

Пермский государственный национальный исследовательский университет

На правах рукописи



Некрасов Олег Олегович

**ЭЛЕКТРОТЕРМОКОНВЕКЦИЯ
СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В
ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ НАГРЕВЕ СВЕРХУ**

Специальность 1.1.9 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Смородин Б. Л.

Пермь — 2023

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы	9
1.1 Электроконвекция в жидкостях, электропроводность которых зависит от температуры	11
1.2 Электроконвекция при наличии инжекции	14
1.3 Хаотические колебания и параметрический резонанс	18
Глава 2. Колебательные режимы электротермоконвекции в переменном поле при электрокондуктивном зарядообразовании	24
2.1 Постановка задачи	24
2.2 Маломодовая модель	26
2.3 Анализ линейной устойчивости	28
2.4 Режимы нелинейной конвекции при нагреве сверху	32
2.4.1 Период внешнего поля $T' = 2$	33
2.4.2 Период внешнего поля $T' = 2.22$	35
2.4.3 Период внешнего поля $T' = 4$	36
2.4.4 Период внешнего поля $T' = 6.2$	37
2.5 Итоги главы	38
Глава 3. Модуляция заряда на катоде	41
3.1 Постановка задачи	41
3.2 Метод решения	44
3.2.1 Особенности вычислительного метода	46
3.2.2 Методы анализа результатов	48
3.3 Волновые режимы конвекции при модуляции заряда на катоде	49
3.3.1 Бегущая волна, сильно модулированная по амплитуде, и слабо по фазе	51
3.3.2 Режим волны, модулированной по фазе и амплитуде	53
3.3.3 Режим модулированной электроконвекции	56
3.4 Итоги главы	58

Глава 4. Автономная инжекция в постоянном и переменном поле	59
4.1 Основное состояние – механическое равновесие	60
4.2 Анализ линейной устойчивости	63
4.3 Волновые режимы конвекции	67
4.3.1 Смешанный режим	68
4.3.2 Бегущие волны	70
4.3.3 Модулированные бегущие волны	73
4.3.4 Стационарная конвекция	77
4.3.5 Стоячие волны	79
4.3.6 Модулированные стоячие волны	80
4.3.7 Бифуркационные диаграммы режимов движения жидкости в постоянном поле	82
4.4 Волновые режимы конвекции в переменном поле	84
4.4.1 Частота модуляции вдвое меньше собственной частоты . .	85
4.4.2 Частота модуляции не кратна собственной частоте	86
4.4.3 Частота модуляции равна собственной частоте	86
4.4.4 Частота модуляции вдвое больше собственной частоты . .	87
4.4.5 Параметрический резонанс	88
4.5 Влияние расчетной сетки на электроконвективные численные решения	92
4.5.1 Процедура билинейной интерполяции	93
4.5.2 Результаты анализа	94
4.6 Итоги главы	99
Заключение	102
Список литературы	104

Введение

Актуальность и степень разработанности темы диссертации. В работе проводится исследование регулярных и хаотических колебательных течений в неоднородно нагретых слабопроводящих жидкостях, находящихся в электрическом поле горизонтального слоя (конденсатора), а также влияние модуляции поля на свойства электроконвективных структур. Присутствие свободного заряда и его перенос в неизотермических жидкостях с низкой проводимостью оказывает важное влияние не только на пороги возникновения конвекции и поведение малых возмущений, но и на нелинейную эволюцию конечно-амплитудных течений. Благодаря конвективному переносу и подвижности зарядов в жидкости под действием электрического поля могут возникать стационарные, осциллирующие и волновые электротермоконвективные структуры. В переменном поле даже при малоамплитудной модуляции электрического поля пространственновременные характеристики электроконвективных структур могут значительно измениться. Фундаментальный анализ переноса заряда, связанных с ним стационарных, колебательных и волновых течений жидкости в электрическом поле, а также сопутствующая теплопередача активно изучались в последние десятилетия.

Знание характера и понимание особенностей течений неизотермических слабопроводящих жидкостей в электрическом поле актуально для контроля тепло- и массопереноса, а также управления этими процессами в технологических приложениях, например, высоковольтных устройствах, немеханических переключателях или датчиках. Электротермоконвекция используется в качестве активного метода улучшения теплопередачи в однофазных и многофазных системах передачи энергии. Усовершенствование теплопередачи на основе электротермоконвекции обеспечивает ряд преимуществ, таких как простая конструкция, отсутствие движущихся частей, отсутствие шума, быстрое и интеллектуальное управление и более высокая энергоэффективность.

Исследования, результаты которых вошли в диссертацию, проводились при поддержке РФФИ (№ 23-21-00344, <https://rscf.ru/project/23-21-00344/>).

Целью работы является изучение электроконвективных колебаний и волновых структур в нагреваемом сверху горизонтальном слое, 1) заполненном слабопроводящей жидкостью, проводимость которой зависит от температуры,

или 2) диэлектрической жидкостью при наличии инжекции; анализ и классификация отклика системы на внешнее воздействие; исследование эволюции течений.

Для достижения цели в ходе выполнения работы следовало решить следующие **задачи**:

1. В случае зависимости электропроводности слабопроводящей жидкости от температуры (электрокондуктивный механизм) на основе маломодовой модели электроконвекции для разных периодов электрического поля получить характеристики устойчивости жидкости: критические волновые числа и значения электрического параметра. Численно исследовать нелинейные колебания слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле при умеренном нагреве сверху.
2. В случае, когда инжектируемый заряд на электроде пропорционален полю, численно исследовать электротермоконвективные течения при модуляции заряда на электроде.
3. Провести анализ возникновения линейной электротермоконвекции в горизонтальном конденсаторе при автономной инжекции заряда на катоде.
4. Численно исследовать волновые электроконвективные решения в постоянном поле при наличии автономной инжекции.
5. Проанализировать режимы электротермоконвекции при модуляции потенциала на электроде.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые

1. В рамках маломодовой модели при помощи теории Флоке определены характеристики порогов возникновения электротермоконвекции в случае электрокондуктивного механизма создания заряда и умеренного нагрева сверху в переменном электрическом поле.
2. Нелинейная эволюция маломодовой модели при умеренном нагреве сверху и характеризуется наличием хаоса, переход к которому осуществляется через квазипериодичность или субгармонический каскад, а также сосуществованием интенсивных синхронных и малоинтенсивных квазипериодических или хаотических колебаний.
3. Изучено влияние термогравитационного и кулоновского механизмов неустойчивости на поведение малых возмущений слоя жидкости в горизонтальном конденсаторе при автономной инжекции заряда. В ши-

- роком диапазоне изменения параметров задачи найдены критические волновые числа и электрические числа Релея, а также частоты нейтральных колебаний.
4. Построены бифуркационные диаграммы решений, характеризующие электротермоконвективные течения слабопроводящей жидкости в плоском горизонтальном конденсаторе при наличии автономной инжекции; проанализированы режимы смешанного состояния, бегущих (стоячих), а также модулированных бегущих (стоячих) волн, а также пространственные распределения функции тока, температуры и заряда в различные моменты времени.
 5. Определено влияние модуляции внешнего электрического поля на электротермоконвективные решения и интенсивность электроконвекции в случае автономной инжекции.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Эволюция маломодовой системы электроконвекции в переменном электрическом поле при умеренном нагреве сверху обладает гистерезисом. Рост эффективного электрического числа Релея приводит к смене колебательных течений с малым теплотокком: квазипериодических, хаотических и субгармонических. С дальнейшим увеличением управляющего параметра происходит скачкообразный переход к синхронным колебаниям с большим теплотокком. При уменьшении управляющего параметра синхронные колебания сменяются состоянием механического равновесия.
2. При совпадении частоты модуляции инжектируемого заряда на катоде и собственной частоты электроконвекции рождается режим амплитудно- и фазовомодулированной волны, при котором периодически изменяются интенсивность конвекции и структура конвективных валов; на удвоенной (резонансной) частоте модуляции заряда формируется режим синхронных колебаний модулированной конвекции.
3. Для нагреваемого сверху слоя слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле при автономной инжекции заряда с катода получены зависимости критических волновых и электрических чисел Релея и частоты нейтральных колебаний от интенсивности инжекции, подвижности заряда, а также интенсивности нагрева. Показано, что

рост интенсивности инжекции и подвижности заряда понижает частоту нейтральных колебаний.

4. На бифуркационных диаграммах электроконвективных течений в случае автономной инжекции и постоянного электрического поля имеются режимы стоячих, бегущих и модулированных волн, а также стационарной конвекции. Показано, что фазовая скорость бегущих волн уменьшается с ростом электрического числа Релея. Кроме того, в случае слабой инжекции вблизи порога обнаружен смешанный режим, сочетающий черты стоячей и бегущей волны. Режимы стоячих волн неустойчивы.
5. Воздействие на систему электрического поля на резонансных частотах даже с крайне малой амплитудой колебаний может изменить режим течения и увеличить интенсивность электротермоконвекции в несколько раз.

Теоретическая и практическая значимость работы:

- анализ надкритических колебательных электроконвективных течений дополняет теорию нелинейных колебательных и волновых течений жидкости под действием модулированных внешних полей, демонстрируя возможность смены интенсивности и типа течения с изменением частоты или амплитуды внешнего воздействия;
- полученные данные могут быть востребованы как в процессе постановки новых экспериментов, так и для практических задач об эффективном управлении теплопереносом в слабопроводящих жидкостях с помощью электроконвекции.

Методология и методы исследования: Пороги линейной устойчивости маломодовой модели исследованы при помощи численного интегрирования линеаризованной системы в рамках теории Флоке. Нелинейная маломодовая система численно интегрируется при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Возникновение электроконвекции на фоне состояния механического равновесия диэлектрической жидкости при наличии инжекции заряда изучено с помощью методов анализа устойчивости относительно малых возмущений. Эволюция конечноамплитудных надкритических электроконвективных течений в постоянном или переменном поле изучена методом конечных разностей. Кроме того, использованы методы обработки и визуализации: анализ Фурье для колебаний характеристик во времени и разложения

пространственных полей функции тока, температуры и заряда по пространственным гармоникам.

Степень достоверности результатов обеспечивается использованием физически обоснованных моделей, апробированных методик расчета и анализа результатов, согласием полученных данных с ранее известными в общих областях изменения параметров, подтверждается подробным графическим материалом; характеристики возмущений на границе возникновения конвекции согласуются с данными расчетов на основе метода конечных разностей.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ. Из них 6 статей изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. Автор самостоятельно проводил аналитические вычисления и численное моделирование, принимал активное участие в постановке задач: обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами. Представленные в диссертации и выносимые на защиту основные положения получены автором лично.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на межвузовской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Физика для Пермского края» (Пермь, 2017); Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2018, 2020, 2022); Russian Conference on Magneto Hydrodynamics (Perm, 2021); International Symposium «Non-equilibrium processes in continuous media» (Perm, 2021); 13-ой международной конференции-школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2022); Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2023); Пермском гидродинамическом семинаре (Пермь, 2023).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, обзорной главы, трех глав с результатами автора, заключения и списка литературы (125 наименований). Общий объем диссертации 115 страниц, включая 53 рисунка и 3 таблицы.

Глава 1. Обзор литературы

Электроконвекция, описывающая поведение текучих сред (газов, жидкостей и жидких кристаллов) в электрическом поле – один из важнейших разделов гидродинамики, вызывающий интерес с точки зрения теоретического анализа и численного моделирования и находящий отражение в различных экспериментальных исследованиях [1–12].

Исторически, термин «электроконвекция» используется в нескольких очень разных контекстах:

1. Термин «электроконвекция» применяется к эффектам электрического поля, действующего на поверхностный заряд, накопленный на границе раздела двух слабопроводящих жидкостей [1; 3].
2. Электроконвекция протекает в жидкости с низкой электропроводностью ($10^{-9} - 10^{-11} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) под действием электрического поля. Причем, в отличие от металлов и полупроводников [13] транспорт свободного заряда происходит не только благодаря подвижности его носителей в электрическом поле, но и за счет конвективного переноса вместе с жидкостью [14]. Эволюция распределения заряда в жидкости меняет поле силы Кулона, оказывающее определяющее влияние на течения. Существуют различные механизмы образования заряда в жидкости: электротермический, инжекционный, диэлектрофоретический и другие [5–11], – вносящие свои особенности в свойства электроконвективных структур и их динамику.
3. Этот же термин относится к течениям нематических жидких кристаллов, индуцируемому электрическим полем [2; 3; 12].
4. После работы [15] термин «электроконвекция» означает особый тип электрогидродинамической неустойчивости, связанной с гальваноосмотическим проскальзыванием скорости вблизи поверхности, селективной к заряду.

В данной работе термин «электроконвекция» будет использоваться во втором значении. В соответствии с этим подходом будут рассматриваться только явления, связанные со свойствами течений изотропных жидкостей из-за пространственной неоднородности их свойств: температуры, электропроводности или плотности заряда.

Как и в жидких кристаллах, конвекция в слабопроводящих жидкостях в электрическом поле может возникать как в отсутствие градиентов температуры, так и поля тяжести [8; 16].

Некоторые исследователи проводят аналогию между электроконвекцией, возникающей ввиду действия сил Кулона на свободный заряд в жидкости, и тепловой конвекцией Релея, возникающей благодаря плавучести более нагретой жидкости [16; 17]. Однако эта аналогия не имеет места в случае рассмотрения электроконвекции в неизотермической жидкости, когда проявляется взаимодействие механизмов возникновения электрической и тепловой конвекции, что приводит к качественно новым результатам. Возникает возможность роста колебательных возмущений и формирования различных волновых режимов [18], а также нелинейных регулярных и хаотических осцилляций [19].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию электроконвекции слабопроводящей или диэлектрической жидкости, возникающей в плоском горизонтальном конденсаторе под действием нагрева сверху и постоянного или модулированного электрического поля. При этом изучено поведение двух разных электроконвективных систем: 1) слабопроводящей жидкости, электропроводность которой зависит от температуры 2) диэлектрической жидкости, приобретающей проводимость благодаря инъекции заряда с катода. В переменном электрическом поле рассматриваемые системы демонстрируют общее поведение, характерное для колебательной конвекции, например:

- возникновение конвекции из состояния отсутствия движения жидкости в виде относительно малоинтенсивных надкритических колебательных конвективных режимов;
- при дальнейшем увеличении управляющего параметра – переход к высокоинтенсивным режимам конвекции через обратную бифуркацию;
- существование глобальной гистерезисной петли, соответствующей сосуществованию при одинаковых значениях параметров системы высокоинтенсивного и малоинтенсивного режимов электротермоконвекции.

1.1 Электроконвекция в жидкостях, электропроводность которых зависит от температуры

Одна из задач, рассмотренная и решенная в рамках данной работы, посвящена электрокондуктивному механизму образования заряда [5; 20–28]. Однако, в данном контексте, когда речь идет о слабопроводящей жидкости, в которой изначально присутствует некий заряд, имеет смысл говорить о том, что электрокондуктивный механизм не создает заряд, а вызывает неоднородность его распределения. Действительно, линейная зависимость электропроводности от температуры свидетельствует о том, что в более нагретых частях жидкости плотность заряда будет меньше, чем в менее нагретых ее частях.

В общем случае, электрическая сила, действующая на единицу объема диэлектрической жидкости, может быть представлена в следующей форме [29]:

$$\vec{f}_e = q\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\epsilon + \frac{1}{2}\nabla(\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}E^2), \quad (1.1)$$

где q – плотность свободного заряда, ϵ – диэлектрическая проницаемость и ρ – плотность жидкости. Как можно заметить, третье слагаемое имеет градиентную форму и не играет роли, поскольку может быть включено в градиентную часть уравнения Навье-Стокса за счет перенормировки давления. Второе слагаемое, диэлектрофоретическое, зависит от градиента диэлектрической проницаемости, то есть от степени ее пространственной неоднородности.

Пространственная неоднородность диэлектрической проницаемости может быть вызвана, например, диэлектрофоретическим механизмом в условиях неоднородного нагрева жидкости, когда диэлектрическая проницаемость зависит от температуры. Однако, для ряда применяемых в электротехнике и соответствующих экспериментах жидкостей [20; 22; 23; 26; 27] (кукурузное, трансформаторное и конденсаторное масла), справедливо следующее: их электропроводность зависит от температуры значительно сильнее, чем диэлектрическая проницаемость. В этом случае из первых двух слагаемых правой части уравнения (1.1) первое оказывается намного больше, чем диэлектрофоретическое слагаемое, и, таким образом, вторым слагаемым можно пренебречь, рассматривая лишь ту часть электрической силы, что связана непосредственно с силой Кулона, действующей на присутствующий в объеме жидкости заряд.

Можно провести механическую аналогию между силами плавучести и силой Кулона, которая, исходя из математической постановки задачи, здесь представляет собой внешнее силовое поле: сила плавучести действует на неоднородную по плотности массу жидкости, а сила Кулона действует на неоднородный по плотности заряд. Именно взаимодействие этих двух сил и приводит к возникновению большого богатства возможных откликов и режимов течения, возникающих внутри объема жидкости.

В одной из первых работ по данной тематике [5] приводится экспериментальное наблюдение электроконвекции в слабопроводящей жидкости, в которой действует электрокондуктивный механизм. Также экспериментально была обнаружена и изучена колебательная неустойчивость, возникающая при нагреве конденсатора с жидкостью сверху [22; 23]. Линейная устойчивость слабопроводящей жидкости с электрокондуктивным механизмом возникновения конвекции была исследована при различных постановках задачи [22; 23; 25], определены характеристики критических возмущений: волновые числа, частоты нейтральных колебаний и пороги конвекции. В работах [22; 23] рассматривался случай линейной зависимости электропроводности от температуры, что справедливо для небольшой разности температур (до $10\text{ }^{\circ}\text{C}$). Серия работ [21; 22] демонстрирует хорошее соответствие между теоретическими предположениями и экспериментальными данными. В [25] линейный анализ устойчивости использует омическую модель проводимости, являющуюся пределом диссоционно-рекомбиционной модели, и учет разных типов зависимости электропроводности от температуры: линейного, параболического, а также закона Аррениуса.

Задача об электроконвективной неустойчивости неоднородно нагретого вертикального слоя слабопроводящей жидкости при разных направлениях градиента температуры (вертикально вниз или вертикально вверх) решена точно в случае свободных вертикальных границ [24]. Теоретическое, а также экспериментальное исследование устойчивости подъемно-опускного течения в вертикальном слое слабопроводящей жидкости, помещенной в поперечное постоянное электрическое поле, приведено в [27; 28]. Показано, что рост напряженности электрического поля стабилизирует устойчивость плоскопараллельного течения (неустойчивость возникает при больших значениях теплового числа Грасгофа). Кроме того, продемонстрировано хорошее соответ-

ствие между теоретическими данными и экспериментальными результатами для кукурузного масла.

Нелинейная электроконвекция слабопроводящей жидкости, связанная с зависимостью электропроводности от температуры изучалась на базе численного моделирования, основанного на применении метода конечных разностей [30], или маломодовых моделей [31–33]. В этих работах обнаружены и проанализированы колебательные режимы электроконвекции в виде бегущих или модулированных бегущих волн [30], либо стоящих волн.

