2021. — 398 p.
88. Abaqus Analysis User's Guide. Volume III: Materials. 2016.
89. CAE Fidesys — руководство пользователя (версия 7.0). [Электронный ресурс]. URL: <https://download.cae-fidesys.com/s/Fidesys-7-0-Manual-Ru> (Дата обращения: 22.10.2024).
90. Itasca Software Documentation. [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.itascacg.com> (Дата обращения: 22.10.2024).
91. Барях А.А., Константинова С.А., Асанов В.А. Деформирование соляных пород. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — 203 с.
92. Fahland S. The Mechanical Behavior of Salt IX / S. Fahland, J. Hammer, F. Hansen, et al. // Proceedings of the 9th Conference on the Mechanical behavior of salt. SaltMech IX, 2018, Hannover, Germany.
93. He M.M. Experimental investigation on fatigue deformation of salt rock / M.M. He, J. Ren, P. Su, N Li., Y.H. Chen // Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2020. — V. 56, №6. — P. 402-409
94. Dubey R.K. Influence of structural anisotropy on the uniaxial compressive strength of pre-fatigued rocksalt from Himachal Pradesh, India / R.K. Dubey, V.K. Gairola // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000. — V. 37, №6. — P. 993-999. DOI: 10.1016/S1365-1609(00)00020-4

95. Závada P. Impact of solid second phases on deformation mechanisms of naturally deformed salt rocks (Kuh-e-Namak, Dashti, Iran) and rheological stratification of the Hormuz Salt Formation // P. Zavada, G. Desbois, J.L. Urai, K. Schulmann, M. Rahmati, O. Lexa, U. Wollenberg // *Journal of Structural Geology*. 2015. — V. 74. P. 117-144. DOI: 10.1016/j.jsg.2015.02.009

96. Chemia Z. Numerical modelling of rise and fall of a dense layer in salt diapirs / Z. Chemia, H. Koyi, H. Schmeling // *Geophysical Journal International*, 2008. — V. 172, №2. — P. 798-816. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2007.03661.x

97. Baryakh A.A. Analysis of time-to-time variation of load on interchamber pillars in mines of the Upper Kama potash salt deposit / A.A. Baryakh, S.Y. Lobanov, I.S. Lomakin // *Journal of Mining Science*, 2015. — V. 51, №4. — P. 696-706. DOI: 10.1134/S1062739115040064

98. Pałac-Walko B. Geomechanical risk assessment for saltrock underground workings, using strength theories based on selected 2D and true 3D triaxial compression laboratory tests / B. Pałac-Walko, W. Pytel // *International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM*, 2019. — V. 19, №1.3. — P. 307-314. DOI: 10.5593/sgem2019/1.3/S03.039

99. Wang Q. Determination of the deformation behaviour of salt rock by evaluation of convergence measurements in shafts / Q. Wang, J. Hesser // *Rock Characterisation, Modelling and Engineering Design Methods – Proceedings of the 3rd ISRM SINOROCK 2013 Symposium*, 2013. — P. 805-810

100. Deng J.Q. Stability evaluation and failure analysis of rock salt gas storage caverns based on deformation reinforcement theory / J.Q. Deng, Q. Yang, Y.R. Liu, Y.W. Pan // *Computers and Geotechnics*, 2015. — V. 68. — P. 147-160. DOI: 10.1016/j.compgeo.2015.03.013

101. Yin H. Stability evaluation of underground gas storage salt caverns with micro-leakage interlayer in bedded rock salt of Jintan, China / H. Yin, C. Yang, H. Ma, X. Shi, N. Zhang, X. Ge, H. Li, Y. Han // *Acta Geotechnica*, 2020. — V. 15, №2. — P. 549-56. DOI: 10.1007/s11440-019-00901-y

102. Tsang C.F. Geohydromechanical processes in the Excavation Damaged Zone in crystalline rock, rock salt, and indurated and plastic clays – in the context of radioactive waste disposal / C.F. Tsang, F. Bernier, C. Davies // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2005. — V. 42. — P. 109–125. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2004.08.003

103. BS EN 1918-3: Gas infrastructure — Underground gas storage Part 3: Functional recommendations for storage in solution-mined salt caverns. — British Standards Institution, London, 2016. — 42 p

104. Heusermann S. Nonlinear finite-element analysis of solution mined storage caverns in rock salt using the LUBBY2 constitutive model / S. Heusermann, O. Rolfs, U. Schmidt // *Computers and Structures*, 2003. — V. 81, №8-11. — P. 629-638. DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00415-7

105. Hou Z. Mechanical and hydraulic behavior of rock salt in the excavation disturbed zone around underground facilities // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2003. — V. 40, №5. — P. 725-738. DOI: 10.1016/S1365-1609(03)00064-9

106. Ulusay R. (ed.). The ISRM Suggested Methods for Rock Characterization, Testing and Monitoring: 2007–2014. — Springer Cham, 2015. — 293 p. DOI: 10.1007/978-3-319-07713-0

107. You M. Comparison of the accuracy of some conventional triaxial strength criteria for intact rock // *IJRMMS*, 2011. — V. 48, №5. — P. 852-863. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2011.05.006

108. Labuz J.F. Mohr–Coulomb Failure Criterion / J.F. Labuz, A. Zang // *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2012. — V. 45. — P. 975–979. DOI: 10.1007/s00603-012-0281-7