Остановимся подробнее на результатах анализа колебательного поведения слабопроводящей жидкости, основанной на маломодовых моделях.

В классической работе [34] американский математик Эдвард Лоренц продемонстрировал новый подход к изучению нелинейных конвективных течений: представление функции тока и температуры в виде комбинаций тригонометрических функций, удовлетворяющих граничным и симметричным условиям, позволило свести задачу к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для зависящих от времени амплитуд разложений (модель Лоренца). Такая система поддается численному решению, и его результаты дали импульс к появлению нового раздела физики – теории динамического хаоса.

Модифицированная модель Лоренца, позволяющая свести систему уравнений Навье-Стокса к набору из восьми дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд малых мод, была применена для решения задачи об электроконвекции бесконечного плоского слоя слабопроводящей жидкости, неоднородно нагреваемой и помещенной в постоянное электрическое поле в работах [31–33]. В них в случае нагрева жидкости снизу исследованы случаи конечной [32; 33] и мгновенной [31] релаксации заряда, определены пороги линейной устойчивости, изучены нелинейные стационарные колебательные течения, обнаружены гистерезисные переходы между монотонными и колебательными режимами.

Несмотря на то, что в маломодовых моделях границы слоя полагаются свободными, данные экспериментов [20] и численного моделирования качественно согласуются: при нагреве с эффективным числом Релея, меньшим чем необходимо для возбуждения тепловой конвекции, возникает колебательное течение. При надкритическом нагреве присутствует стационарная конвекция, причем рост электрического поля приводит к понижению теплопереноса до некоторо-

го минимального значения (электрическое поле подавляет электроконвекцию). Далее появляется колебательная конвекция и теплоперенос возрастает.

Временная модуляция параметров гидродинамической системы способна изменять пороги возникновения конвективной неустойчивости, а также свойства нелинейных течений [35–40]. Таким образом, открывается окно возможностей для управления тепломассопереносом путем изменения характера модуляции, например, внешнего электрического поля, чего достаточно легко достичь технически, ввиду того, что практически во всех постановках (как и в данной работе) рассматриваются слабопроводящие жидкости, помещенные в электрические конденсаторы.

В работах [41–43] исследуется влияние временной модуляции электрического поля в рамках восьмимодовой модели. В них рассматриваются случаи подкритического нагрева снизу и сильного нагрева сверху, обнаружены различные виды отклика системы на внешнее воздействие, различные сценарии переходов между ними, в том числе гистерезисные, а также динамический хаос. Во второй главе данной работы приводится исследование, являющееся логическим продолжением этих работ, в случае умеренного нагрева сверху и варьирования частоты изменения электрического поля в весьма широких пределах, при этом для каждой из частот воздействия определены критические волновые числа возникновения конвекции исходя из анализа линейной устойчивости системы.

1.2 Электроконвекция при наличии инжекции

Несмотря на то, что еще Фарадей наблюдал [44] течения диэлектрической жидкости (скипидара) в сильном электрическом поле, электрогидродинамика, как раздел изучающий поведение жидкостей и газов в электрическом поле, появляется в середине XX века. Это связано с высоким экспериментальным уровнем изучения физико-химических свойств слабопроводящих жидкостей, исследования конвективных течений, а также накоплением и анализом данных в этой области [45–49].

Кроме изучения свойств слабопроводящих жидкостей и диэлектриков, причин появления в них свободных или поляризованных зарядов, электропро-

водности, исследовались различные пути генерации и сценарии дальнейшей эволюции электроконвективных течений.

Остановимся на экспериментальных исследованиях и теоретических работах по электроконвекции, возникающей благодаря инжекции заряда с электрода [8; 50–60]. В этом случае в жидкости появляется заряд одного знака с зарядом электродов, что проявляется даже в изотермической среде [49]. Если в жидкости возникает заряд только одного знака (отрицательный у катода или положительный у анода), то инжекция называется униполярной, если возникают положительные и отрицательные носители, то инжекция биполярная.

Граничные условия на электродах, инжектирующих заряд, являются одним из наиболее сложных аспектов в теории электроконвекции. Отсутствие дальнего порядка в жидкостях значительно затрудняет макроскопический анализ переноса заряда через границу раздела металл–жидкость по сравнению с переносами через границы раздела электрод–вакуум, металл–металл или металл–полупроводник. В зависимости от конкретных условий используются различные модели впрыска заряда в жидкость с низкой электропроводностью. Инжектируемый заряд постоянен в наиболее часто используемой модели [8; 55; 61]. Инжектированный заряд может быть пропорционален напряженности поля на электроде [18; 62; 63]. Некоторые модели предполагают, что инжекция происходит, когда напряженность поля в приэлектродной области превышает определенное критическое значение [56]. Эти модели используются для объяснения таких экспериментальных данных, как колебания тока в конденсаторе [51] или люминесценция потоков жидкого диэлектрика [58].

В работах [56–59] использована модель граничных условий, в которой инжекция не просто полагается пропорциональной напряженности электрического поля, а еще и возникает пороговым образом, если величина поля превосходит определенное критическое значение.

В работе [64] изучены процессы зарядообразования в полиметилсилоксановой жидкости расположенной между проволочными медными электродами с нано- и микроразмерно структурированными поверхностями вследствие лазерного скрайбирования и магнетронного напыления различными добавками Al, Cr, Ni, Pt. Показано, что на вольт-амперных характеристиках имеется нелинейный рост, который начинается с начального участка.

Авторы этой работы делают вывод, что электрические поля, локализованные на вершинах нано- и микроструктур, возникающих при обработке лазером

и напылении, приводят к преобладанию униполярной инжекции электронов с катода подобно автоэмиссионному, но электроны захватываются как примесями, так и молекулами жидкости. Экспоненциальная зависимость эмиссии электронов (типа автоэлектронной) на границе металл – жидкий диэлектрик подтверждается экспериментальными вольт-амперными характеристиками в случае металлических игольчатых электродов [65].

С другой стороны, в работе [66] отмечается, что наноструктуры являются не только центрами инжекции, но и зародышами начальной эрозии поверхности электрода. Таким образом, для поддержания электроконвекции необходимы условия, исключающие разрушение поверхности электродов, но обеспечивающие постоянный заданный уровень инжекции заряда.

Среди электроконвективных течений, возникающих благодаря инжекции заряда, следует отметить большой класс интересных явлений: хаотические колебания тока [51; 60], стационарные и колебательные электроконвективные течения [8; 52].

Стационарная конвекция может возникнуть в находящейся электрическом поле слабопроводящей жидкости благодаря действию сил Кулона на свободные заряды даже в отсутствие градиентов температуры (изотермический случай) [8; 62; 63]. Причем, переход из состояния покоя жидкости (с ионной проводимостью) к течению (с конвективным переносом заряда) происходит в результате обратной бифуркации. Существует интервал электрических чисел Релея, где оба упомянутых выше решения устойчивы, а переход между ними происходит с гистерезисом.

Одна из ранних моделей электроконвекции рассматривала ее начальные этапы и использовала приближение слабой инжекции [67]. В этом же приближении (слабой автономной униполярной инжекции) проанализированы монотонные и колебательные режимы электроконвекции в жидких диэлектриках [68–70]. В последних работах также учтено влияние зависимости диэлектрической проницаемости и подвижности зарядов от температуры на характер электроконвективной неустойчивости. В [50; 53; 54] исследована изотермическая электроконвекция диэлектрической жидкости в областях с различной геометрией изучена на основе численного моделирования при автономной или зависящей от поля инжекции.

Электроконвекция в неизотермической жидкости, благодаря взаимодействию кулоновских сил и сил плавучести, открывает дополнительные возмож-

ности. Разнообразие нелинейных течений и путей их эволюции увеличивается. Здесь возможно усиление [71; 72] или ослабление [73] теплопередачи при нагреве снизу областей, заполненных жидкостью. В работах [71; 72] обнаружены только установившиеся стационарные режимы электроконвекции, однако следует отметить, что при численном моделировании на боковых границах горизонтальной электроконвективной ячейки рассматривались граничные условия Неймана для электрического потенциала, плотности заряда и температуры и условие непротекания по горизонтали, что заведомо исключало решения в виде бегущих волн. Хаотические колебательные течения обнаружены в [19] при нагреве ячейки сбоку и вертикальном электрическом поле (сила Кулона и градиент температуры перпендикулярны). Стационарная электроконвекция в широком зазоре между горизонтальными коаксиальными цилиндрами при изменении угла между радиальным электрическим полем и направлением силы тяжести изучалась в [74]. Показано, что с ростом электрического числа Релея T решение в виде конвективного факела меняется на решение в виде радиального движения с большим количеством конвективных ячеек, что значительно увеличивает теплоотдачу.

Электроконвекция в диэлектрической жидкости в том случае, когда заряд на катоде пропорционален приложенному электрическому полю, а распределение поля считается независимым от конвективного перераспределения заряда, была исследована в [18; 75; 76] в условиях нагрева сверху. Данные исследования показали, что приложение электрического поля открывает возможность для образования колебательной неустойчивости. В результате прямой бифуркации Хопфа появляются волновые электроконвективные течения в форме стоячей волны или бегущей волны, а также модулированных волн, которые могут наблюдаться в плоском горизонтальном конденсаторе или круговых каналах. Такое поведение слабопроводящей жидкости связано с перераспределением заряда внутри конденсатора и является в некотором смысле аналогом конвекции бинарных смесей, в которых в результате эволюции колебательных возмущений могут возникать стационарные и волновые структуры, в том числе стоячие и бегущие волны, изучаемые на основе численного моделирования [77–85].

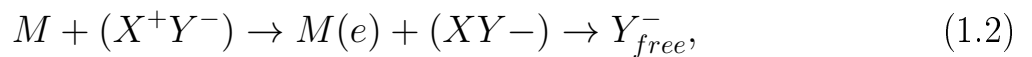
Кроме геометрии плоского конденсатора при изучении электроконвекции часто рассматривают геометрию плоский электрод-лезвие [86; 87] или плоский электрод-острие [88; 89].

В работе [86] предполагается, что инжекция линейно зависит от напряженности электрического поля и показано, что инжекционная проводимость

преобладает над диссоционной лишь при достаточно больших напряжениях, а жидкость при этом течет от лезвия. В [87] рассматриваются законы автономной и неавтономной инжекции, и делается вывод о важности формы лезвия. Обнаружено, что переход между стационарными и нестационарными режимами, зависит не только от закона инжекции, и формы лезвия, но и подвижности зарядов и величины инжекции.

В работе [88] представлены результаты эксперимента по созданию электрогидродинамической неустойчивости в смеси из двух слабопроводящих жидкостей с разными диэлектрическими проницаемостями путем инжекции зарядов в системе электродов острие-плоскость, при наличии быстроосциллирующего (с частотой 50 Гц) электрического поля. Показано, что, начиная с некоей разности потенциалов, в системе формируется осредненное течение. В работе [89], численно моделирующей данную постановку, показано, что в механизме возбуждения электрогидродинамического течения большую роль играют эмиттируемые холодным образом в смесь жидкости электроны.

В данной работе будет рассматриваться ситуация униполярной инжекции с катода. В этом случае находящиеся у электрода атомы нейтральной примеси захватывают электроны и становятся отрицательными ионами [18]:



где M – металлический электрод, отдающий ионной паре (X^+Y^-) электрон e , Y_{free}^- – инжектируемый ион. Генерируемый в прикатодном слое отрицательный заряд дрейфует в электрическом поле, проникая в глубь жидкости и создавая в ней объемный заряд. Затем, сила Кулона, действующая на этот объемный заряд, порождает электроконвективное движение.

1.3 Хаотические колебания и параметрический резонанс

Как уже отмечалось выше, электроконвективные течения могут демонстрировать хаотическое поведение, что является проявлением общих законов поведения жидкости в случае воздействия на них электрического поля. Эксперименты Осборна Рейнольдса [90] продемонстрировали научному сообществу, что турбулентность, то есть непериодическое хаотическое движение сплошной

среды, не является случайностью и частным решением гидродинамических уравнений, а представляет собой одно из основных состояний динамических систем, возникающих естественным образом.

В первой половине XX века советский математик Андрей Николаевич Колмогоров исследует вопрос гидродинамической турбулентности и вырабатывает новый подход к ее изучению, связанный с исследованием масштабов диссипации энергии в течениях сплошной среды [14].

Практически одновременно с Рейнольдсом, французский математик Анри Пуанкаре, анализируя классическую задачу небесной механики (задачу трех тел), обнаруживает новые методы исследования эволюции динамических систем, связанные с изучением фазового пространства и установлением закономерностей развития фазовых траекторий [91]. Оказалось, что с помощью фазового пространства можно проводить анализ поведения течений жидкости в различных ситуациях.

В начале второй половины XX века происходит прорыв в изучении динамического хаоса, американскому физику и метеорологу Эдварду Лоренцу, использовавшему в работе недоступные предшественникам вычислительные машины, удается обнаружить очень важную закономерность хаотических решений уравнений Навье-Стокса [34]. Вместе с тем, Лоренц демонстрирует новый способ их численного решения, связанный с исследованием амплитуд разложений гидродинамических параметров по базовым функциям.

В этой модели конвекции в качестве фазовых переменных выступают зависящие от времени амплитуды пространственных базисных функций: одна для поля скорости и еще две для температуры. В фазовом пространстве устойчивым течениям соответствуют разные геометрические объекты: стационарному течению – точка (узел), периодическому колебательному течению – предельный цикл, квазипериодическому – поверхность тора [92]. Поведение траекторий для регулярных течений в фазовом пространстве можно предсказать, зная состояние системы в начальный момент времени.

Изменение управляющего параметра в гидродинамической системе может вызвать неустойчивость и привести к турбулентности [14]. Это состояние характеризуется сплошным спектром Фурье сигнала, снимаемого с системы. В фазовом пространстве наблюдается сложное поведение траекторий в ограниченном объеме, которое получило название странный аттрактор [93].

Странный аттрактор Лоренца [94], фрактальная поверхность, «притягивающая» к себе фазовые траектории находящейся в состоянии хаоса трехпараметрической системы Лоренца, стала символом нового раздела физики – теории динамического хаоса [92; 95].

Эта наука изучает как закономерности поведения систем, находящихся в состоянии хаоса, так и сценарии возникновения хаоса из упорядоченного состояния, связанные с бифуркациями системы. Всего на текущий момент выделяется три основных сценария перехода к хаосу:

- через квазипериодичность, заключающийся в том, что в системе с ростом управляющего параметра начинает обнаруживаться все больше колебаний с несоизмеримыми частотами, до тех пор, пока Фурье-спектр колебаний системы не станет сплошным, что соответствует непериодическому хаотическому поведению [95];
- через каскад удвоений периода: с ростом управляющего параметра в системе происходит бесконечная последовательность бифуркаций, соответствующих появлению колебаний с уменьшенной вдвое частотой, при этом интервалы между бифуркациями последовательно уменьшаются до тех пор, пока Фурье-спектр не станет сплошным [14; 95];
- через перемежаемость, заключающуюся в реализации в системе колебательного режима, в котором ламинарное течение периодически сменяется турбулентным. С ростом управляющего параметра окна ламинарности сужаются до тех пор, пока течение не станет полностью турбулентным [95].

Хаотической конвекция наблюдается во многих реальных физических системах, например в явлениях земной атмосферы, экологии, производства кристаллов, движении объектов Солнечной системы. По-прежнему одним из подходов к исследованию этих явлений остается подход Лоренца, заключающийся в переходе от системы уравнений Навье-Стокса, содержащей реальные физические переменные, к системам уравнений для амплитуд разложений этих переменных по минимальному набору базисных тригонометрических функций. При анализе конвекции в различных физических условиях (в пористой среде, электрическом или магнитном поле) получают усложненные модели Лоренца, учитывающие симметрию конкретной задачи, что приводит к необходимости учета большего числа мод и меняет эволюцию изучаемых систем.

В работе [96] такой подход позволил изучить хаос, возникающий в пористой среде в случае отсутствия теплового равновесия, при этом переход к хаосу происходил через каскад удвоений периода. В работе [97] было обнаружено, что увеличение внутреннего нагрева в пористой среде приводит к тому, что система быстрее переходит к хаотическому поведению.

В работе [98], использующей пятимерную модифицированную модель Лоренца, удалось обнаружить различные режимы движения, в том числе хаотические, для нагреваемого слоя наножидкости, при этом показано, что при увеличении нагрева возрастает тепломассопоток, а критические числа перехода к хаосу зависят от того, как изначально стратифицирована наножидкость (более тяжелые слои находятся вверху или внизу). Модифицированная модель Лоренца также используется для изучения хаотической конвекции феррожидкости [99].

В переменном или модулированном внешнем поле ситуация может резко измениться. Примером качественного изменения поведения механического объекта, помещенного в переменное поле, является маятник с вибрирующей точкой подвеса [100]. Известно, что вертикальные вибрации могут сделать устойчивым положение маятника выше точки подвеса.

Неустойчивость механического равновесия или течения жидкости (основного состояния) в переменном поле наступает в общем случае вследствие роста колебательных возмущений, которые различаются характером поведения во времени. Возмущения, период которых совпадает с периодом внешнего поля называются синхронным откликом; в случае, когда период отклика вдвое большим периода внешнего поля имеем субгармонический отклик, и наконец две несоизмеримые частоты в спектре колебательных возмущений формируют квазипериодический отклик [101].

Эволюцию во времени регулярных периодических течений удобно анализировать с помощью построения Фурье спектров колебаний различных характеристик в некоторой заданной точке. При этом в случае синхронного отклика в спектрах Фурье главная частота совпадает с частотой внешнего воздействия. Для субгармонического отклика главная частота равна половине частоты переменного воздействия. Кратные гармоники также могут проявиться в спектрах, но их амплитуда много меньше главной частоты. Если частоты в спектре Фурье представляют собой линейные комбинации несоизмеримых частот, то отклик квазипериодический.

Независимо от источника, переменная движущая сила может не только изменять свойства устойчивости, но и влиять на нелинейную эволюцию гидродинамических и, в частности, конвективных систем [102; 103]. Она используется для управления потоками и теплопередачей в различных ситуациях. В случае переменного электрического поля могут возникать параметрические неустойчивости [43] и генерироваться различные волновые течения [38].

В электрогидродинамических системах под действием переменного тока (или в переменном электрическом поле) появляются колебательные и хаотические течения [36; 51; 60], что является проявлением перехода от простых (регулярных) течений жидкости к сложным (нерегулярным) (так называемая проблема неустойчивости и перехода к турбулентности). В работе [104] анализируется влияние импульсного постоянного тока или переменного тока на переходную эволюцию термоэлектроконвекции и их бифуркационное поведение в случае нагрева снизу.

В настоящее время электрогидродинамические (ЭГД) явления в переменных электрических полях находят большое применение в процессах ЭГД-печати и биологических ЭГД-течениях. В работе [105] продемонстрировано, что ЭГД-печать в переменном поле имеет большое преимущество над печатью в постоянном поле для создания капель по требованию (Drop-on-Demand) и отталкивания капель в зависимости от частоты приложенного переменного потенциала. В работе [106] производился эксперимент по ЭГД-печати в ступенчатом электрическом поле с контролем размера капли в зависимости от амплитуды приложенного поля. В биологических ЭГД-течениях переменное поле зачастую более предпочтительно, чем постоянное, поскольку позволяет избежать повреждения электродов или электролиза, а также дает возможность работать с относительно низкими напряжениями, делая ЭГД-системы подходящими для биологических приложений [107].

Электротермоконвективные течения в модулированном поле являются интересным примером явления самоорганизации. Практические приложения этой проблемы связаны с созданием, например, немеханических переключателей и тепловых клапанов, когда воздействие на систему при помощи электрических полей может привести к физическому перемещению ее деталей или изменению ее физических свойств. С концептуальной точки зрения, переключатели теплотока можно сравнить полупроводниковыми транзисторами: модуляция электрического поля с малой амплитудой на главной резонансной частоте спо-

собна спровоцировать значительное изменение интенсивности конвективного движения жидкости [108].

Глава 2. Колебательные режимы электротермоконвекции в переменном поле при электрокондуктивном зарядообразовании

В данной главе на основе маломодовой модели электроконвекции рассмотрено влияние переменного электрического поля на колебательные течения слабопроводящей жидкости, электропроводность которой зависит от температуры, заполняющей конденсатор, нагреваемый сверху. Отличием данного исследования от предыдущего [42; 43] рассмотрения является построение нейтральных кривых при различных частотах воздействия, определение критических характеристик неустойчивости: волновых чисел и критического электрического параметра, а также анализ нелинейной эволюции при оптимальном выборе геометрических параметров модели, рассчитываемых на основе критических волновых чисел.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается плоский горизонтальный слой слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости, помещенный в переменное вертикальное электрическое поле \vec{E} и поле силы тяжести \vec{g} (рис. 2.1),

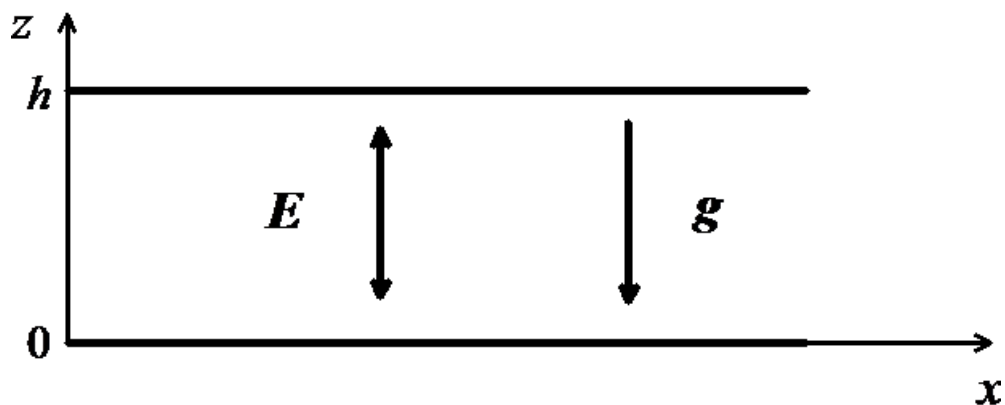


Рисунок 2.1 — Система координат и геометрия задачи о плоском горизонтальном слое жидкости

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0 : \vec{v} = 0, \hat{T} = \Theta, \varphi = U \cos(\omega t), \\ z = h : \vec{v} = 0, \hat{T} = 0, U = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где Θ – разность температур, ω – частота внешнего электрического поля, U – амплитуда его изменения.

Задача рассматривается в электрогидродинамическом приближении, в котором электрические эффекты много больше магнитных, которыми можно пренебречь [109]. Также используется приближение Буссинеска, предполагающее, что неоднородности плотности учитываются только в слагаемых, связанных с массовыми силами [110]. Начальная система дифференциальных уравнений, описывающих систему, основана на уравнении Навье-Стокса, уравнении теплопроводности, законе сохранения заряда, уравнении Пуассона для заряда и электрического потенциала и уравнении неразрывности [14]:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) &= -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + q \vec{E}, \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \hat{T} &= \chi \Delta \hat{T}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) + (\vec{v} \cdot \nabla) q &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= q / \varepsilon \varepsilon_0, \\ \vec{E} &= -\nabla \Phi, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

где \vec{v} , p , \hat{T} – поля скорости, давления и температуры соответственно, η – динамическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, χ – коэффициент температуропроводности, q – плотность заряда, растворенного в жидкости, σ – электропроводность жидкости, ε – диэлектрическая проницаемость, ε_0 – электрическая постоянная, Φ – потенциал электрического поля, E – его напряженность.

Предполагается, что плотность и электропроводность исследуемой жидкости зависят от температуры по линейным законам [9; 14] $\rho = \rho_0(1 - \beta_\Theta \hat{T})$ и $\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma \hat{T})$, где ρ_0 и σ_0 – значения плотности и электропроводности при средней температуре, β_Θ и β_σ – положительные коэффициенты. Таким образом, основными механизмами возникновения конвекции являются термогравитационный и электрокондуктивный механизмы [42].

В силу малости неоднородности электропроводности (для слабопроводящей жидкости при умеренном нагреве $\beta_\sigma \hat{T} \ll 1$) можно пренебречь пространственной неоднородностью электрического поля и изменением поля, вызываемым перераспределением зарядов (т.е. использовать безындукционное приближение) [33].

2.2 Маломодовая модель

Система (2.2) обезразмеривается согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [t] &= \frac{\rho_0 h^2}{\eta}, [\varphi] = U, [\vec{v}] = \frac{\chi}{\eta}, [r] = h, \\ [\hat{T}] &= \Theta, E = \frac{U}{h}, [p] = \frac{\eta \chi}{h^2}, [q] = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{h^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

и с учетом приближения Буссинеска предстает в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \text{Ra} \hat{T} \vec{\gamma} + \text{Ra}_\sigma q \cos(\omega t) \vec{\gamma}, \\ \text{Pr} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \hat{T} = \Delta \hat{T}, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\sigma \vec{E}) + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} (\vec{v} \cdot \nabla) q = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, сонаправленный с осью z .

Система (2.4) содержит следующие безразмерные параметры: $\text{Ra} = \frac{\rho_0 g \beta_\theta \Theta h^3}{\chi \eta}$ – число Релея, $\text{Ra}_\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2 \beta_\sigma \Theta}{\chi \eta}$ – электрический аналог числа Релея, $\text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho_0}$ – число Прандтля, $\text{Pr}_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \eta}{h^2 \sigma_0 \rho_0}$ – электрический аналог числа Прандтля.

Представим поля \vec{v} , \hat{T} и q в виде $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\theta}$ и $q = q_0 + q'$, где \vec{v}_0 , $\vec{\theta}$ и q' – отклонения величин от их равновесных значений (далее штрихи будут опущены) [14]. Рассмотрим двумерные решения и соответственно введем функцию

тока ψ ($v_x = -\partial\psi/\partial z$, $v_z = \partial\psi/\partial x$) [42]. Таким образом придем к системе [33]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta\psi \right) = \Delta^2\psi + Ra \frac{\partial\theta}{\partial x} + Ra_\sigma \frac{\partial q}{\partial x} \cos(\omega t), \\ Pr \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial x} = \Delta\theta + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ Pr_e \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{Pr_e}{Pr} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + q + \frac{\partial\theta}{\partial z} \cos \omega t = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \psi = \psi'' = 0, \quad \theta = 1, \\ z = h : \quad \psi = \psi'' = \theta = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для поиска решений уравнений (2.5), удовлетворяющих граничным условиям (2.6), применяется метод Галеркина [110] с аппроксимацией функций ψ , θ и q [42]:

$$\begin{aligned} \psi &= (A_1(t) \sin \pi z + A_2(t) \sin 2\pi z) \sin \pi k x, \\ \theta &= (B_1(t) \sin \pi z + B_2(t) \sin 2\pi z) \cos \pi k x + C(t) \sin 2\pi z, \\ q &= (D_1(t) \cos \pi z + D_2(t) \cos 2\pi z) \cos \pi k x + E(t) \sin 2\pi z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь k – волновое число, характеризующее периодичность решений по горизонтали, а коэффициенты A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C , D_1 , D_2 , E – амплитуды, показывающие вклад пространственных мод в решение.

Подставим разложения функции тока, температуры и плотности заряда (2.7) в систему уравнений электроконвекции, где преобладающим является электрокондуктивный механизм образования заряда (2.5), и проведем процедуру ортогонализации. Затем перемасштабируем время и амплитуды пространственных мод следующим образом [33]:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \frac{Pr}{\pi^2(1+k^2)} t, \quad A_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, \quad A_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} V, \\ B_1 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, \quad B_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} W, \quad C = \frac{Z}{\pi}, \quad D_1 \rightarrow \sqrt{2} S, \quad D_2 \rightarrow 2\sqrt{2} T, \quad E \rightarrow U. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В результате получим систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пространственных гармоник (точка над переменной

обозначает производную по времени) [42; 43]:

$$\begin{cases} \dot{X} = \text{Pr}(-X + rY - eT \cos \omega t), \\ \dot{Y} = -Y + X + XZ, \\ \dot{Z} = -bZ - XY, \\ \dot{V} = \text{Pr}(-d \cdot V + (rW + eS \cos \omega t)/d), \\ \dot{W} = -d \cdot W + V, \\ \dot{S} = -gS + XU - gY \cos \omega t, \\ \dot{T} = -gT - gW \cos \omega t, \\ \dot{U} = -gU - XS - 2gZ \cos \omega t. \end{cases} \quad (2.9)$$

В системе (2.9) введены следующие обозначения [42; 43]:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, \quad \text{Ra}_0 = \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \\ \text{Ra}_{\sigma 0} &= \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \quad d = \frac{4+k^2}{1+k^2}, \quad b = \frac{4}{1+k^2}, \quad g = \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)\text{Pr}_e}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где r , e – нормированные тепловое и электрическое числа Релея, Ra_0 и $\text{Ra}_{\sigma 0}$ – критические числа, с которых начинается соответственно термогравитационная или электрокондуктивная конвекция.

2.3 Анализ линейной устойчивости

Используя метод малых возмущений, можно линеаризовать систему (2.9), отбросив нелинейные слагаемые. В таком случае данная система представима в виде

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t), \quad (2.11)$$

где $\vec{x}(t) = \{X(t), Y(t), Z(t), V(t), W(t), S(t), T(t), U(t)\}$, а матрица системы $A(t)$ в линейном приближении определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Pr & rPr & 0 & 0 & 0 & 0 & -ePr \cos \omega t & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -dPr & \frac{rPr}{d} & \frac{ePr \cos \omega t}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g \cos \omega t & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g \cos \omega t & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & -2g \cos \omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Поскольку система (2.11) является линейной с непрерывной матрицей, периодической с циклической частотой ω , а соответственно и с периодом по времени $T' = \frac{2\pi}{\omega}$, то, согласно теории Флоке [101; 111], ее фундаментальная матрица решений имеет вид

$$Q(t) = \Phi(t) \exp(Bt), \quad (2.13)$$

где $\Phi(t)$ – непрерывная периодическая матрица с тем же периодом, что и матрица системы $A(t)$, а B – постоянная матрица. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} Q(t + T') &= \Phi(t + T') \exp(B(t + T')) = \Phi(t) \exp(Bt) \exp(BT') = \\ &= Q(t) \exp(BT'), \end{aligned}$$

тогда

$$\exp(BT') = Q^{-1}(0) \cdot Q(T'), \quad (2.14)$$

матрица $Q(T')$ называется матрицей монодромии. Собственные значения матрицы монодромии ρ_j , в общем случае комплексные числа, называются мультипликаторами.

Применяя теорему Флоке-Ляпунова о приводимости периодической линейной системы можно показать [112], что устойчивость системы (2.11) определяется именно мультипликаторами матрицы монодромии: система устойчива только в том случае, если все мультипликаторы ρ_j ее матрицы монодромии (2.14) лежат внутри единичного круга $|\rho| \leq 1$, а асимптотически устойчива в случае $|\rho| < 1$.

Мультипликаторы также можно представить в виде $\rho_j = \exp(\lambda_j T')$, где $\lambda_j = \text{Re}(\lambda_j) + i\text{Im}(\lambda_j)$ – комплексные показатели Ляпунова системы (2.11), таким образом мультипликаторы в экспоненциальной форме представляют собой

следующее:

$$\rho_j = \exp((\operatorname{Re}(\lambda_j) + i\operatorname{Im}(\lambda_j))T') = |\rho| \exp(i\operatorname{Im}(\lambda_j)T') \quad (2.15)$$

Показатели Ляпунова можно упорядочить следующим образом: $\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_2) > \dots > \operatorname{Re}(\lambda_j)$. Условие $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$ ($|\rho_1| = 1$) определяет область периодических решений в области параметров k , e , ω при фиксированных остальных параметрах. Мнимая часть показателя Ляпунова определяет тип колебаний, возникающих в системе (2.11). Если $\operatorname{Im}(\lambda_1)$ равняется частоте внешнего воздействия ω , то мультипликатор ρ_1 будет равен единице и такой случай отвечает нейтральным синхронным колебаниям системы (с тем же периодом, что и у внешнего воздействия). Если $\operatorname{Im}(\lambda_1) = \omega/2$, то мультипликатор ρ_1 равен -1 и такой случай отвечает нейтральным субгармоническим колебаниям (с периодом вдвое большим, чем период внешнего воздействия). В случае же когда мультипликатор комплексный, но по модулю равен единице, в системе реализуются нейтральные квазипериодические колебания.

Таким образом, в исследуемой физической системе в линейном приближении конвекция наступает в том случае, если хотя бы один из мультипликаторов матрицы монодромии системы по модулю превысит единицу. Матрицу монодромии можно вычислить, численно проинтегрировав систему (2.11) на ее периоде T' .

Рассматривается случай умеренного нагрева сверху, при котором нормированное тепловое число Релея r принимает значение -1 [113]. Как видно из соотношений (2.10), при нагреве сверху нормированное электрическое число Релея e также отрицательно, но рассматриваться будет его абсолютное значение. Прочие параметры жидкости имеют значения $\operatorname{Pr} = 400$, $\operatorname{Pr}_e = 30$. Это соответствует слабопроводящим жидкостям, электропроводность которых зависит от температуры, например, кукурузному или трансформаторному маслу [20; 26; 27].

Графики нейтральных кривых в координатах волновое число k – модуль безразмерного электрического параметра $|e|$ при различных периодах изменения внешнего электрического поля представлены на рис. 2.2.

Определив точку экстремума нейтральной кривой можно вычислить минимальное по модулю значение безразмерного электрического параметра, с которого начинается конвективное движение жидкости, а также соответствующее критическое волновое число, например $|e_{min}|(T' = 2.22) = 91.7$ и

$k_c(T' = 2.22) = 1.45$. Мультипликаторы матрицы монодромии комплексны в областях абсолютного минимума нейтральных кривых (рис. 2.2), что отвечает возникновению конвекции в форме квазипериодических колебаний в том случае, когда волновое число равно критическому значению k_c . Также нейтральные кривые рис. 2.2 содержат локальные минимумы. Мультипликаторы в их областях действительны и равны единице, а значит при значениях волнового числа, отвечающих этим областям, будут возникать синхронные колебания. Соответствующие области на рис. 2.2 построены штриховой линией.

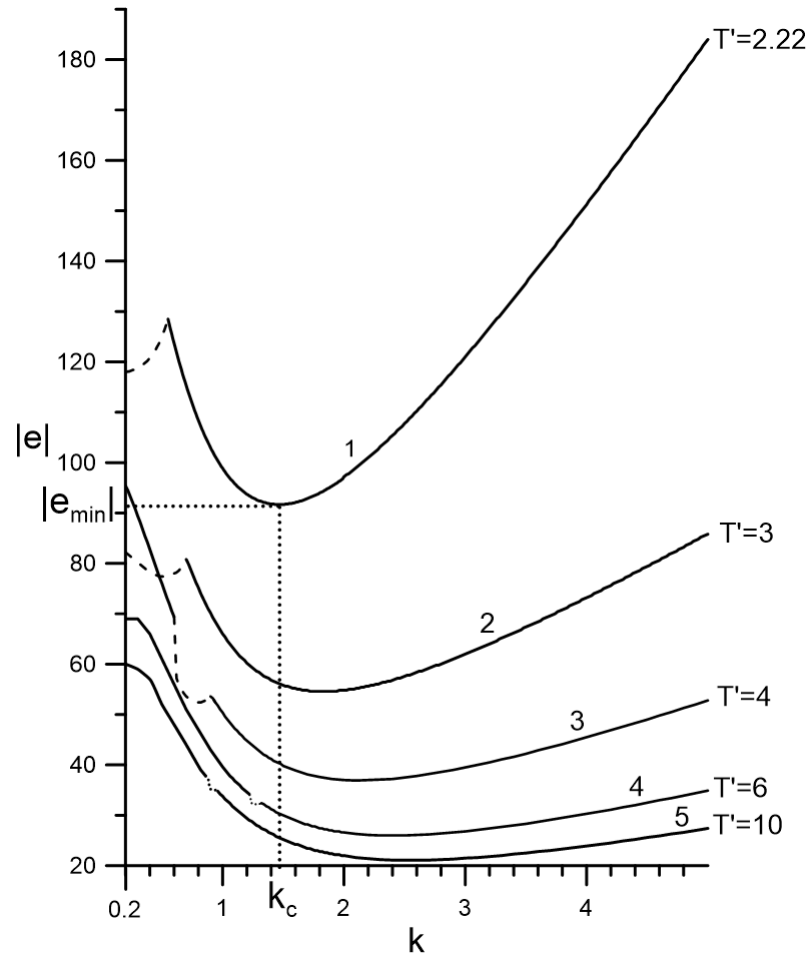


Рисунок 2.2 — Семейство нейтральных кривых в координатах волновое число k – модуль электрического параметра $|e|$ при различных периодах T' изменения внешнего электрического поля, сплошные линии отвечают квазипериодическим режимам, штриховые – синхронным

Аналогичным образом были получены значения эффективного электрического числа Релея $|e_{min}|$ и k_c для периодов внешнего электрического поля $T' \in [2,10]$ (рис. 2.3).