109. Wang D.J. A Parabolic Failure Criterion for Transversely Isotropic Rock: Modification and Verification / D.J. Wang, H. Tang, P. Shen, Y. Cai // *Hindawi, Mathematical Problems in Engineering*, 2019. — Article ID 8052560. — 12 p. DOI: 10.1155/2019/8052560

110. Baryakh A.A. Water-tight stratum failure under large-scale mining. Part I / A.A. Baryakh, N.A. Samodelkina, I.L. Pan'kov // *Journal of Mining Science*, 2012. — V. 48, № 5. — P. 771-780. DOI: 10.1134/S1062739148050012

111. Baryakh A. Mathematical modelling of limit states for load bearing elements in room-and-pillar mining of saliferous rocks / A. Baryakh, S. Lobanov, I. Lomakin, A. Tsayukov // *EUROCK 2018: Geomechanics and Geodynamics of Rock*, Saint Petersburg, Russia, May 2018. Vol. 1-2. — Saint Petersburg: Taylor & Francis Group, London, UK, 2018. — P. 767-774.

112. Evseev A. Experimental and theoretical studies of undermined strata deformation during room and pillar mining / A. Evseev, V. Asanov, I. Lomakin, A. Tsayukov // *EUROCK 2018: Geomechanics and Geodynamics of Rock Masses*, Saint Petersburg, Russia, May 2018. Vol. 2-2. — Saint Petersburg: Taylor & Francis Group, London, UK, 2018. — P. 985-990.

113. Baryakh A.A. Operational control of rib pillar stability / A.A. Baryakh, A.V. Evseev, I.S. Lomakin, A.A. Tsayukov // *Eurasian Mining*, 2020. — V. 2 — P. 7-10. DOI: 10.17580/em.2020.02.02

114. de Souza Neto E.A., Perić D., Owen D.R.J. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. — Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 2008. — 816 p. ISBN: 978-0-470-69452-7

115. de Borst R., Crisfield M.A., Remmers J.J.C., Verhoosel C.V. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, 2nd Edition. — Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 2012. — 544 p. ISBN: 978-1-118-37601-0

116. Ottosen N.S. Corners in plasticity—Koiter's theory revisited / N.S. Ottosen, M. Ristinmaa // *International Journal of Solids and Structures*, 1996. — V. 33, №25. — P. 3697-3721. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00207-3

117. Rankine W.J.M. *A manual of applied mechanics*, 9 ed. — London, Charles Griffin and company, 1877.

118. Барях А.А. Об одном критерии прочности горных пород / А.А. Барях, Н.А. Самоделкина // *Чебышевский сборник*, 2017. — Т. 18, №3. — С. 72-87. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-72-87

119. Konstantinova S.A. Estimating salt rocks rheology by in-situ observations of vertical deformation of interchamber pillars / S.A. Konstantinova, S.A. Chernopazov // Journal of Mining Science, 2007. — V. 43, №3. — P. 17-23. DOI: 10.1007/s10913-007-0003-9

120. Findley W., Lai J., Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. — New York, Dover Publications, 1989. — 364 p. ISBN: 0-486-66016-8

121. Singh A. Estimation of creep parameters of rock salt from uniaxial compression tests / A. Singh, C. Kumar, L G Kannan, K.S. Rao, R. Ayothiraman // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2018. — V.107. — P. 243-248. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.04.037

122. Paraskevopoulou C. The three stages of stress relaxation - Observations for the time-dependent behaviour of brittle rocks based on laboratory testing / C. Paraskevopoulou, M. Perras, M. Diederichs, F. Amann, S. Löw, T. Lam, M. Jensen // Engineering Geology, 2017. — V. 216. — P. 56-75. DOI: 10.1016/j.enggeo.2016.11.010

123. Морозов И.А. Анализ деформирования соляных пород Гремячинского и Верхнекамского месторождений в лабораторных условиях / И.А. Морозов, А.А. Ударцев, И.Л. Паньков // ГИАБ, 2020. — №10. — С. 16-28. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-10-0-16-28

124. Quevedo R. Integration schemes with substepping algorithms for creep analysis in geomaterials / R. Quevedo, P. Firme, D. Roehl // Int J Numer Anal Methods Geomech, 2019. — V. 43. — P. 1467–1487. DOI: 10.1002/nag.2910

125. Sheng D. An Automatic Newton-Raphson Scheme / D. Sheng, S.W. Sloan, A.J. Abbo // International Journal of Geomechanics, 2002. — V. 2, №4. — P. 471-502. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2002)2:4(471)

126. Perić D. On a Class of Constitutive Equations in Viscoplasticity: Formulation and Computational Issues // Int. J. Numer. Meth. Engng, 1993. — V. 36. — P. 1365–1393. DOI: 10.1002/nme.1620360807

127. ANSYS Mechanical APDL. Theory Reference. Release 2021 R2. – 934 p.

128. Golasowski J. Room and pillar mining at OKD, as in the Czech Republic / J. Golasowski, R. Vochta, V. Hudeček, M. Mikoláš, P. Dvořák // 14th International multidisciplinary scientific Geoconference & expo SGEM 2014, Albena, Bulgaria, 2014. — P. 529–536. ISSN 1314-2704

129. Kim JG. Robust Design of Pillar Arrangement for Safe Room-and-Pillar Mining Method / JG. Kim, M.A.M. Ali, HS. Yang // *Geotech Geol Eng.*, 2019. — V. 37. — P. 1931–1942. DOI: 10.1007/s10706-018-0734-1

130. Пермяков Р.С., Романов В.С., Бельды М.П. Технология добычи солей. — М.: Недра, 1981. — 271 с.