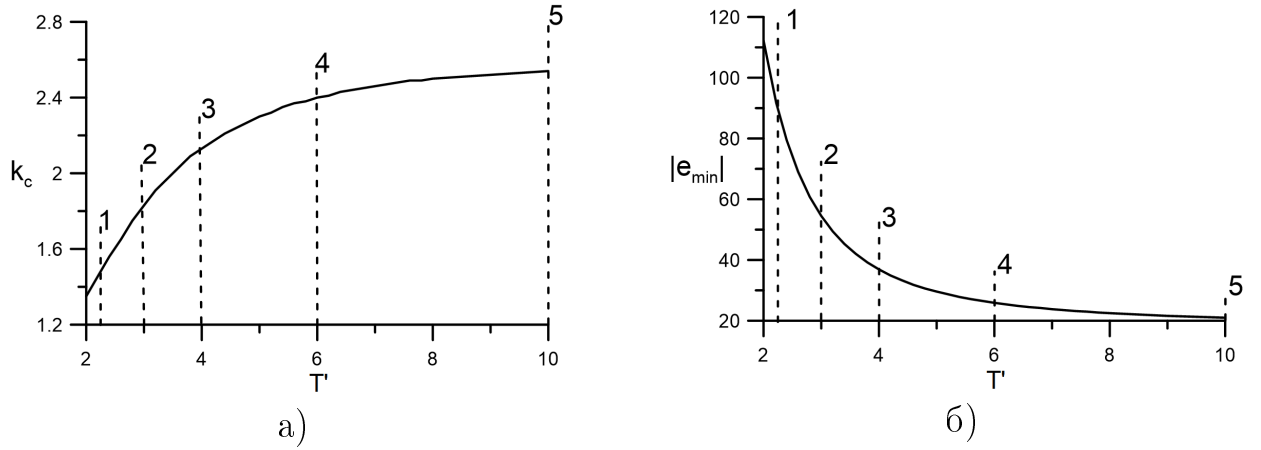


Рисунок 2.3 — Зависимости критического волнового числа k_c (а) и модуля минимального безразмерного электрического параметра $|e_{min}|$ (б) от периода изменения электрического поля T' , разрезы совпадают с кривыми рис. 2.2, нумерация сохранена

2.4 Режимы нелинейной конвекции при нагреве сверху

Чтобы описать интенсивность конвективных процессов, используем число Нуссельта (Nu) — параметр, равный среднему по времени теплотокую, приходящемуся на единицу горизонтальной границы конденсатора [42]. Число Нуссельта может быть выражено через амплитуду Z :

$$Nu = 1 - \frac{2}{t_{end}} \int_0^{t_{end}} Z(t) dt, \quad (2.16)$$

где t_{end} выбирается таким образом, чтобы в него укладывалось более сотни периодов колебаний системы.

Рассматривается случай нагрева сверху, при котором нормированное тепловое число Релея r принимает значение -1 . Волновые числа k брались из результатов применения линейной теории ($k = k_c$, где k_c отвечает глобальному минимуму нейтральной кривой для выбранного периода внешнего поля). Геометрические параметры b , g и d определялись исходя из выбранного волнового числа. Прочие параметры жидкости имеют значения $Pr = 400$, $Pr_e = 30$.

Исследование режимов электроконвекции проводилось следующим образом: система (2.9) численно интегрировалась при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [114]. Использовался метод продолжения по параметру, то есть на каждом шаге численного интегрирования в качестве начальных параметров использовались значения, полученные на предыдущем шаге. Таким образом определялись зависимости $Nu(|e|)$ для различных

периодов внешнего электрического поля T' , для каждого периода бралось соответствующее критическое значение волнового числа.

В ходе исследования были выделены несколько видов эволюции системы для различных периодов внешнего поля T' .

2.4.1 Период внешнего поля $T' = 2$

Зависимость безразмерного теплопотока от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 2.4.

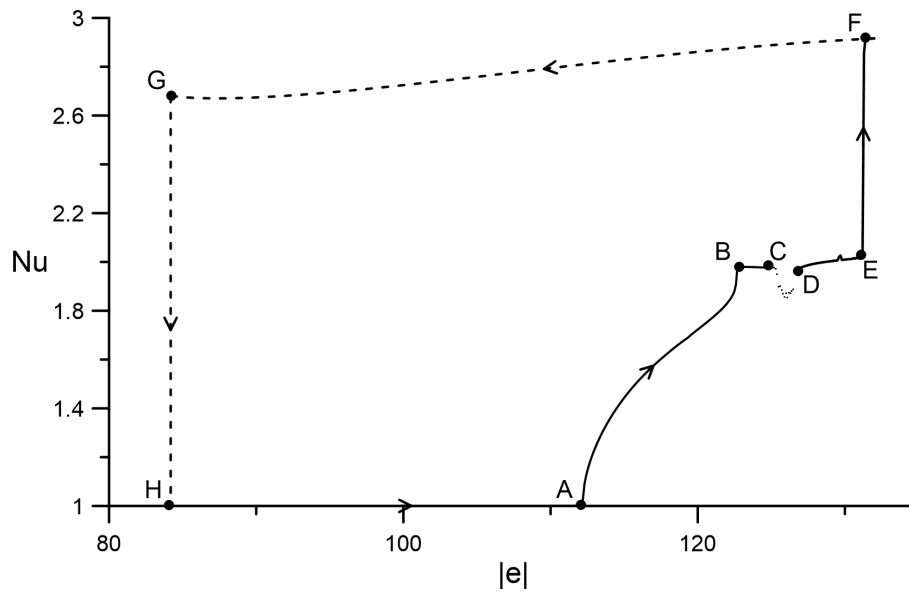


Рисунок 2.4 — Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 2$, сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, пунктирная — в сторону уменьшения $|e|$

При увеличении параметра $|e|$ из начальных условий, соответствующих малым возмущениям механического равновесия, конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний в точке A рис. 2.4 ($|e| = 112.2$) (Фурье-спектр колебаний амплитуды X содержит две или более частоты, несоизмеримых с внешней ($\nu = 0.5$, рис. 2.5a)). При дальнейшем росте параметра $|e|$ квазипериодические колебания переходят в точке B рис. 2.4 ($|e| = 122.7$) в специфический субгармонический режим колебаний: Фурье-спектр содержит внешнюю частоту, частоту, втрое меньшую внешней и их линейные комбинации (рис. 2.5г). На участке BC происходит каскад бифуркаций появления в спектре промежуточных частот (рис. 2.5г), переходящий в хаос в точке C рис. 2.4 ($|e| = 124.7$).

Хаос существует на участке CD рис. 2.4, хаотические колебания характеризуются непрерывным Фурье-спектром (рис. 2.5б). В точке D рис. 2.4 ($|e| = 126.6$) вновь возникает режим, характеризующийся частотой, которая втрое меньше частоты внешнего поля. При дальнейшем увеличении $|e|$ система колеблется таким образом до точки E рис. 2.4 ($|e| = 131.3$), где число Нуссельта резко возрастает и система начинает колебаться синхронно, в Фурье-спектре амплитуды X есть лишь те частоты, что кратны внешней (рис. 2.5в).

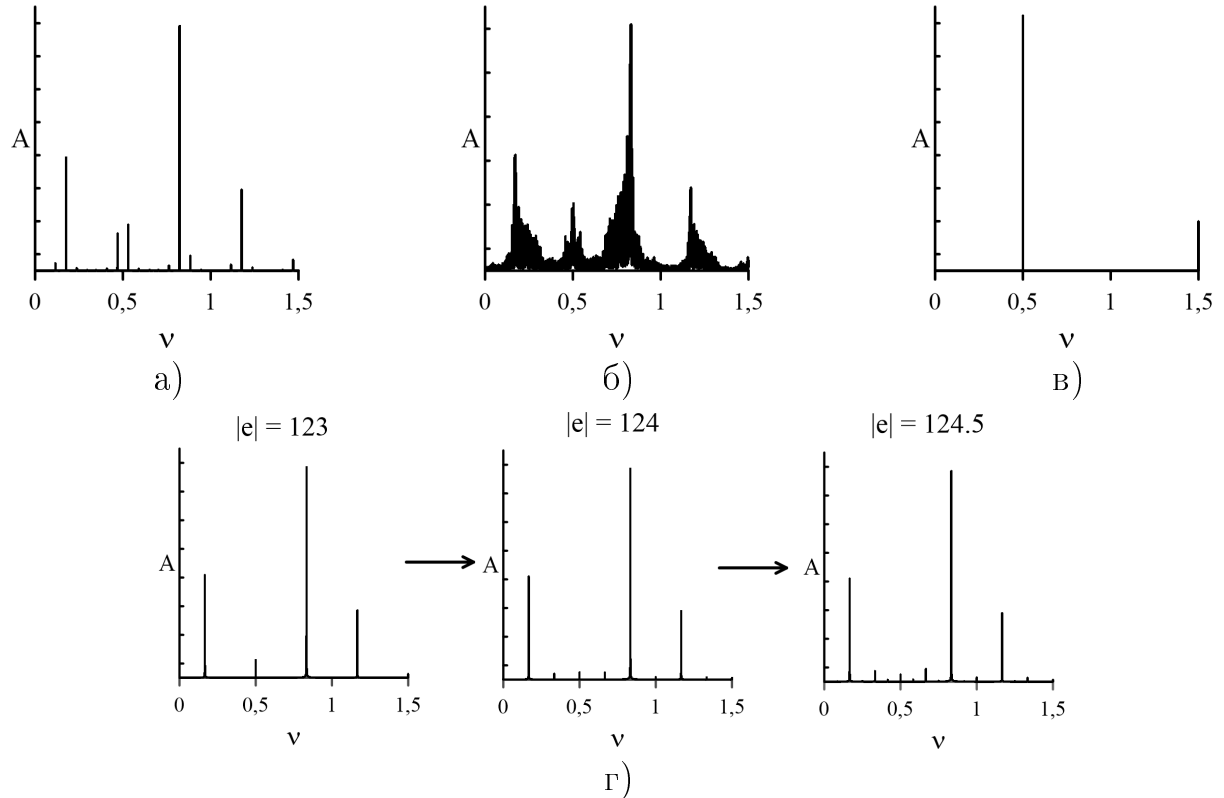


Рисунок 2.5 — Фурье-спектры колебаний амплитуды X при периоде воздействия $T' = 2$ для различных значений $|e|$. Нижняя ветвь рис. 2.4: а) $|e| = 120$, квазипериодический отклик; б) $|e| = 126$, хаотические колебания, г) участок ВН — каскад бифуркаций субгармонического отклика; верхняя ветвь рис. 2.4: в) $|e| = 131$, синхронный отклик.

Если, пользуясь методом продолжения по параметру, последовательно уменьшать параметр $|e|$ из значений, лежащих правее точки F рис. 2.4, переход системы от конвективного течения к механическому равновесию будет происходить иным образом (участок FG рис. 2.4), возвращаясь к механическому равновесию с резким скачком числа Нуссельта вниз в точке G рис. 2.4 ($|e| = 84$). Так, в системе реализуется гистерезис (петля HAFG рис. 2.4).

2.4.2 Период внешнего поля $T' = 2.22$

Зависимость безразмерного теплопотока от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 2.6.

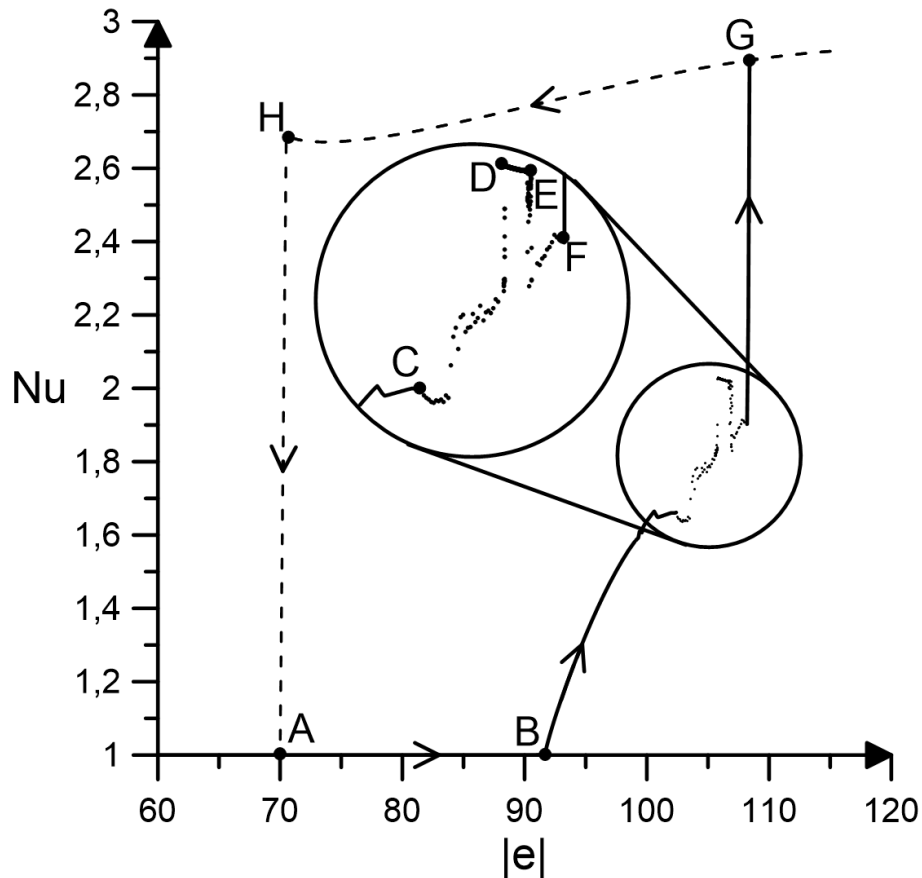


Рисунок 2.6 — Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 2.22$, сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, пунктирная — в сторону уменьшения $|e|$

Эволюция колебательных течений при периоде воздействия $T' = 2.22$, (линейная частота $\nu = 0.45$), представлена на рис. 2.6. В случае увеличения абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$, конвекция возникает из состояния механического равновесия в точке В рис. 2.6 ($|e| = 91.7$) в форме квазипериодических колебаний (Фурье-спектр амплитуды X содержит две или более несоизмеримых с внешней частоты, а все прочие частоты в спектре являются их линейными комбинациями). Квазипериодические колебания существуют вплоть до точки С рис. 2.6 ($|e| = 102.5$), в которой появляется хаос, то есть Фурье-спектр амплитуды X становится непрерывным. Таким образом реализуется сценарий перехода к хаосу через квазипериодичность. Хаос существует на отрезке CF рис. 2.6 за исключением области скачка теплопотока

DE рис. 2.6 (от $|e| = 105.7$ до $|e| = 106.6$), в котором Фурье-спектр амплитуды X содержит частоту, втрое меньшую частоты внешнего воздействия и кратные ей (окно периодичности). Безразмерный теплоток в точке F рис. 2.6 ($|e| = 108.2$) претерпевает резкий скачок, и система переходит к синхронным колебаниям в точке G рис. 2.6 (Фурье-спектр амплитуды X содержит только частоты кратные внешней).

Управляющий параметр может быть уменьшен из областей, лежащих правее точки G рис. 2.6. В таком случае эволюция системы изменится, то есть в системе наблюдается гистерезис. На верхней его ветви (отрезок GH рис. 2.6 от $|e| = 108.5$ до $|e| = 70.6$) наблюдаются синхронные колебания, а при дальнейшем уменьшении числа $|e|$ в точке H рис. 2.6 безразмерный теплоток претерпевает резкое уменьшение, и система возвращается к состоянию механического равновесия в точке A. Таким образом имеется сосуществование квазипериодических и синхронных электроконвективных колебаний, а также хаотических и синхронных колебаний.

Подобно всем предыдущим случаям, при рассматриваемом периоде внешнего поля реализуется гистерезис (петля HAEFG рис. 2.4). На участке FG рис. 2.4 система колеблется синхронно, в точке G рис. 2.4 ($|e| = 84$) безразмерный теплоток скачкообразно уменьшается и система возвращается к отсутствию конвекции.

2.4.3 Период внешнего поля $T' = 4$

Зависимость безразмерного теплоточка от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 2.7. При увеличении абсолютного значения параметра e конвекция возникает в точке A рис. 2.7 ($|e| = 36.9$) в виде квазипериодических колебаний. При дальнейшем увеличении $|e|$ эти колебания переходят в хаос через квазипериодичность в точке B рис. 2.7 ($|e| = 43.5$). Хаос существует на участке BC рис. 2.7 (в точке C $|e| = 43.78$). На участке CD рис. 2.7 реализуется область синхронизации, в которой наблюдаются субгармонические колебания. Затем, в точке D рис. 2.7 ($|e| = 43.9$) теплоток испытывает резкий скачок, и система переходит к синхронным колебаниям.

Аналогично со всеми предыдущими случаями, наблюдается гистерезис (петля ADEFG рис. 2.7), на верхней ветви которого система колеблется

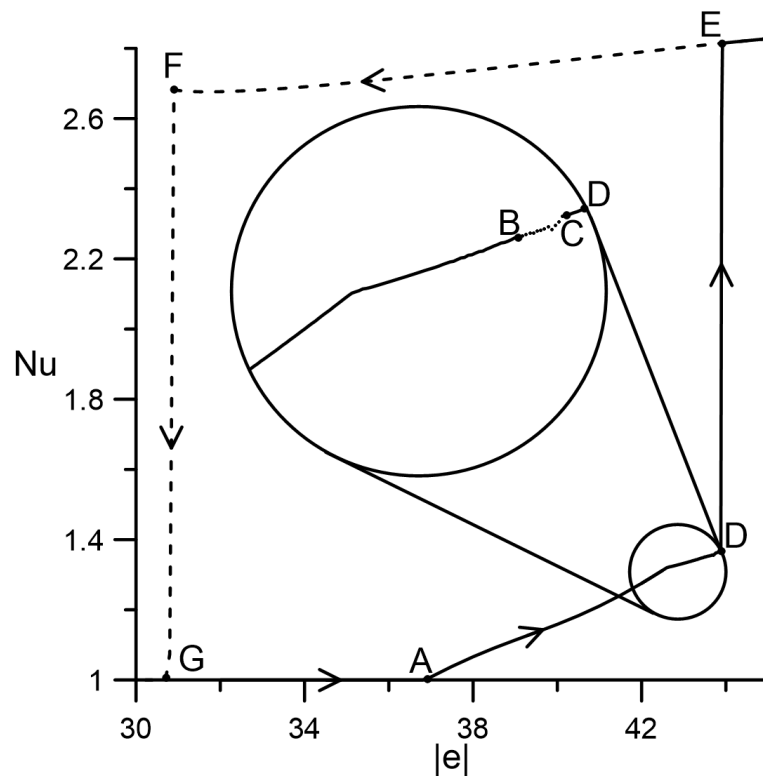


Рисунок 2.7 — Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 4$, сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, пунктирная — в сторону уменьшения $|e|$

синхронно (участок EF рис. 2.7), а при уменьшении модуля безразмерного электрического параметра в точке F рис. 2.7 ($|e| = 30.9$) в системе с резким уменьшением числа Нуссельта исчезает конвекция.

2.4.4 Период внешнего поля $T' = 6.2$

Зависимость безразмерного теплопотока от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 2.8.

Подобно всем предыдущим случаям, конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний в точке A рис. 2.8 ($|e| = 25.4$). При увеличении параметра $|e|$ в точке B рис. 2.8 ($|e| = 27.3$) происходит обратная бифуркация (число Нуссельта резко возрастает для определенного значения $|e|$), и система переходит в точке C рис. 2.8 к колебаниям, характеризующимся частотой, втрое меньшей частоты внешнего поля. Затем происходит серия удвоений периода, и в точке D рис. 2.8 ($|e| = 28.2$) Фурье-спектр переменной X становится непрерывным, то есть в системе наблюдается хаос, существующий вплоть до точки

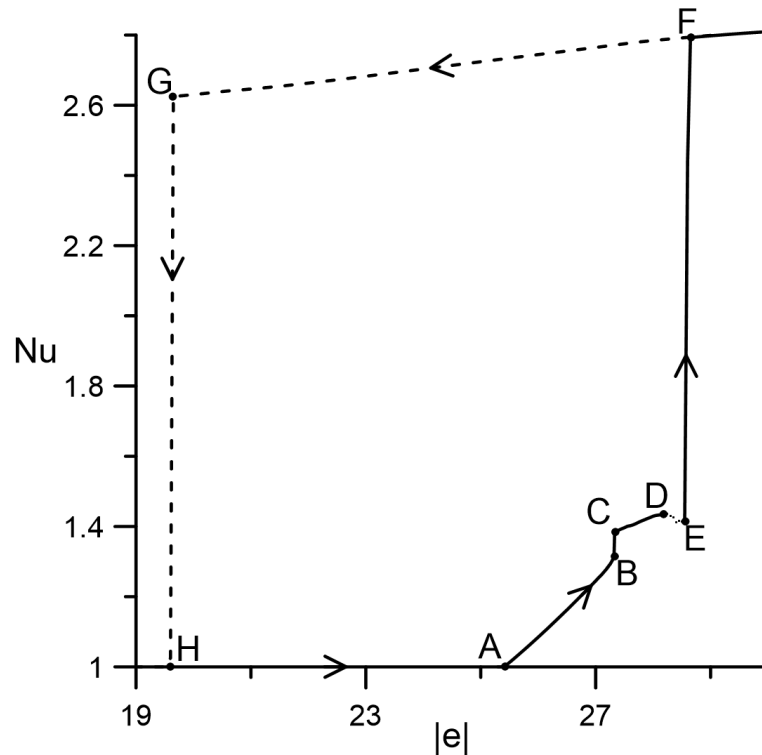


Рисунок 2.8 — Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 6.2$, сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, пунктирная — в сторону уменьшения $|e|$

Е рис. 2.8 ($|e| = 28.6$), где система с резким скачком числа Нуссельта переходит к синхронным колебаниям.

При этом периоде внешнего поля также наблюдается гистерезис (петля AEFGN рис. 2.8). На верхней ветви этой петли FG рис. 2.8 — синхронные колебания, при уменьшении параметра $|e|$ в точке G рис. 2.8 ($|e| = 19.6$) в системе резко исчезает конвекция.

На основании исследования зависимостей числа Нуссельта от безразмерного электрического параметра для различных периодов изменения внешнего электрического поля была построена карта режимов электроконвекции для диапазона периодов $[2; 10]$ (рис. 2.9).

2.5 Итоги главы

Исследован случай действия электрокондуктивного механизма возникновения конвекции и переменного электрического поля на слабопроводящую жидкость. Для этого случая проведен анализ линейной устойчивости, построено

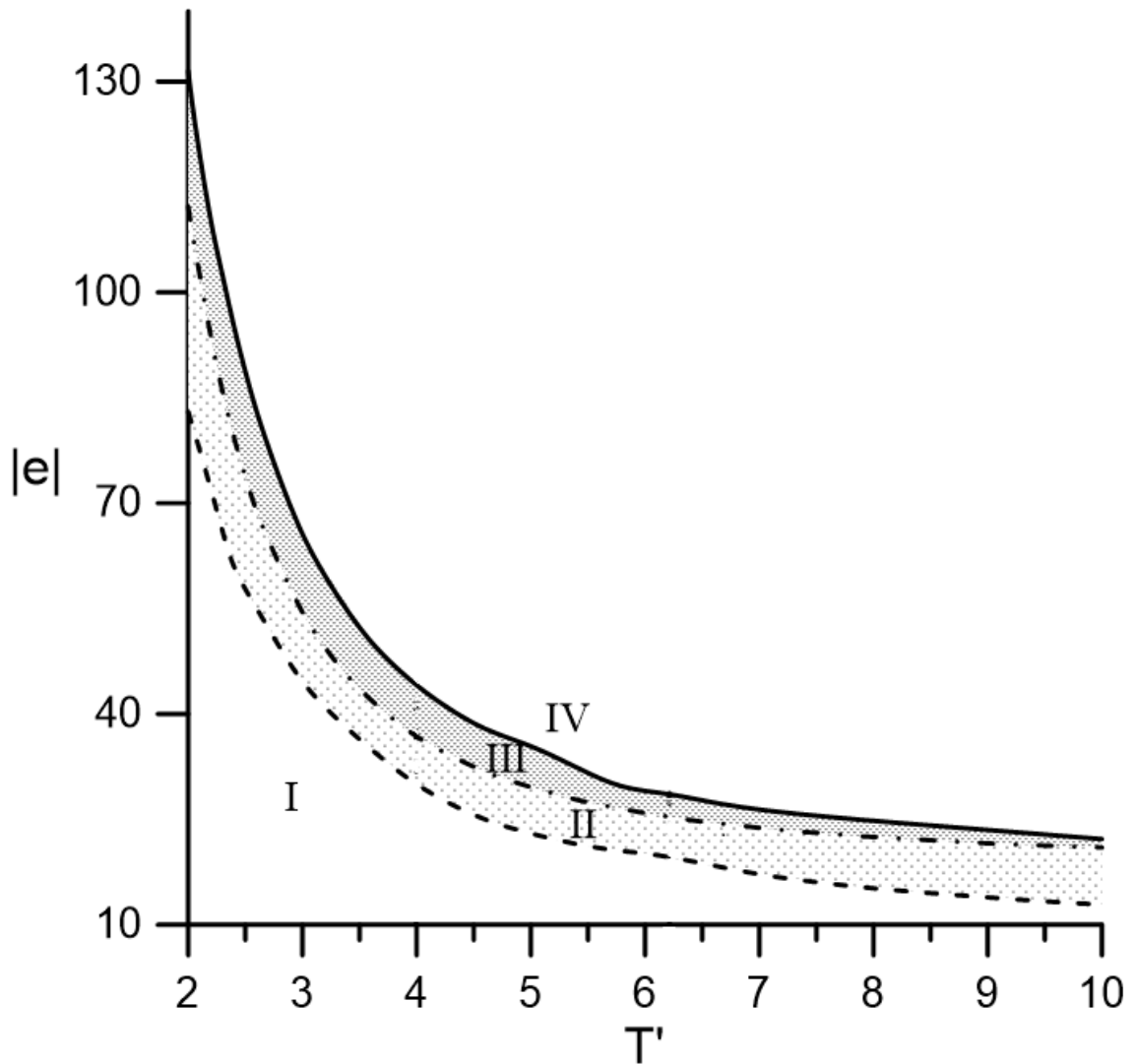


Рисунок 2.9 — Карта режимов движения жидкости на плоскости период изменения внешнего электрического поля T' – абсолютное значение электрического параметра $|e|$. I – область отсутствия конвекции; II – область сосуществования синхронных колебаний и отсутствия конвекции; III – область сосуществования синхронных колебаний и различных режимов: квазипериодических колебаний, субгармонических колебаний и хаоса; IV – область синхронных колебаний

семейство нейтральных кривых, определена зависимость критического волнового числа и критического значения управляющего параметра от периода внешнего поля. Показано, что в широком интервале частот конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний.

Построены зависимости безразмерного теплопотока от нормированного электрического числа Релея в нелинейной постановке. Определены сценарии перехода к хаосу – через квазипериодичность и путем последовательного удвоения периода. В системе обнаружено явление гистерезиса. Обнаружены области конкуренции синхронного режима колебаний с квазипериодическими колебаниями, периодическими режимами, хаосом и отсутствием течения.

При увеличении абсолютного значения параметра $|e|$ из области механического равновесия конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний, что полностью согласуется с линейным анализом устойчивости системы (штрихпунктирная линия рис. 2.9). Обнаружен новый сценарий эволюции течения, в котором рост электрического параметра приводит к последовательному появлению квазипериодических, хаотических, а затем синхронных колебаний. При уменьшении абсолютного значения параметра $|e|$ из области синхронных колебаний конвекция в системе исчезает с резким уменьшением безразмерного теплопотока (штриховая линия рис. 2.9).

Глава 3. Модуляция заряда на катоде

В данной главе проанализирована нелинейная эволюция течения слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при нагреве сверху и при модулированной инжекции заряда. Как и в [18; 62; 75] предполагается, что величина инжектируемого заряда пропорциональна напряженности электрического поля. Изучено влияние амплитуды и частоты модуляции на колебательную электроконвекцию. В качестве устойчивых решений найдены бегущие волны с модуляцией амплитуде и фазе, а также структуры колеблющиеся синхронно с внешним полем.

3.1 Постановка задачи

Рассматривается плоский бесконечный горизонтальный слой слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости толщиной d , помещенный в конденсатор с разностью потенциалов на обкладках V_0 и поле силы тяжести \vec{g} , сонаправленное с вертикальной осью z (рис. 3.1). На верхней обкладке конденсатора осуществляется униполярная инжекция зарядов того же знака, что и поверхность электрода (катода) [18; 115]. Горизонтальные электроды имеют разную температуру: $T_u = T(z = 0) = \Theta$, $T_l = T(z = d) = 0$, к слою приложена разность температур $\Delta T = T_l - T_u$. Жидкость нагревается сверху (под этим подразумевается, что градиент температуры противоположен по направлению ускорению свободного падения).

Жидкость обладает следующими параметрами: динамической вязкостью η , диэлектрической проницаемостью ε и плотностью при средней температуре ρ_0 , температуропроводностью χ , коэффициентом теплового расширения β_θ (предполагается линейная зависимость плотности от температуры $\rho = \rho_0(1 - \beta_\theta\theta)$, где ρ_0 – плотность жидкости при средней температуре, θ – отклонение температуры от среднего значения, $\beta_\theta > 0$ – коэффициент объемного расширения жидкости) и подвижностью зарядов K .

В силу малости коэффициента объемного расширения жидкости и малости конвективных слагаемых по сравнению с массовыми силами в уравнении

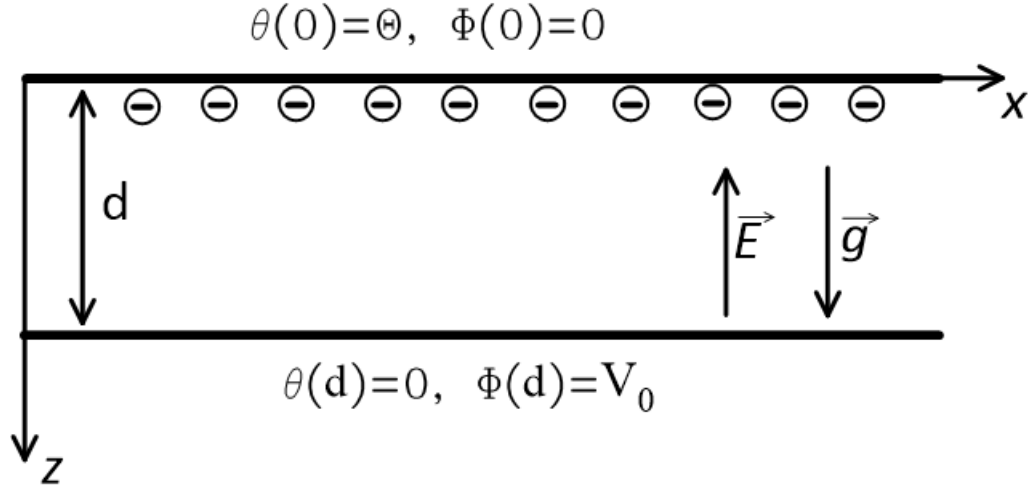


Рисунок 3.1 — Система координат, геометрия и граничные условия задачи о горизонтальном слое жидкости

динамики жидкости, неоднородность плотности можно учесть лишь в слагаемых связанных с этими силами (т.е. воспользоваться приближением Буссинеска [14]). Другим важным приближением является так называемое ЭГД-приближение, заключающееся в том, что ввиду малой электропроводности жидкости в ней токи зарядов настолько малы, что магнитные эффекты не проявляются [109]. Кроме того, для электропроводности жидкости, лежащей в пределах $10^{-9} - 10^{-11} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ и напряженности электрического поля $|E|^2 < 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ в уравнении теплопроводности можно пренебречь слагаемым, связанным с джоулевым нагревом [9].

Система дифференциальных уравнений, описывающих электроконвекцию, основана на уравнении Навье-Стокса, записанном в приближении Буссинеска, уравнении теплопроводности, законе сохранения заряда [14; 71], уравнении несжимаемости и уравнении Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + g \beta_\theta \theta \vec{e} - q \nabla \Phi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta = \chi \Delta \theta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) q = K(q^2 - \nabla \Phi \cdot \nabla q), \\ \text{div } \vec{v} = 0, \\ \Delta \Phi = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где \vec{v} , p , θ – поля скорости, давления и температуры соответственно, q – плотность заряда, присутствующего в жидкости, \vec{e} – единичный вектор, направленный вверх, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Система уравнений (3.1) обезразмеривается согласно следующим соотношениям: в качестве масштаба длины используется толщина слоя жидкости $[x] = d$, масштаб времени $[t] = d^2 \rho_0 / \eta$, скорости $[v] = \eta / \rho_0 d$, давления $[p] = \rho_0 \eta^2 / d^2$, разности потенциалов $[\Phi] = V_0$, плотности зарядов $[q] = \epsilon_0 \epsilon V_0 / d^2$, температуры $[\theta] = \Theta$, где Θ – разность температур на вертикальных границах жидкости.

Тогда система (3.1) в обезразмеренном виде представляется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \theta \vec{e} - \frac{\Gamma^2}{M^2} q \nabla \Phi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) q = \frac{\Gamma}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \cdot \nabla q), \\ \text{div } \vec{v} = 0, \\ \Delta \Phi = -q. \end{cases} \quad (3.2)$$

С учетом того, что обкладки конденсатора рассматриваются идеально проводящими с условием прилипания жидкости, а заряд на катоде пропорционален напряженности электрического поля, запишем следующие граничные условия на горизонтальных границах:

$$\begin{aligned} z = 0 : \vec{v} = 0, \theta = 1, \Phi = 0, q = -A \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z = 1 : \vec{v} = 0, \theta = 0, \Phi = 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\text{Ra} = g \rho_0 \beta \Delta T d^3 / \eta \chi$ – число Релея, $\text{Pr} = \eta / \rho_0 \chi$ – число Прандтля, $\Gamma = \epsilon_0 \epsilon V_0 / K \eta$ – безразмерный электрический параметр, пропорциональный среднему напряжению на обкладках конденсатора, $A = ad / \epsilon_0 \epsilon$ – параметр, характеризующий степень инжекции заряда (a – коэффициент, определяющий инжекцию), $M = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon / K^2 \rho_0}$ – параметр, характеризующий соотношение «гидродинамической» подвижности к «ионной» подвижности ионов. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость жидкости ϵ и коэффициент

подвижности ионов K не зависят от температуры и поля. Заметим, что при нагреве сверху $\Delta T = T_l - T_u = -\Theta < 0$ и, следовательно, $Ra < 0$.

Поскольку рассматривается малое значение параметра $A = 0.25$, то, как было показано ранее [18; 62; 63; 75], можно использовать безындукционное приближение, заключающееся в том, что перераспределение зарядов внутри конденсатора не приводит к изменению электрического поля, которое в каждый момент времени считается постоянным.

Проанализируем систему (3.2) вкуче с граничными условиями (3.3). В уравнении Навье-Стокса, описывающем динамику слабопроводящей жидкости, присутствуют слагаемые, отвечающие за внешние силы, действующие на элементарный объем жидкости. Такими силами выступают сила Кулона и сила плавучести (разность силы Архимеда и силы тяжести).

Сила Кулона, действующая на растворенный в жидкости отрицательный заряд, действует в направлении от верхней обкладки конденсатора (катода), то есть жидкость увлекается вместе с зарядом вниз. Если бы жидкость была изотермической, то при превышении напряжением на обкладках конденсатора некоторого критического значения произошло бы жесткое возбуждение конвективного движения [62; 63]. Однако, в рассматриваемой задаче жидкость, увлекаемая зарядом вниз, нагрета, и под действием силы плавучести возвращается обратно к катоду, что приводит к появлению растущих колебательных возмущений, в результате эволюции которых формируются надкритические волновые режимы. Вместе с тем, если бы силы Кулона отсутствовали или были незначительны по сравнению с силами плавучести, то при умеренном нагреве сверху жидкость оставалась бы устойчивой и движения бы в ней не возникало.

Таким образом, механизмом возникновения конвекции в жидкости можно считать инжекционный механизм, а термогравитационный механизм неустойчивости в данной постановке (нагрев сверху) сам по себе конвекцию не вызывает, но порождает колебательные режимы течения.

3.2 Метод решения

Рассмотрим случай, когда заряд, инжектируемый с катода, зависит от времени по гармоническому закону $q = -A \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \cdot (1 + \alpha \sin 2\pi vt)$, где α – ам-

плитуда и \mathbf{v} – линейная частота модуляции плотности заряда, $A = aV_0/\varepsilon_0\varepsilon$. Это может быть обеспечено колебанием потенциала на ионоселективной мембране [116], расположенной вблизи катода.

Рассмотрим случай двумерных течений, $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$. Для решения нелинейной системы (3.2) с граничными условиями (3.3) будет использоваться численный двухполевой метод. Для его реализации необходимо перейти от полей скорости \vec{v} и давления p к скалярным функции тока ψ и вихрю скорости φ , задаваемых согласно следующему соотношению:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot}\vec{v})_y, \quad (3.4)$$

можно заметить, что $\varphi = -\Delta\psi$.

Нелинейная система уравнений (3.2), записанная в переменных ψ , φ , θ , q и Φ с учетом безындукционного приближения предстает в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \Delta\varphi - \frac{\Gamma^2}{M^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z}\right) - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}}\Delta\theta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{M^2}(q^2 - \nabla\Phi\nabla q), \\ \Delta\psi = -\varphi, \end{cases} \quad (3.5)$$

с граничными условиями в случае твердых, идеально проводящих границ:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = -A \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0} \cdot (1 + \alpha \sin(2\pi vt)), \\ z = 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу безындукционного приближения будет рассматриваться следующая постановка: электрическое поле постоянно и зависит лишь от вертикальной координаты: $\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = (0; E_z(z))$. Распределение электрического поля E_z берется из решения уравнения сохранения заряда в стационарном случае в отсутствие конвекции [62]:

$$E_z = \frac{3A(2Az + 1)^{1/2}}{1 - (2A + 1)^{3/2}}. \quad (3.7)$$

Поскольку слой слабопроводящей жидкости считается бесконечным по горизонтали, применяются периодические граничные условия:

$$F(x + L, z, t) = F(x, z, t), \quad (3.8)$$

для любых x, z и t , где F – функции тока, вихря скорости, температуры, плотности заряда и потенциала, а $L = 2$ – пространственный период решений. Такое значение L выбирается в соответствии с волновым числом $k = \pi$, отвечающим критическому волновому числу возникновения конвекции при подогреве снизу в отсутствие электрических взаимодействий.

3.2.1 Особенности вычислительного метода

Система дифференциальных уравнений с граничными условиями, записанная для функций $\psi, \varphi, q, \theta, \Phi$ интегрируется численно, при помощи методов конечных разностей. Опишем используемую методику численных расчетов [62; 117].