131. Makarov A.B. Geomechanical evaluation of roof-and-pillar parameters in transition to underground mining / A.B. Makarov, I.S. Livinsky, I.Y. Rasskazov, B.G. Saksin, M.I. Potapchuk // *Journal of Mining Science*, 2016. — V. 52, №3. — P. 438-447. DOI: 10.1134/S1062739116030633

132. Методическое руководство по выбору геомеханических параметров технологии разработки угольных пластов короткими забоями. — СПб.: ВНИМИ, 2003. — 30 с.

133. Временная инструкция по расчёту целиков для пологопадающих залежей на глубине более 400 м и наклонных залежей Жезказганского месторождения // Корпорация «Казахмыс». — Алматы-Жезказган, 1998. — 158 с.

134. Протосеня А.Г. Расчёт параметров целиков при камерно-столбовой системе разработки рудных месторождений с использованием трёхмерных моделей / А.Г. Протосеня, А.Н. Шоков // *Горный журнал*, 2015. — № 11. — С. 20-23. DOI: 10.17580/gzh.2015.11.04

135. Черепов А.А. Обоснование геомеханических параметров камерной системы разработки мощного пологого угольного пласта / А.А. Черепов, С.Н. Ширяев, В.Ю. Кулак // *ГИАБ*, 2017. — № 9. — С. 161–169. DOI: 10.25018/0236-1493-2017-9-0-161-169

136. Napa-García G.F. Optimization of room-and-pillar dimensions using automated numerical models / G.F. Napa-García, T.R. Câmara, V.F.N. Torres //

International Journal of Mining Science and Technology, 2019. — V. 29, №5. — pp. 797–801. DOI: 10.1016/j.ijmst.2019.02.003

137. Hudeček V. Experience in the Adoption of Room & Pillar Mining Method in the Company OKD, a.s., Czech Republic / V. Hudeček, J. Šancer, V. Zubíček, J. Golasowski // Journal of Mining Science, 2017. — V. 53. — P. 99–108. DOI: 10.1134/S1062739117011908

138. Ljunggren C. An overview of rock stress measurement methods / C. Ljunggren, Y. Chang, T. Janson, R. Christiansson // Int. J. Rock. Mech. Min. Sci., 2003. — V. 40, №7. — P. 975-989. DOI:10.1016/j.ijrmms.2003.07.003

139. Gray I. The measurement and interpretation of in-situ stress using an overcoring technique from surface / I. Gray, L. See // Rock Mechanics: Meeting Society's Challenges and Demands : Proceedings of the 1st Canada–U.S. Rock Mechanics Symposium. Taylor & Francis Group, London, 2007. — V. 1. — P. 721–727.

140. Baryakh A.A. Evaluating the residual life of salt pillars / A.A. Baryakh, V.A. Asanov, V.N. Toksarov, M.V. Gilev // Journal of Mining Science, 1998. — V. 34. — P. 14-20.

141. ASTM (2008) Standard test method for in situ stress and modulus of deformation using flat jack method // Annual Book of ASTM Standards D4729, 2008. — P. 1-7.

142. Шкуратник В.Л. Методика интерпретации акустико-эмиссионных измерений при использовании эффекта Кайзера для оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород / В.Л. Шкуратник, П.В. Николенко // Горный журнал, 2012. — №9. — С. 44-47.

143. Toksarov V. Sedimentary Rock Stress Determination in boreholes using Kaiser effect / V. Toksarov, V. Asanov, A. Evseev, N. Beltukov // 7th International Symposium on In-Situ Rock Stress. Symposium proceedings. Tampere, Finland, 2016. — P. 501-508.

144. Вознесенский А.С. Оценка устойчивости приконтурного массива пород по результатам совместных скажинных измерений параметров акустической

и электромагнитной эмиссии / А.С. Вознесенский, В.Л. Шкуратник, В.В. Набатов, Я.О. Куткин // ГИАБ, 2013. — № 8. — С. 64-70.

145. Baryakh A. Tool checking of salt pillars state for prediction of their residual time working / A. Baryakh, V. Asanov, A. Babkin, A. Geghin, A. Bruev // *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki I Hydrotechniki Politechniki Wroclawskiej*, Wroclaw, 2001. — V. 73, №40. — P. 22-24.

146. Тимофеев В.В. Технические и программно-методические средства мониторинга опасных состояний массивов горных пород Хибинских апатитовых рудников // Сб. статей XII Межотраслевого координационного совещания "Геодинамическая безопасность при освоении недр и земной поверхности", Апатиты, 2003. — С. 168-190.

147. Waclawik P. Stress-state monitoring of coal pillars during room and pillar extraction / P. Waclawik, J. Ptacek, P. Konicek, R. Kukutsch, J. Nemcik // *Journal of Sustainable Mining*, 2016. — V. 15. — P 49-56. DOI: 10.1016/j.jsm.2016.06.002

148. Evseev A. Remote Instrumental Monitoring of Interchamber Pillar Stability / A. Evseev, A. Baryakh, P. Butirin // *Procedia Engineering. ISRM European Rock Mechanics Symposium EUROCK 2017*, 2017. — V. 191. — P. 962-966.

149. Corradi L. A Plane-Strain Formulation of Elastic-Plastic Constitutive Laws / L. Corradi, G. Gioda // *Journal of Structural Mechanics: An International Journal*, 1979. — V. 7, №3. — P. 325-364. DOI: 10.1080/03601217908905324

150. Corradi L. An analysis procedure for plane strain contained plastic deformation problems / L. Corradi, G. Gioda // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1980. — V. 15, №7. — P. 1053-1074. DOI: 10.1002/nme.1620150707

151. Capsoni A. A plane strain formulation of the elastic-plastic constitutive law for hardening von mises materials / A. Capsoni, L. Corradi // *International Journal of Solids and Structures*, 1995. — V. 32, №23. — pp. 3515-3531. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00005-U

152. Capsoni A. A mixed finite element model for plane strain elastic-plastic analysis Part I. Formulation and assessment of the overall behaviour / A. Capsoni, L.

Corradi // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997. — V. 141, №1-2. — P. 67-79. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01098-5

153. Ju Y. New Approach to Investigate Rock Salt Creep Behavior Under Triaxial Stress / Y. Ju, M. Chen, Y. Lu // GOTECH, Dubai, UAE, May 2024. — DOI: 10.2118/219301-MS

154. Lee S.H. Generalized viscoelastic model for creep analysis coupled with plastic deformation // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1988. — V. 26, №1. — P. 153-165. DOI: 10.1002/nme.1620260111

155. Tirpitz E.R. A Unified Model Approach Combining Rate-Dependent and Rate-Independent Plasticity / E.R. Tirpitz, M. Schwesig // Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behaviour of Materials—3, Springer, Dordrecht, 1992. — P. 411–417. DOI: 10.1007/978-94-011-2860-5_66

156. Пантелеев И.А. Особенности изменения порово-трещинного пространства красного сильвинита при ступенчатом одноосном сжатии по данным рентгеновской микротомографии / И.А. Пантелеев, А.А. Барях // В сборнике: Геодинамика. Геомеханика и геофизика. Материалы двадцатой Всероссийской научной конференции. Новосибирск, 2024. — С. 56-58.

157. Шокин Ю.П. Анализ причин затопления калийных рудников ГДР и ФРГ подземными водами и рассолами // Труды ВНИИГ, 1969. — Вып. 51. — С. 23-40.

158. Prugger F.F. Water problems in Saskatchewan mining – what can be learned from them? / F.F. Prugger, A.F. Prugger // CIM bulletin, 1991. — V. 84, No.945. — pp. 58-66.

159. Красноштейн А.Е. Горнотехнические аварии: затопление Первого Березниковского калийного рудника / А.Е. Красноштейн, А.А. Барях, И.А. Санфиров // Вестн. Перм. науч. центра, 2009. — № 2. — С. 4-9.

160. Барях А.А. Геомеханическая оценка интенсивности деформационных процессов над затопленным калийным рудником / А.А. Барях, Н.А. Самоделкина // ФТПРПИ, 2017. — № 4. — С. 33-46.

161. Барях А.А. Теоретическое обоснование условий образования провалов на земной поверхности после аварийного затопления калийных рудников / А.А. Барях, С.Ю. Девятков, Н.А. Самоделкина // ФТПРПИ, 2016. — №1. — С. 50-61.
162. Барях А.А. Сейсмо-геомеханический прогноз состояния водозащитной толщи на калийных рудниках / А.А. Барях, И.А. Санфилов, А.К. Федосеев, А.И. Бабкин, А.А. Цаюков // ФТПРПИ, 2017. — №6. — С. 10-22.
163. Барях А.А. Прогноз оседаний земной поверхности по данным измерений деформаций горных выработок / А.А. Барях, А.В. Евсеев, П.А. Глебова, Е.Л. Васильева // Горный журнал, 2023. — №11. — С. 10-14.
DOI: 10.17580/gzh.2023.11.01
164. Барях А.А. Об одном подходе к реологическому анализу геомеханических процессов / А.А. Барях, Н.А. Самоделкина // ФТПРПИ, 2005. — №6. — С. 32-41.
165. Амусин Б.З. Об использовании переменных модулей при решении одного класса задач линейно-наследственной ползучести / Б.З. Амусин, А.М. Линьков // МТТ, 1974. — № 6. — С. 162-166.
166. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Сводная характеристика экспериментальных участков

№ эксп. участка	Рудник, Панель, блок, камера	Дата оборудования зам. станции	Пласт	Дата отработки	H , м	a , м	b_c , м	l , м	m , м	C	M , м
2	БКПРУ-4 10 ЮВП, 4 бл. кам.73	11.10.2013	АБ	06.2008	300	5.1	5.6	10.7	3.2	0.366	3.9
			КрII	09.2013	307	5.1	5.6	10.7	4.7	0.399	
3	БКПРУ-4 1 ЮЗП, 6 зап. бл. кам.31	26.11.2013	АБ	06.2002	351	5.1	7.1	12.2	3.1	0.326	8.2
			КрII	03.2004	362	5.1	7.1	12.2	6.0	0.397	
4	БКПРУ-4 1 ЮЗП, 1-2 зап. бл. кам.25	26.11.2013	АБ	06.2010	356	5.1	6.5	11.6	3.1	0.322	3.9
			КрII	03.2013	364	5.1	6.5	11.6	5.0	0.400	
6	БКПРУ-4 2 СЗП, 1 вост. бл. кам.22	18.12.2015	АБ	04.2014	402	5.5	7.5	13	3.2	0.297	3.9
			КрII	09.2015	409	5.5	7.5	13	4.7	0.344	

a , м – ширина камеры;

b_c , м – ширина междукammerного целика;