Для аппроксимации уравнения Навье-Стокса системы (3.5) используются центрально-разностные схемы во всех слагаемых. После группировки по узловым значениям вихря скорости аппроксимационная схема принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + h_t \cdot & \left(\frac{1}{2h_x^2}(2 - \text{Re}_x)\varphi_{i,j+1}^n + \frac{1}{2h_x^2}(2 + \text{Re}_x)\varphi_{i,j-1}^n - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_z^2}\right)\varphi_{i,j}^n + \right. \\ & \left. \frac{1}{2h_z^2}(2 - \text{Re}_z)\varphi_{i+1,j}^n + \frac{1}{2h_z^2}(2 + \text{Re}_z)\varphi_{i-1,j}^n + \dots \right) + O(h_{x,z}^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где n – номер узла по времени, i – номер узла по вертикали, j – номер узла по горизонтали, Re_x и Re_z – сеточные числа Рейнольдса, вычисляемые, соответственно, по центрально-разностным формулам $\text{Re}_x = v_x \cdot h_x = \frac{1}{2}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j})$ и $\text{Re}_z = v_z \cdot h_z = \frac{1}{2}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})$. Аппроксимации слагаемых, связанных с массовыми силами в схеме (3.9), опущены. Обозначим коэффициенты при узловых значениях вихря скорости следующим образом: $C_1 = \frac{1}{2h_x^2}(2 - \text{Re}_x)$, $C_2 = \frac{1}{2h_x^2}(2 + \text{Re}_x)$, $C_3 = -\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_z^2}\right)$, $C_4 = \frac{1}{2h_z^2}(2 - \text{Re}_z)$, $C_5 = \frac{1}{2h_z^2}(2 + \text{Re}_z)$.

Заметим, что сумма коэффициентов $\sum_1^5 C_k = 0$. При этом алгебраическое условие абсолютной устойчивости [118] требует соблюдения следующих

соотношений:

$$\begin{aligned} C_1, C_2, C_4, C_5 &\geq 0, \\ 1 + h_t C_3 &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Соблюдения второго условия можно добиться, выбирая достаточно малый шаг по времени. Первое же условие, в том случае, если значения сеточных чисел Рейнольдса по модулю превышают 2, нарушается, и центрально-разностная схема становится неустойчивой. Для решения этой проблемы в [118] был предложен алгоритм гладкого переключения на условно-устойчивую схему при превышении сеточными числами Рейнольдса критического значения. Он заключается в следующем.

На каждом из временных шагов для всех узлов сетки, кроме граничных, вычисляются значения коэффициентов C_1, C_2, C_4 и C_5 . Затем, все отрицательные коэффициенты зануляются: $C_{1,2,4,5} = \max(C_{1,2,4,5}, 0)$. После этого вычисляется центральный коэффициент C_3 из условия равенства нулю суммы коэффициентов центрально-разностной схемы: $C_3 = -C_1 - C_2 - C_4 - C_5$. Далее среди коэффициентов $C_{1..5}$ для всех узлов сетки выбирается наибольший коэффициент C_{max} . Условие устойчивости получившейся схемы заключается в следующем соотношении: $t_h \leq 1/C_{max}$, шаг по времени для текущей итерации выбирается в соответствии с ним. После этого проводится остальная часть цикла вычисления значений функций на следующем временном шаге. При переключении на условно-устойчивую схему порядок аппроксимации понижается и составляет $O(h_t + h_{x,z})$.

Важно отметить, что численное моделирование системы (3.5) в текущей задаче показывает, что переключение со схемы с центральными разностями на условно-устойчивую схему, описанное выше, происходит только для высокоинтенсивных режимов конвекции.

Конвективные слагаемые в законе сохранения заряда и уравнении теплопроводности аппроксимировались при помощи направленных разностей против потока, зависящих от направления скорости в узле. Лапласиан в уравнении теплопроводности и электрический дрейф в законе сохранения заряда аппроксимировались при помощи центрально-разностных схем, так что порядок аппроксимации в этих уравнениях составляет $O(h_t + h_{x,z})$, где h_t, h_x и h_z соответственно шаги схемы по времени, горизонтальной и вертикальной координатам.

Уравнение Пуассона решается методом последовательной верхней релаксацией на каждом временном шаге. На горизонтальных границах для вихря скорости φ ставятся условия Тома [62; 117; 118].

Для численного моделирования используется шаг по пространству $h = 0.05$, в данном случае масштаб 41×21 . Шаг по времени выбирается в соответствии с критериями устойчивости конечноразностных схем и зависит от скорости движения жидкости. Вопрос о влиянии густоты сетки на результаты численного интегрирования обсуждается в разделе 4.5.

3.2.2 Методы анализа результатов

В главах 3 и 4 для анализа информации, получаемой в результате численного моделирования, используются следующие методы:

В каждый момент времени можно получить двумерные пространственные распределения функций системы (3.5) и (3.6), а также распределения отклонений функций системы от равновесных значений (в отсутствие движения жидкости).

Также можно получить временные зависимости максимального $\psi_{max}(t)$ и минимального $\psi_{min}(t)$ значения функции тока в ячейке и зависимости горизонтальной координаты $x(t)$ максимума функции тока (как правило, отвечающей центру одного из конвективных валов):

$$\psi_{max}(t) = \max[\psi_{i,j}(t_k)], \quad \psi_{min}(t) = \min[\psi_{i,j}(t_k)]. \quad (3.11)$$

В том случае, когда конвективная структура движется вдоль горизонтального направления, появляется возможность определить фазовую скорость этого движения путем конечноразностного дифференцирования горизонтальной координаты максимума функции тока:

$$v_{ph}(t) = \frac{\partial x_{\psi=\psi_{max}}}{\partial t} \approx \frac{x_{\psi=\psi_{max}}(t + \Delta t) - x_{\psi=\psi_{max}}(t)}{\Delta t}, \quad (3.12)$$

где Δt – шаг по времени конечноразностного дифференцирования.

Для описания локальных характеристик течений рассматривается зависимость функции тока от времени в конкретной точке ячейки $\psi_{loc}(x = 1/4, z = 1/2, t)$.

Для более подробного анализа колебаний жидкости используется процедура Фурье-анализа временных зависимостей, результатом которого является частотный спектр колебаний $A(\nu)$.

Наконец, пространственно-временное распределение полей функции тока в ряды Фурье по пространственным гармоникам $\hat{\psi}_n(t)$ (например, в горизонтальном направлении, в сечении, соответствующем середине высоты слоя $z = 1/2$):

$$\psi\left(x, z = \frac{1}{2}, t\right) = \hat{\psi}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\psi}_n(t) e^{iknx} \quad (3.13)$$

позволяет охарактеризовать особенности, связанные с нелинейным взаимодействием и пространственным ангармонизмом течений жидкости.

3.3 Волновые режимы конвекции при модуляции заряда на катоде

Для численного моделирования были использованы следующие значения безразмерных параметров: число Прандтля $Pr = 10$, соответствующее широкому классу слабопроводящих жидкостей [18; 71], число Релея $Ra = -2500$, отвечающее подогреву сверху, $A = 0.25$, $M = 14.14$ [8; 18; 62; 119], безразмерный электрический параметр $T = 6800$.

Эти значения параметров соответствуют устойчивому электроконвективному режиму бегущих волн в постоянном поле, который рассмотрен в [18]. В случае инжекции, зависящей от электрического поля на бифуркационной диаграмме (рис. 3.2) имеются режимы бегущих волн (TW), модулированных стоячих волн (MSW), стационарной конвекции (SOC). Значение электроконвективного параметра, пропорционального напряжению на обкладках конденсатора $T = 6800$, соответствует середине интервала существования бегущей волны.

Режим бегущих волн (TW) (рис. 3.3) характеризуется тем, что максимальное значение функции тока стремится к постоянному значению (рис. 3.3а), а конвективные валы, имеющие неизменную структуру и интенсивность конвекции (на одну ячейку приходится по два вала, закрученных в противоположные стороны (рис. 3.3г), движутся с постоянной скоростью вдоль горизонтального направления (рис. 3.3в).

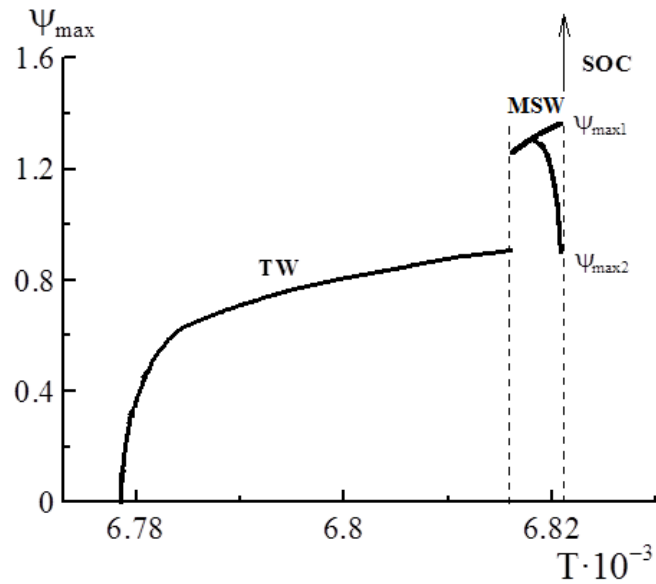


Рисунок 3.2 — Бифуркационная диаграмма решений в постоянном поле, в случае когда инжекция зависит от напряженности поля на катоде [18]

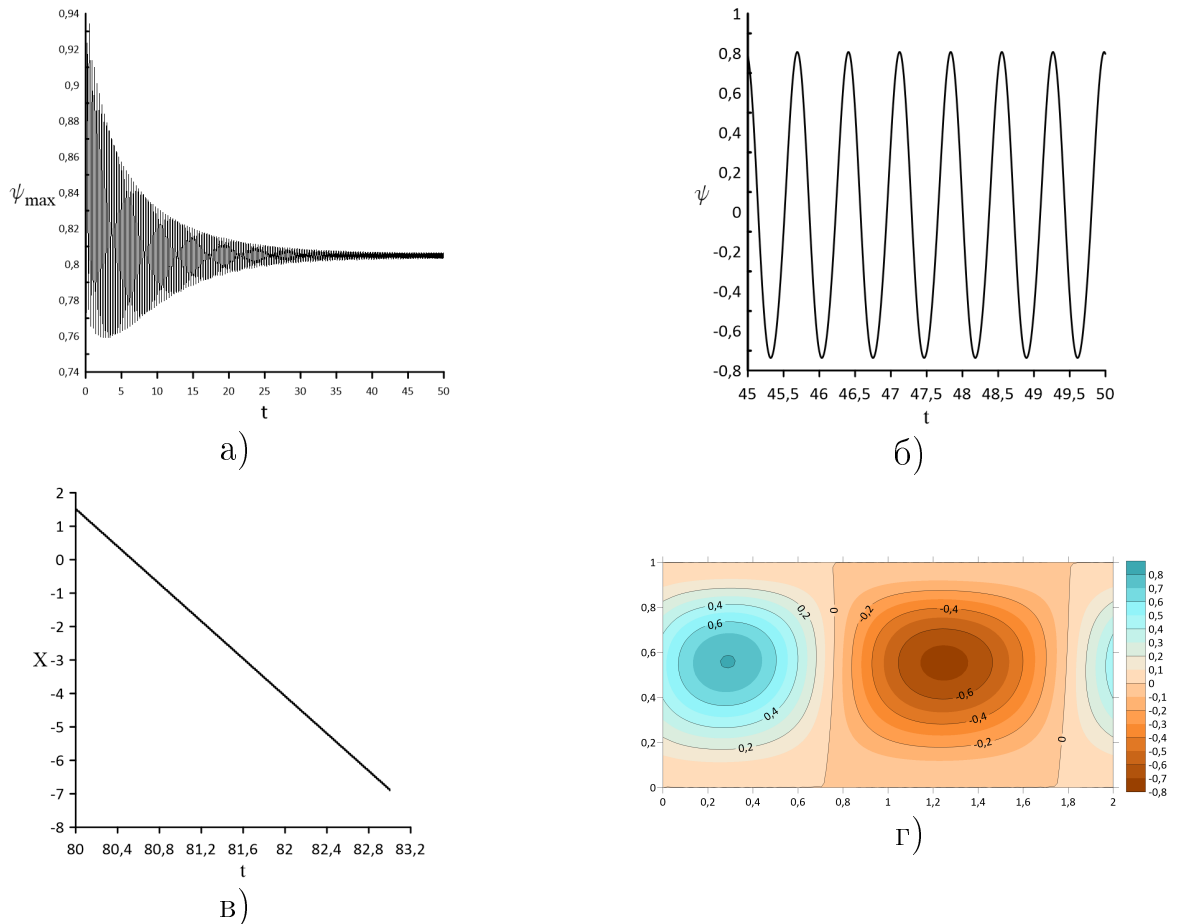


Рисунок 3.3 — Режим бегущей волны. Зависимость максимального значения функции тока от времени (а), зависимость функции тока в фиксированной точке от времени (б), зависимость x -координаты максимума функции тока от времени (в), поле функции тока в ячейке (г)

Для волны, представленной на рис. 3.3 движение происходит справа налево. Необходимо отметить, что в связи с симметрией задачи возможно существование волны, распространяющейся в противоположном направлении.

Еще одним важным свойством бегущих волн, наблюдаемых в данной задаче, является тот факт, что несмотря на движение конвективной структуры вдоль горизонтального направления, в самой жидкости течение вдоль горизонтали отсутствует, что следует из граничных условий для функции тока:

$$\int_0^1 v_x dz = - \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = - \int_0^1 d\psi = \psi \Big|_{z=0} - \psi \Big|_{z=1} = 0. \quad (3.14)$$

Для режима бегущих волн можно определить собственную частоту колебаний различных характеристик жидкости, связанную с движением валов вдоль горизонтального направления с $v_{ph} = 2.8$ (вычислено по формуле (3.12)). В данном случае это линейная частота колебаний функции тока в фиксированной точке (рис. 3.36), и она равняется $\nu_0 = 1.4$, что позволяет посчитать фазовую скорость иначе: $v_{ph} = \omega/k$. При $\nu_0 = 1.4$ этот способ также дает значение $v_{ph} = 2.8$.

Значение безразмерной частоты $\nu = 1.4$ соответствует частоте модуляции $f = 2.1$ Гц в случае этанола с кинематической вязкостью $1.5 \cdot 10^{-6}$ м²/с в конденсаторе с расстоянием между пластинами 1 мм.

При рассмотрении малоамплитудной модуляции ($\alpha = 0.05$) инъекции на верхней обкладке конденсатора варьировалась частота модуляции ν . При этом можно выделить три разных случая.

3.3.1 Бегущая волна, сильно модулированная по амплитуде, и слабо по фазе

При частоте модуляции, вдвое меньшей, чем собственная частота, ($\nu = \nu_0/2 = 0.7$) реализуется режим модулированных бегущих волн. Он отличается от режима бегущих волн тем, что интенсивность конвекции в валах теперь периодически меняется со временем с частотой, равной частоте модуляции поля, что можно наблюдать по зависимостям максимального и минимального значения функции тока от времени в ячейке (рис. 3.4а). Валы все также движутся вдоль горизонтального направления с практически постоянной скоростью ($v_{ph} \approx 2.8$), равной скорости в отсутствие модуляции инъекции. Таким образом, в жидкости реализуется бегущая волна, сильно модулированная по амплитуде, и очень слабо по фазе.

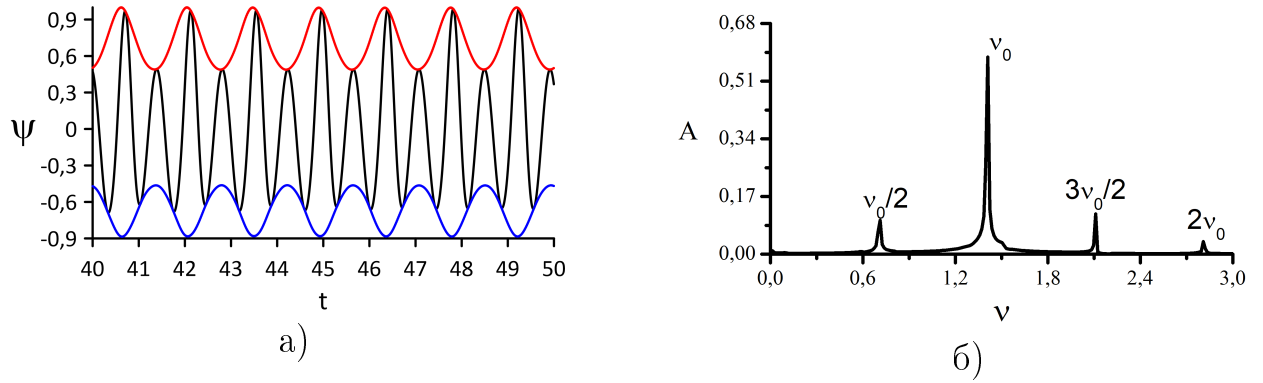


Рисунок 3.4 — Установившийся режим модулированной бегущей волны при частоте модуляции $\nu = \nu_0/2 = 0.7$. Зависимости максимального и минимального значения функции тока от времени (красным и синим цветом), а также зависимость от времени функции тока в фиксированной точке ячейки (черным цветом) (а), Фурье-спектр функции тока в фиксированной точке (б)

При этой частоте поля в фиксированной точке наблюдаются колебания с частотами $\nu/\nu_0 = 0.5 \cdot n, n = 1, 2, 3\dots$ (рис. 3.4а), что подтверждается Фурье-спектром временной зависимости функции тока в фиксированной точке (рис. 3.4б).

При частоте модуляции, несоизмеримой с собственной частотой, ($\nu = 1$) также наблюдается режим модулированных бегущих волн, отличающийся от предыдущего тем, что колебания функции тока в заданной точке теперь квазипериодичны: в спектре присутствуют частоты, являющиеся линейными комбинациями собственной частоты ν_0 и частоты модуляции ν (рис. 3.5).