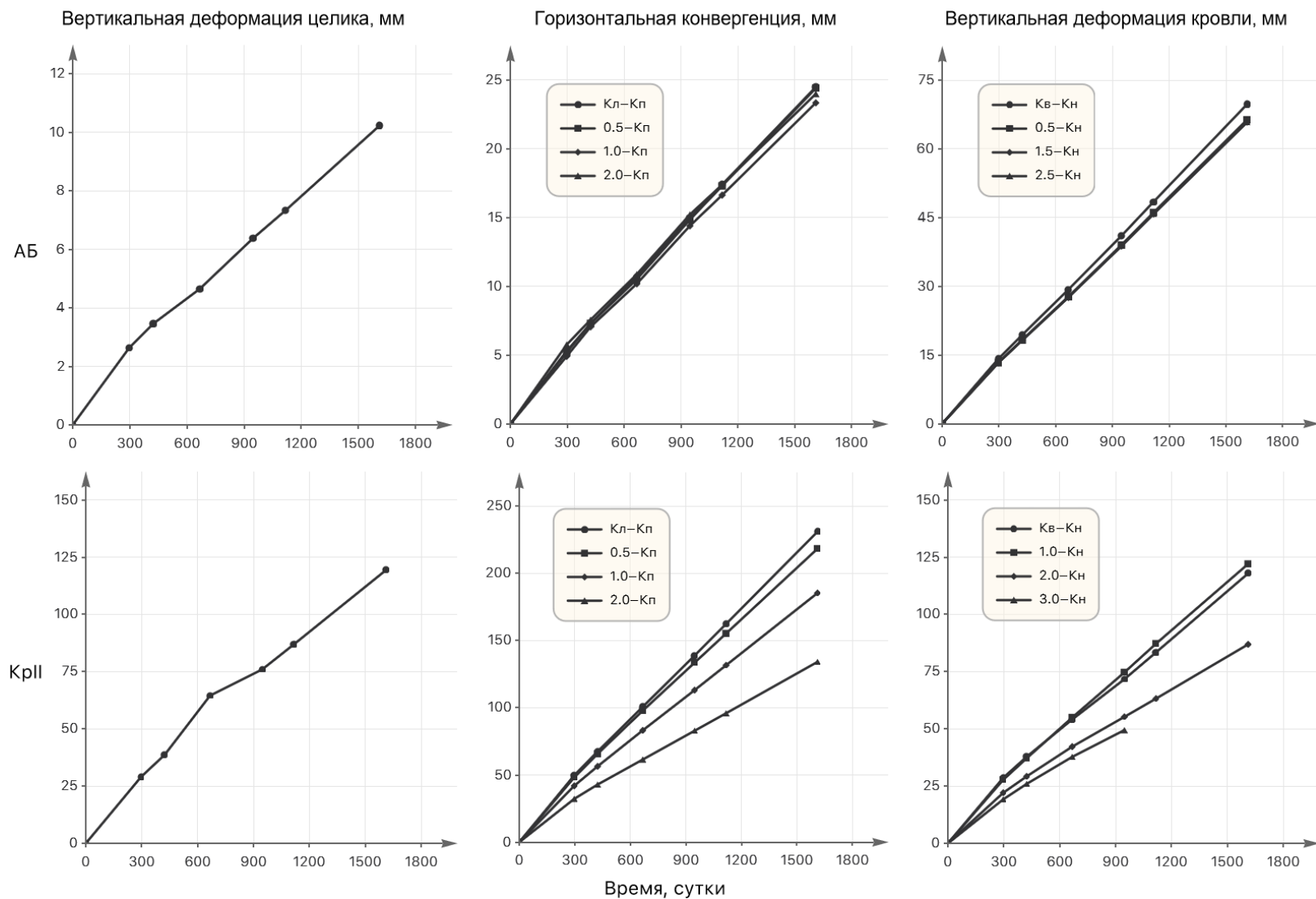
l , м – межосевое расстояние;

m , м – вынимаемая мощность;

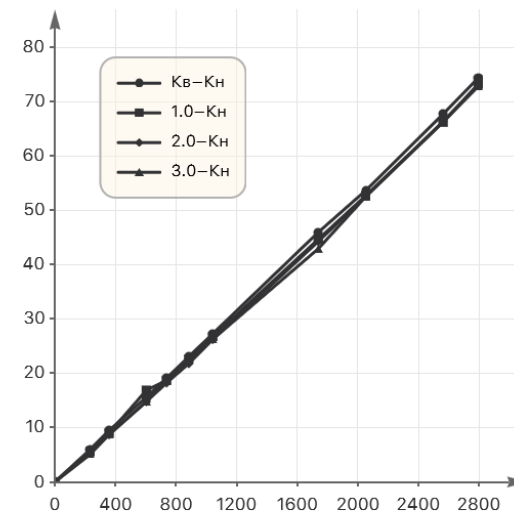
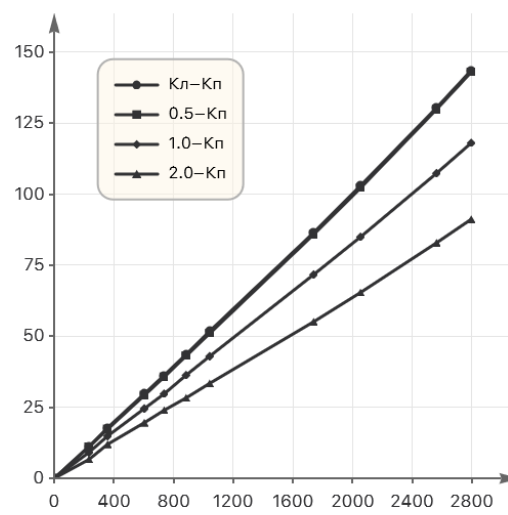
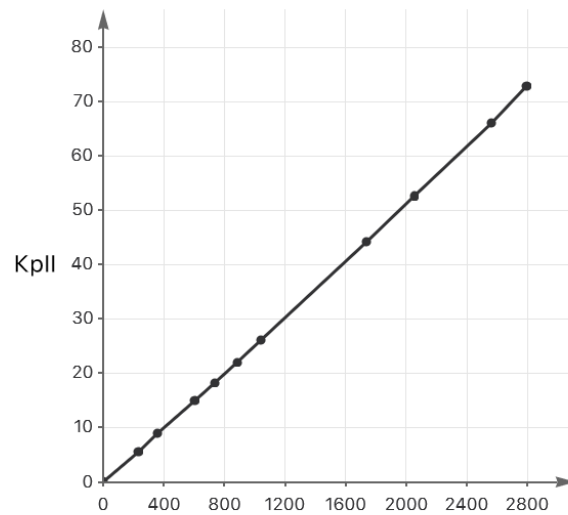
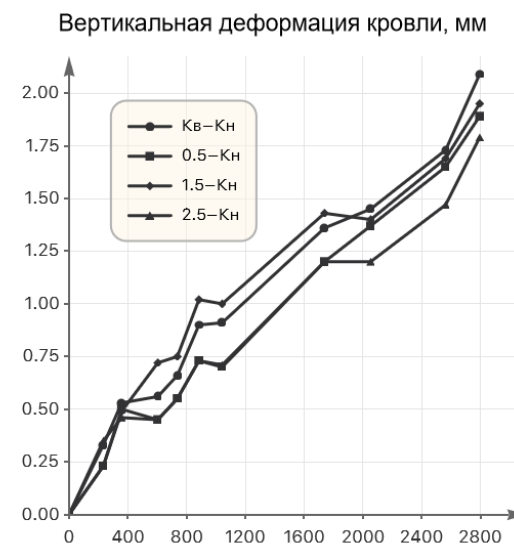
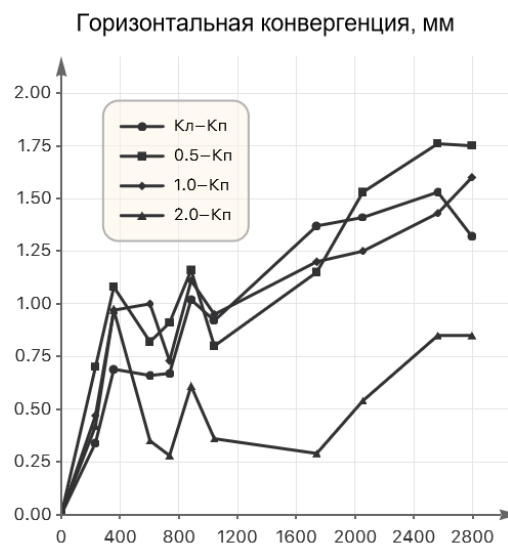
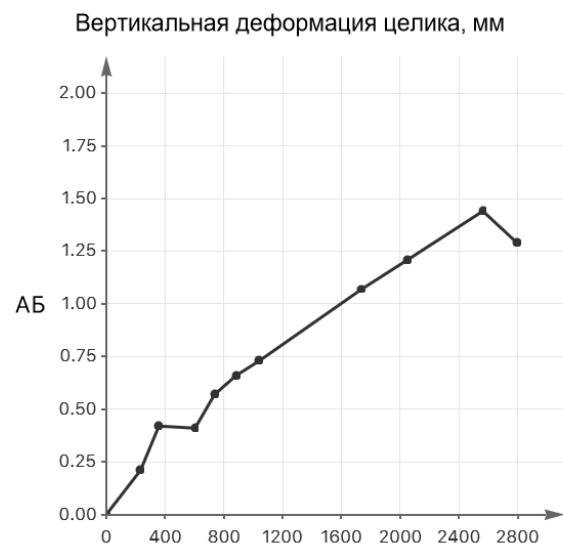
M , м – мощность междупластья;