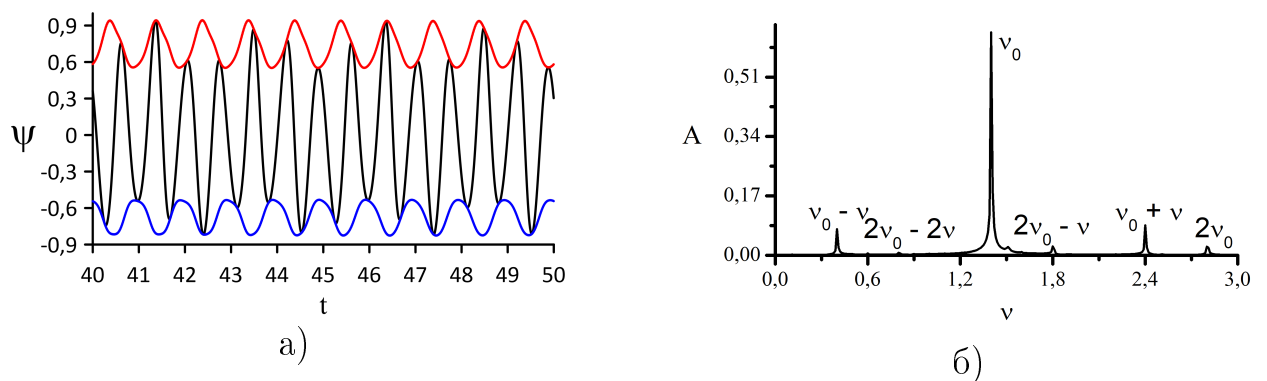


Рисунок 3.5 — Режим модулированной бегущей волны при частоте модуляции $\nu = 1$. Зависимости максимального и минимального значения функции тока от времени (красным и синим цветом), а также зависимость функции тока в фиксированной точке ячейки (черным цветом) (а), Фурье-спектр функции тока в фиксированной точке (б)

3.3.2 Режим волны, модулированной по фазе и амплитуде

При частоте модуляции, равной собственной частоте, ($\nu = \nu_0 = 1.4$) анализ линейной устойчивости предсказывает синхронную реакцию системы на внешние воздействия [101]. В нелинейном случае в надкритической области могут возникать более сложные решения, такие как квазипериодические и хаотические колебания. В нашем случае в спектре Фурье квазипериодических колебаний функции тока в фиксированной точке есть две основные частоты: $\nu_1 = 1.367$ и $\nu_2 = 1.442$, а режим модулированной бегущей волны претерпевает серьезные изменения:

Зависимости максимального значения функции тока и фазовой скорости движения максимума функции тока в рамках одного периода колебаний заряда на электроде представлены на рисунке 3.6а. В данном режиме в зависимости максимального значения функции тока от времени появляются дополнительные экстремумы (сама зависимость перестает быть гармонической), скорость движения валов вдоль оси x уже не является постоянной: движение периодически ускоряется и замедляется.

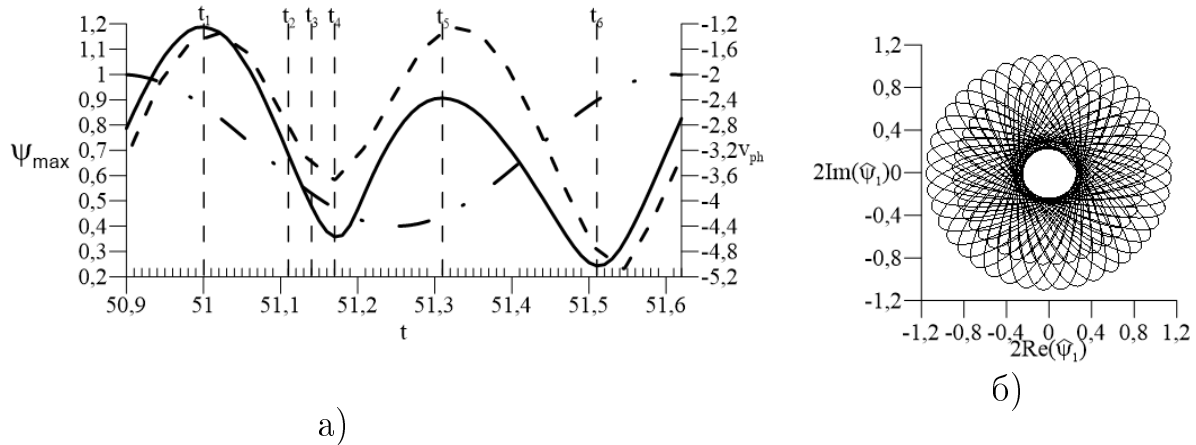


Рисунок 3.6 — а) — Зависимости максимального значения функции тока (сплошной линией, левая вертикальная ось), скорости изменения x -координаты максимального значения функции тока (штриховой линией, правая вертикальная ось) и временной модуляции заряда (штрих-пунктирная линия, без соблюдения вертикального масштаба) в случае, когда частота модуляции ν и собственная частота ν_0 совпадают; б) — фазовые траектории первой пространственной гармоники $\hat{\psi}(t)$

Как можно видеть на рисунке 3.6а, уменьшение интенсивности конвекции в ячейке (нахождение в областях минимумов максимального значения функции тока, моменты времени t_4 и t_6 рис. 3.6а) соответствует увеличению

скорости движения бегущей волны (достижение модулем горизонтальной компоненты фазовой скорости наибольших значений), при этом фазовая скорость и интенсивность конвекции изменяются практически синфазно. Однако, обе эти зависимости сдвинуты относительно модуляции заряда на катоде, хотя период модуляции заряда совпадает с периодом изменения картины движения жидкости внутри ячейки.

Помимо ангармонического изменения интенсивности конвекции и горизонтальной скорости движения жидкости ячейке, наблюдается периодическая перестройка конвективных структур (рис. 3.7).

В те моменты, когда жидкость находится в состояниях, отвечающих окрестностям локального и глобального максимума интенсивности конвекции, а соответственно и наименьшей скорости горизонтального движения среды (моменты времени t_1 и t_5 рис. 3.6а и распределения а) и е) рис. 3.7), в системе наблюдается два конвективных вала приблизительно равной интенсивности, закрученных в противоположные стороны. Но, по мере уменьшения интенсивности конвекции и увеличения скорости движения волны, конвективная структура изменяет свою форму.

Как видно из серии разрезов, соответствующих моментам времени $t_2 - t_4$ рис. 3.6а, сначала в распределении функции тока появляется дополнительный минимум (распределения б) и с) рис. 3.7), затем он исчезает и появляется дополнительный максимум (распределение д) рис. 3.7), который также в дальнейшем исчезает, и система возвращается в состояние с двумя симметричными валами (распределение е) рис. 3.7). Такое поведение функции тока и соответствующее ему отклонение заряда объясняются наличием более высоких пространственных гармоник. Отметим, что размытие валов наблюдается незадолго после того момента, когда в результате модуляции заряда на катоде отклонение зарядов от равновесного значения Δq меняет свой знак с отрицательного на положительный, а значит это отклонение минимально, что видно по соответствующим распределениям (правый столбец рис. 3.7), и, во-вторых, размытие валов наблюдается в области локального минимума интенсивности конвекции.

В области же глобального минимума интенсивности конвекции, когда скорость горизонтального движения жидкости достигает наибольшего значения (отличаясь от минимального примерно в пять раз), наблюдается не размывание валов, а «проскок» конвективной структуры, когда два противоположно

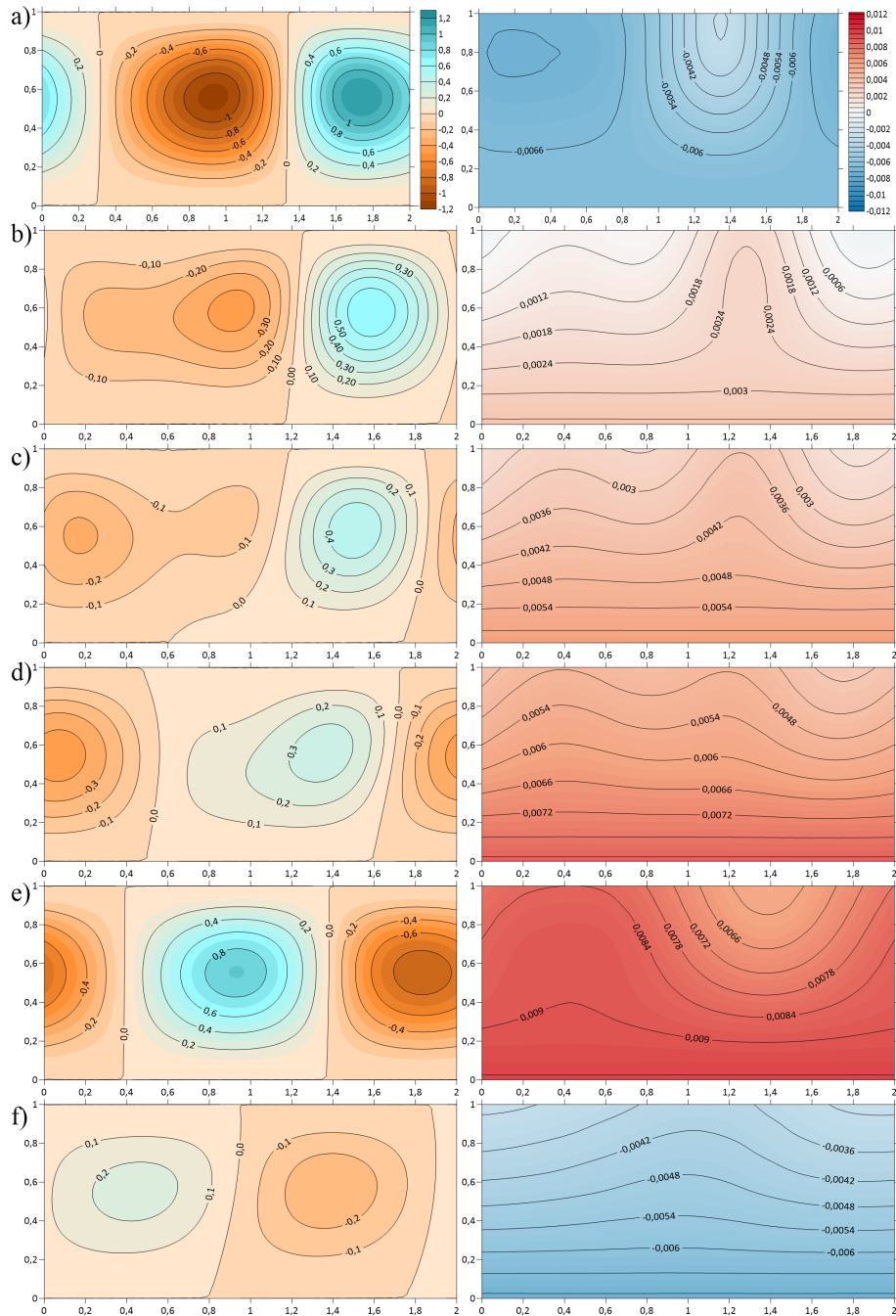


Рисунок 3.7 — Распределения функции тока и отклонения плотности заряда от равновесия $\Delta q(x, z, t) = q(x, z, t) - q_{cond}(z)$ для различных моментов времени в режиме амплитудно- и фазово- модулированной волны, порядок разрезов рис. 3.6а 1-6 совпадает с порядком распределений а-ф

вращающихся конвективных вала, сохраняя свою форму, быстро меняются местами (разрез f) рис. 3.7), завершая цикл колебаний.

Таким образом, суммируя вышесказанное, движение жидкости в ячейке в режиме амплитудно- и фазово- модулированной волны можно описать следующим образом: когда интенсивность конвекции максимальна, жидкость представляет собой два конвективных вала, закрученных в противоположные

стороны. По мере изменения интенсивности конвекции жидкости в сторону локального максимума, при котором валы меняются местами, интенсивность проходит через область локального минимума, и смена валов местами происходит через их размытие. И, наконец, для возвращения в исходное состояние, интенсивность конвекции жидкости проходит через область глобального минимума, в окрестности которого конвективная структура проскакивает вдоль горизонтального направления с многократно возрастающей скоростью. На анимации такое перемещение бегущей волны напоминает прихрамывание.

Чтобы подробно объяснить пространственно-временную сложность данного режима, рассмотренную выше, также использовалось пространственное разложение в ряды Фурье на середине высоты слоя $z = 1/2$. В отличие от поля заряда, горизонтальное изменение функции тока в значительной степени гармоническое, так что первая мода Фурье $\hat{\psi}_1(t)$ в представлении (рис. 3.66) характеризует поведение течения. Траектория $\hat{\psi}_1(t)$ является проекцией пространственно-временной динамики течения в виде бегущей волны в реальном пространстве в пространство Фурье. Это дополняет картину динамики функции тока в фиксированной точке ячейки в процессе распространения бегущей волны, модулированной по фазе и амплитуде. На рис. 3.66 временная эволюция комплексной моды $\hat{\psi}_1(t)$ представлена в плоскости, охватывающей ее действительную и мнимую части. Наблюдается временной интервал из 37 периодов модуляции. Движение $\hat{\psi}_1(t)$ ограничено двумя окружностями. За это время $\hat{\psi}_1(t)$ перемещается 37 раз от внутренней окружности с радиусом $\hat{\psi}_1(t) = 0.24$ к внешней с радиусом $\hat{\psi}_2(t) = 1.19$ в результате амплитудной модуляции.

3.3.3 Режим модулированной электроконвекции

В том случае, когда частота модуляции заряда в два раза больше, чем собственная частота колебаний ($\nu = 2\nu_0$), интенсивность конвекции в ячейке многократно возрастает по сравнению с режимом бегущих волн, а движение жидкости вдоль горизонтальной оси прекращается (рис. 3.8). Решение имеет зеркальную симметрию, поля заряда (рис. 3.8б) и температуры (рис. 3.8в) характеризуются сильным пространственным ангармонизмом. Такой режим очень схож с режимом стационарной конвекции SOC, наблюдавшимся в системе в работе [18], за тем исключением, что при отсутствии временной модуляции заряда

в режиме SOC в системе отсутствует изменение интенсивности конвекции, а при наличии временной модуляции конвекция также слабо модулирована, периодически меняется максимальное значение функции тока в ячейке с удвоенной собственной частотой (рис. 3.9), являя собой режим модулированной электроконвекции (МЕС).

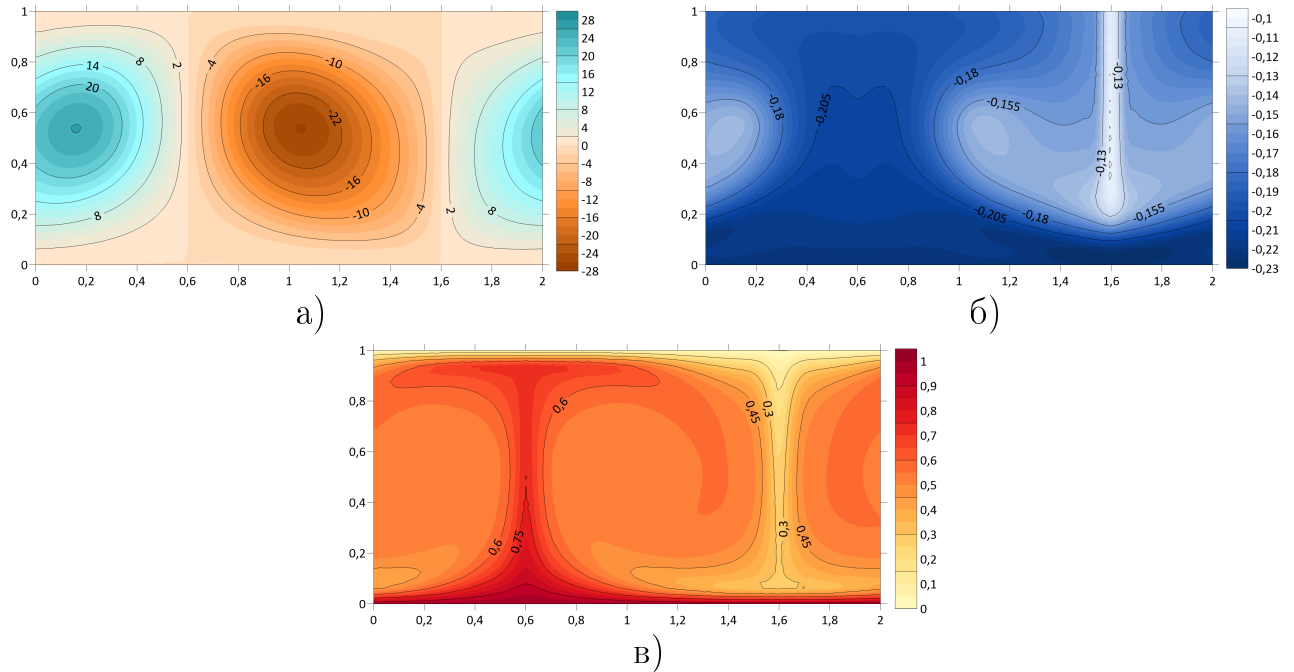


Рисунок 3.8 — Распределения функции тока (а), заряда (б) и температуры (в) при частоте модуляции, вдвое большей собственной частоты, режим модулированной электроконвекции МЕС

Как показывает бифуркационная диаграмма рис. 3.2, при отсутствии модуляции заряда на катоде для достижения режима SOC необходимо увеличивать параметр T , минуя область существования бегущих волн. В данной же работе было обнаружено, что для перехода системы в режим МЕС достаточно увеличивать частоту модуляции заряда, находясь в области бегущих волн. В связи с этим дополнительно была проварьирована амплитуда модуляции заряда на катоде (рис. 3.9) и выяснено, что переход в режим МЕС происходит при амплитудах $\alpha \geq 0.01$. При меньших амплитудах в системе наблюдается режим модулированной бегущей волны.

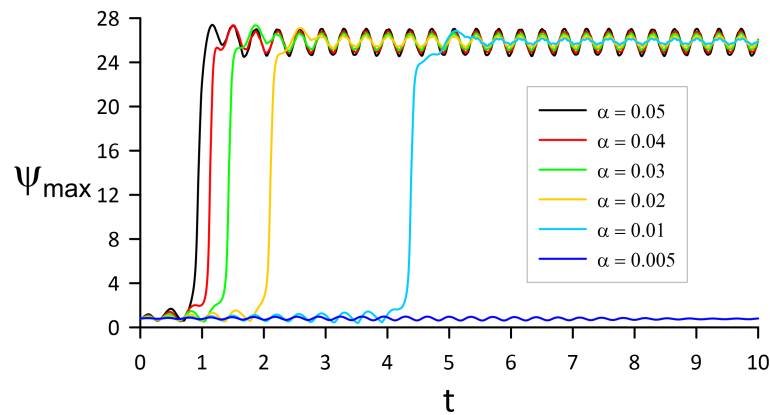


Рисунок 3.9 — Зависимости максимального значения функции тока от времени при частоте модуляции, вдвое большей собственной частоты, для различных значений амплитуды модуляции

3.4 Итоги главы

Проведено численное моделирование задачи с использованием разностных схем об электроконвекции слабопроводящей жидкости в плоском конденсаторе при наличии модуляции заряда на катоде и нагрева сверху. Построены зависимости максимального значения функции тока, функции тока в заданной точке слоя от времени и распределения полей функции тока для различных частот модуляции инжекции.

Обнаружены:

1. режим амплитудно модулированной бегущей волны, квазипериодические колебания функции тока в заданной точке слоя;
2. режим амплитудно- и фазовомодулированной волны, при котором периодически изменяются фазовая скорость бегущей волны, интенсивность конвекции и структура конвективных валов; кроме того, в рамках этого режима соседние конвективные валы ведут себя несимметрично;
3. режим модулированной стационарной конвекции, который формируется при воздействии на режим бегущей волны на частотах модуляции равных удвоенной собственной частоте бегущей волны.

Таким образом, с практической точки зрения это означает, что можно получить в конденсаторе режим высокоинтенсивной конвекции, затрачивая на это меньше энергии, например, установив ионно-селективную мембрану вблизи катода и подавая на нее слабомодулированный сигнал.