C – степень нагружения.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

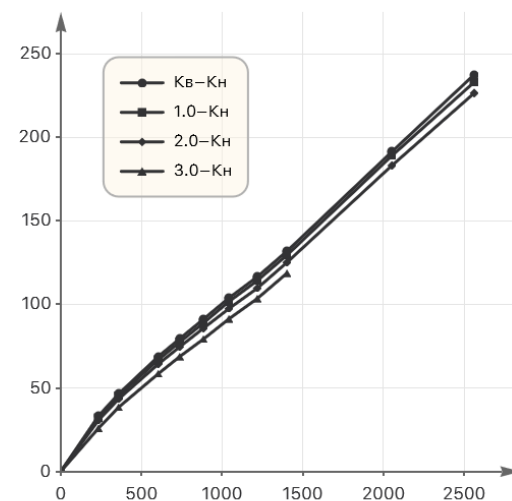
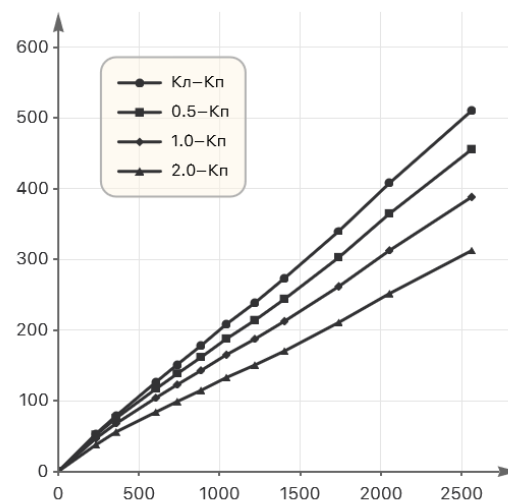
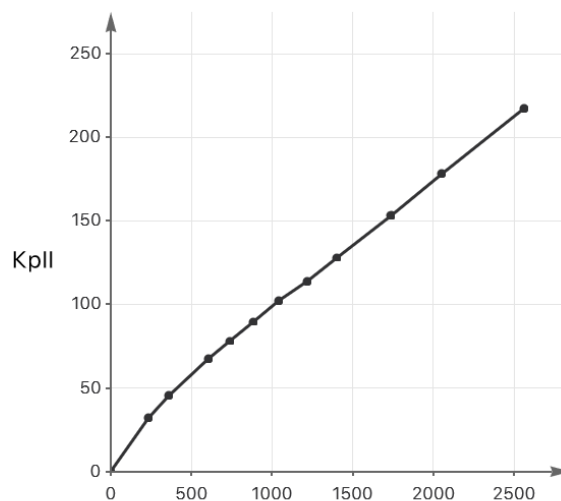
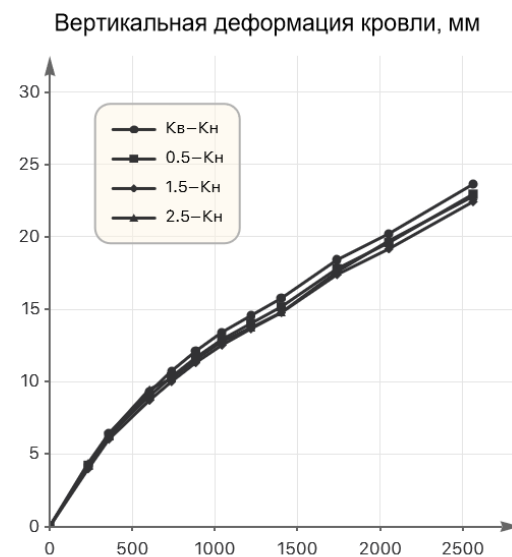
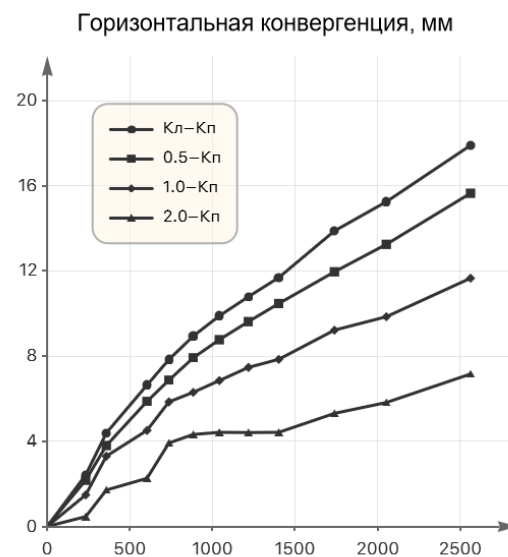
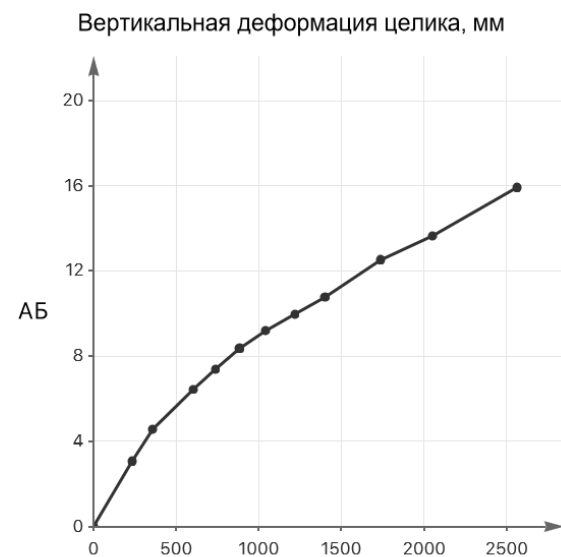


Результаты натурных наблюдений за деформацией камерного блока (эксп. участок №2)



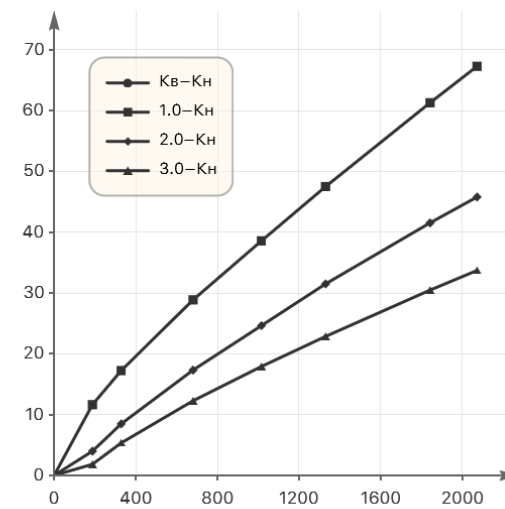
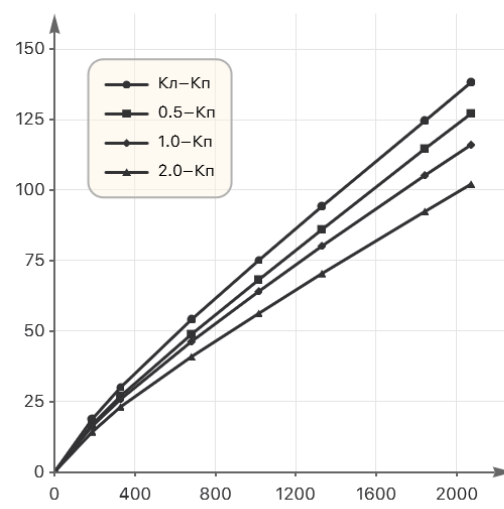
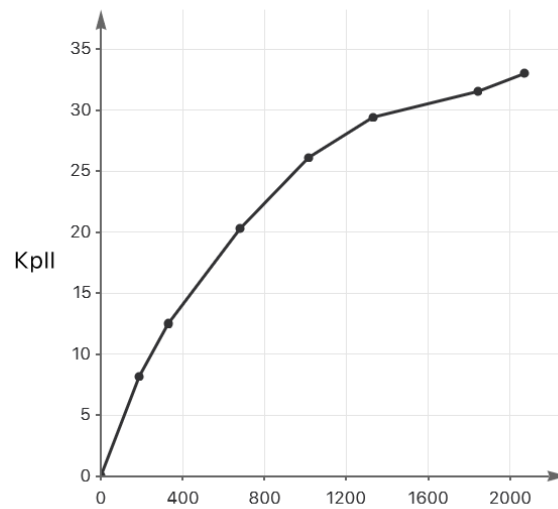
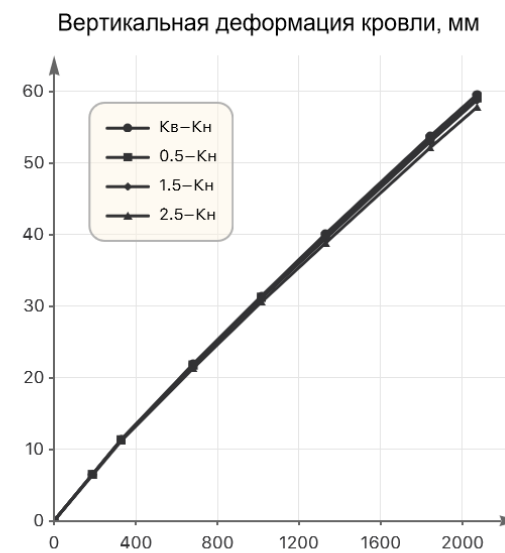
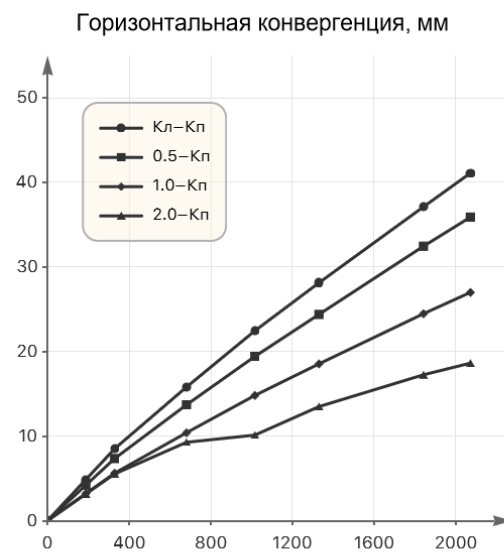
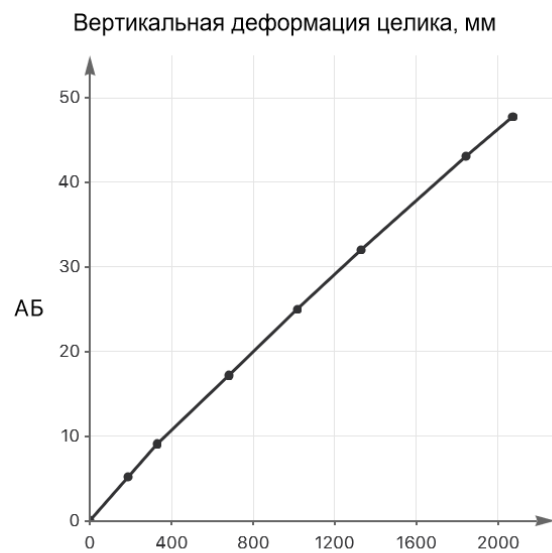
Время, сутки

Результаты натурных наблюдений за деформацией камерного блока (эксп. участок №3)



Время, сутки

Результаты натурных наблюдений за деформацией камерного блока (эксп. участок №4)



Время, сутки

Результаты натурных наблюдений за деформацией камерного блока (эксп. участок №6)