Глава 4. Автономная инжекция в постоянном и переменном поле

В данной главе элетроконвекция нагреваемой сверху слабопроводящей жидкости будет рассмотрена в рамках другого подхода, основанного на следующих предположениях [108; 120; 121]:

Во-первых, для описания электрических взаимодействий будет использоваться полная постановка, то есть будет учтено перераспределение электрического поля, возникающее за счет конвективного перераспределения зарядов. Таким образом, уравнения системы (3.5) должны быть дополнены уравнением Пуассона для плотности зарядов и потенциала, которое будет решаться методом конечной верхней релаксации, как и уравнение связи между вихрем скорости и функцией тока.

Во-вторых, инжекция заряда на катоде будет считаться автономной, то есть количество инжектируемого с катода заряда постоянно.

Для двумерных течений система уравнений в терминах функции тока и завихренности запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta \varphi + \frac{T^2}{M^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \nabla q), \\ \varphi = -\Delta \psi, \\ q = -\Delta \Phi, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

с граничными условиями в случае твердых, идеально проводящих границ:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = -C, \\ z = 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $C = q_0 V_0 / \varepsilon_0 \varepsilon$ – параметр, характеризующий степень инжекции заряда. Безразмерная инжекция C представляет собой отношение инжектируемого заряда на единицу площади qd к поверхностному заряду, который присутствовал бы на электродах из-за приложенного внешнего поля.

Такая постановка достаточно сильно отличается от постановки, используемой в [18], так что данная глава диссертации будет посвящена исчерпывающему анализу поведения системы, описываемой уравнениями (4.1) и (4.2), как в постоянном, так и в переменном электрическом поле.

4.1 Основное состояние – механическое равновесие

Важной вспомогательной целью при анализе задачи об инжекционной электрокнонекции в полной постановке является рассмотрение случая конденсатора, в котором отсутствует движение жидкости, а значит и конвективное движение заряда, но при этом остается перераспределение его с учетом электростатических взаимодействий. Решение такой задачи в дальнейшем продемонстрирует, каким образом конвекция изменяет распределение заряда и потенциала внутри конденсатора.

Рассмотрим закон сохранения заряда, записанный в общей системе уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)q = \frac{T}{M^2}(q^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla q). \quad (4.3)$$

Задача стационарная, в ней отсутствует конвекция, а также в силу симметричности условий вдоль горизонтальной оси, переменные в ней могут зависеть лишь от координаты z . Таким образом, путем сокращений и преобразований, перейдем к следующему уравнению:

$$q_0^2 - \Phi'_0 \cdot q'_0 = 0, \quad (4.4)$$

штрихом обозначается производная по координате z .

Граничными условиями выступают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_0(0) &= -C, \\ \Phi_0(0) &= 0, \\ \Phi_0(1) &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для сокращения обозначений в уравнении (4.4) опустим индексы:

$$q^2 - q'\Phi' = 0 \quad (4.6)$$

и учитывая связь между напряженностью электрического поля E , электрическим потенциалом и плотностью заряда, перейдем к выражению с одной

функцией:

$$(E')^2 + EE'' = 0, \quad (4.7)$$

Заметим следующее: $(E^2)'' = (2EE')' = 2(E')^2 + 2EE''$, значит $EE'' = \frac{(E^2)''}{2} - (E')^2$. При подстановке данного выражения в (4.7), получим простейшее дифференциальное уравнение:

$$(E^2)'' = 0. \quad (4.8)$$

Дважды интегрируя его, будем иметь $E^2 = C_1z + C_2$, или

$$E = \sqrt{C_1z + C_2}, \quad (4.9)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (4.5). Здесь значение E считается положительно определенным в силу граничных условий.

Перед тем, как перейти к нахождению данных коэффициентов, переопределим граничное условие для заряда следующим образом: $q(0) = \bar{C}\sqrt{C_2}$, где $\bar{C} = \frac{C}{\sqrt{C_2}}$ – промежуточный коэффициент, нужный для удобства вывода аналитических решений. Без данной замены нахождение аналитических формул заметно усложнено.

Поскольку $q = E'$, то

$$q = \frac{1}{2} \frac{C_1}{\sqrt{C_1z + C_2}}, \quad (4.10)$$

подставим данное выражение в граничное условие для заряда:

$$q(0) = \frac{1}{2} \frac{C_1}{\sqrt{C_2}} = \bar{C}\sqrt{C_2}, \quad (4.11)$$

тогда

$$C_1 = 2\bar{C}C_2 \quad (4.12)$$

и

$$E = \sqrt{C_2}\sqrt{2\bar{C}z + 1}. \quad (4.13)$$

Общеизвестно, что $\Phi = -\int Edz$, значит

$$\Phi = -\frac{\sqrt{C_2}}{3\bar{C}}(2\bar{C}z + 1)^{\frac{3}{2}} + C_3, \quad (4.14)$$

где C_3 – еще одна требующая определения константа интегрирования. Подставив выражение в граничное условие для потенциала $\Phi(0) = 0$, найдем $C_3 = \frac{\sqrt{C_2}}{3C}$, и тогда

$$\Phi = \frac{\sqrt{C_2}}{3C} (1 - (2\bar{C}z + 1)^{\frac{3}{2}}). \quad (4.15)$$

Остается подставить данное выражение в последнее граничное условие для потенциала $\Phi(1) = 1$, чтобы определить выражение для коэффициента C_2 . Оно получается следующим:

$$\sqrt{C_2} = \frac{3\bar{C}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.16)$$

Теперь аналитические формулы для решений в стационарном случае покоящейся жидкости определены:

$$q_0 = \frac{3\bar{C}^2 (2\bar{C}z + 1)^{-\frac{1}{2}}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{\frac{3}{2}}}; \quad (4.17)$$

$$E_0 = \frac{3\bar{C} (2\bar{C}z + 1)^{\frac{1}{2}}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{\frac{3}{2}}}; \quad (4.18)$$

$$\Phi_0 = \frac{1 - (2\bar{C}z + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.19)$$

при этом

$$C = -\frac{3\bar{C}^2}{1 - (2\bar{C} + 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.20)$$

Как можно заметить, получить обратную аналитическую зависимость $\bar{C} = f(C)$ невозможно, а значит и аналитических формул для функций без замены граничного условия для заряда также не существует. Таким образом, для использования полученных формул (4.17) – (4.19) необходимо численно определять значение \bar{C} для заданного значения C .

Важно отметить, что в состоянии механического равновесия распределение заряда, потенциала и поля в случае автономной инжекции величиной C (4.17) – (4.19), полностью совпадают с распределениями этих величин в случае инжекции, зависящей от напряженности поля, если вместо параметра A в уравнении (3.7) использовать величину \bar{C} . Например, значению $A = 0.25$ соответствует $C = 0.224$ или $A = 1.58$ соответствует $C = 1.0$.

Однако, уже на следующем шаге, при исследовании линейной устойчивости, отождествить эти два случая не удастся. Задачи об эволюции малых и конечно-амплитудных возмущений разные.

Также имеет смысл отметить, что уравнение теплопроводности системы (4.1) в случае отсутствия движения жидкости имеет следующее решение:

$$\theta_0 = 1 - z \quad (4.21)$$

4.2 Анализ линейной устойчивости

Анализ линейных возмущений, возникающих в жидкости из состояния механического равновесия, совершается при помощи придания основному состоянию системы малых возмущений:

$$v_z = v_{z1}, \quad q = q_0 + q_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1, \quad (4.22)$$

где индексом «0» обозначены невозмущенные части функций (берутся из (4.21), (4.19), (4.17)), а индексом «1» – малые возмущения.

Рассмотрим двумерные возмущения и представим их в следующей форме:

$$F(x, z, t) = F(z)e^{-\lambda t + ikx}, \quad (4.23)$$

где в качестве функции $F(x, z, t)$ можно рассматривать любое из возмущений, $F(z)$ – амплитуда возмущений, зависящая только от вертикальной координаты, λ – декремент возмущений, k – волновое число, характеризующее горизонтальный масштаб возмущений.

Подстановка разложений (4.22) вкупе с возмущениями (4.23) в систему (3.2), линеаризация по малым возмущениям и сокращение экспонент приведет к спектрально-амплитудной задаче (индексы 1 опущены):

$$\begin{cases} -\lambda(v_z'' - k^2 v_z) = v_z^{IV} - 2k^2 v_z'' + k^4 v_z - \frac{T^2}{M^2} k^2 (q_0' \Phi - \Phi_0' q) - k^2 \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}, \\ -\lambda q + q_0' v_z = \frac{T}{M^2} (2q_0 q - q_0' \Phi' - q' \Phi_0'), \\ -\lambda \theta = \frac{1}{\text{Pr}} (\theta'' - k^2 \theta) + v_z, \\ \Phi'' - k^2 \Phi + q = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

удовлетворяющей граничным условиям:

$$\begin{aligned} z = 0 : v_z = v'_z = 0, \theta = 0, \Phi = 0, q = 0, \\ z = 1 : v_z = v'_z = 0, \theta = 0, \Phi = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где штрихами обозначены соответствующие производные по вертикальной координате z . Эта задача отличается от задачи об устойчивости жидкости при инъекции, зависящей от напряженности поля [18], граничными условиями для возмущений заряда.

Спектрально-амплитудная задача (4.24), (4.25) решается численно методом стрельбы со схемой ортогонализации [122]. Справедливость данного метода для решения этой задачи была проверена на случае анализа линейной устойчивости при отсутствии нагрева, когда электроконвекция наступает монотонным образом, полученные результаты (например, при $C = 0.1$ критическое значение электрического числа Релея $T_C = 24.147$ и критическое значение волнового числа $k_C = 4.57$, а также при $C = 1$ значения $T_C = 510.62$ и $k_C = 4.68$) совпадают с классическими результатами [123].

В результате решения спектрально-амплитудной задачи были получены нейтральные кривые возникновения колебательной и монотонной неустойчивости для различных значений параметров подвижности зарядов M и числа Релея Ra (рис. 4.1). Области монотонной неустойчивости расположены над черными кривыми. Области колебательной неустойчивости расположены между пунктирными синими и сплошными черными линиями.

Как можно заметить на рис. 4.1, критические электрические числа Релея T_C возникновения колебательной неустойчивости, соответствующие минимумам нейтральных кривых, сильно меняются при изменении параметра подвижности зарядов: при увеличении параметра M пороги возникновения конвекции также возрастают. При этом соответствующие критические волновые числа k_C немного уменьшаются. Кроме того, пороги возникновения монотонной неустойчивости не зависят от параметра M , поскольку в случае равенства нулю мнимой и действительной части декремента возмущений λ в системе (4.24), перемасштабирование

$$M \rightarrow bM, v_z \rightarrow v_z/b^2, q \rightarrow q, \Phi \rightarrow \Phi, \theta \rightarrow \theta/b^2, \quad (4.26)$$

не изменит систему. С другой стороны, интенсивность нагрева сильно влияет на критические значения монотонной конвекции T_C, k_C . Они растут с увеличением модуля числа Релея ($|Ra|$), то есть интенсивности нагрева сверху. В

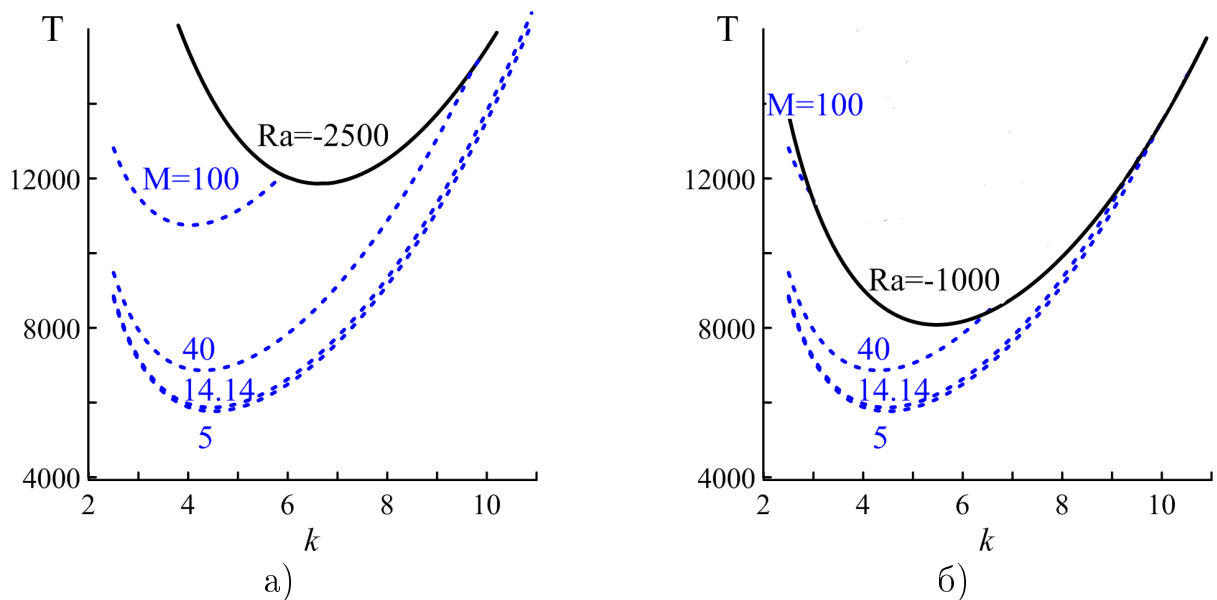


Рисунок 4.1 — Нейтральные кривые возникновения конвективной неустойчивости для различных значений числа Релея, параметра подвижности зарядов M , а) — $Ra = -2500$; б) — $Ra = -1000$. $C = 0.224$, $Pr = 10$. Штриховые линии соответствуют колебательной неустойчивости, сплошные — монотонной

то же время расширяется диапазон волновых чисел, в котором растут колебательные возмущения.

Увеличение параметра M при фиксированном Ra сдвигает порог T_C для колебательной неустойчивости вверх и сужает диапазон волновых чисел k , в котором растут колебательные возмущения: точка пересечения нейтральных кривых для монотонных и колебательных возмущений смещается в область меньшего k (рис. 4.1, пунктирные синие линии).

Влияние параметра инжекции C на пороги возникновения конвекции в зависимости от значений M и Ra представлено на рис. 4.2:

Как видно из рис. 4.2а, увеличение параметра подвижности M приводит к увеличению порога возникновения колебательной неустойчивости и к уменьшению критических волновых чисел и частот возникающих колебаний. Для случая сильной инжекции ($C = 1$) существует критическое значение $M_C = 35$, при превышении которого колебательные возмущения менее опасны для устойчивости равновесия, а неустойчивость связана с монотонной модой. Также можно заметить, что изменение подвижности зарядов M намного сильнее влияет на частоты возникающих колебаний, чем на пороги их возникновения.

Рис. 4.2б демонстрирует, что увеличение инжекции сильно понижает пороги возникновения конвекции, что является логичным, поскольку усиление инжекции приводит к увеличению заряда в жидкости, а соответственно и силы

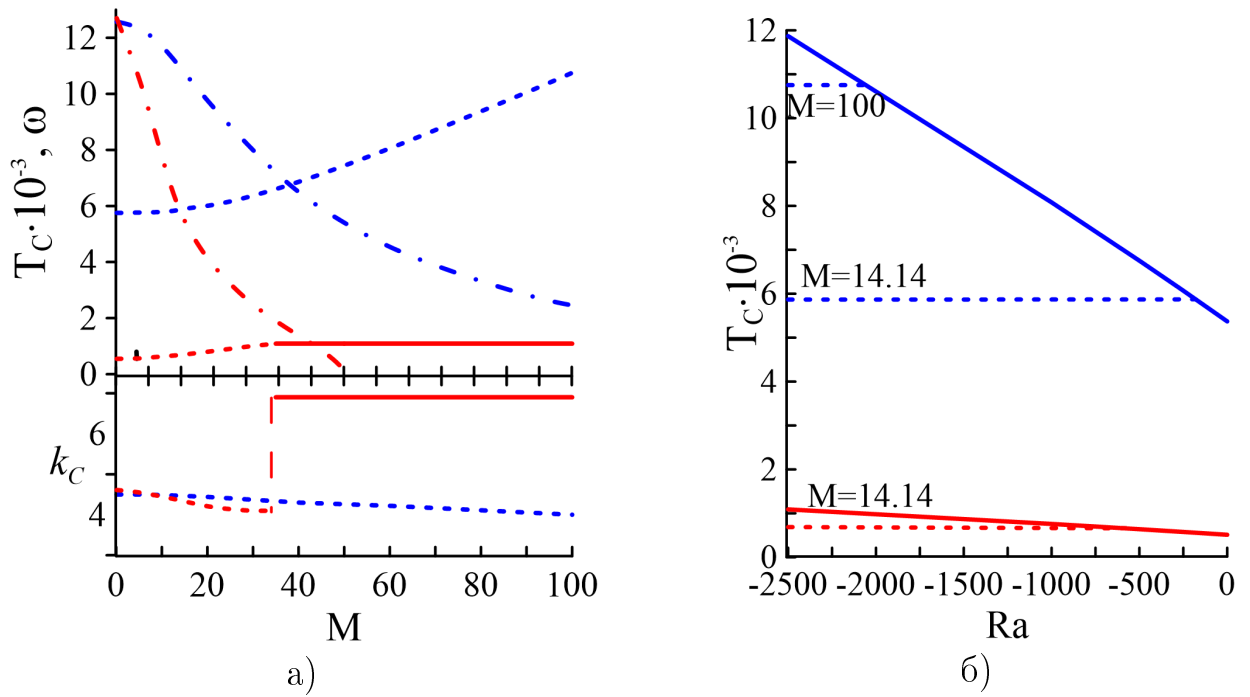


Рисунок 4.2 — а) — критические значения числа Релея T_C и волнового числа k_C возникновения колебательной (штриховые линии) и монотонной (сплошные линии) неустойчивости в зависимости от подвижности зарядов M , а также циклические частоты возникающих колебаний (штрихпунктирные линии), $Ra = -2500$, $Pr = 10$; б) — критические значения числа Релея возникновения колебательной (штриховые линии) и монотонной (сплошные линии) неустойчивости в зависимости от теплового числа Релея Ra , $Pr = 10$. На обоих графиках синие линии соответствуют $C = 0.224$, красные линии — $C = 1$

Кулона, действующей на ее элементарный объем и, соответственно, движение заряженного, но более холодного (и, следовательно, более тяжелого) элемента жидкости к катоду (вверх) становится легче. Это можно объяснить тем, что плавучесть жидкости противодействует силе Кулона, вызывающей конвективное движение, и чем плавучесть, пропорциональная нагреву, слабее, тем более легко вызвать конвективный массоперенос. Следует отметить, что значение Ra_* числа Релея, при котором колебательные возмущения становятся опасными, зависит от параметра C . Расчеты показывают, что $Ra_* \approx -177$ для $C = 0.224$ и $Ra_* \approx -500$ для $C = 1.0$.

4.3 Волновые режимы конвекции

Для численного моделирования нелинейной конвекции системы используется те же численные методы и те же значения безразмерных параметров, что использовались в предыдущей главе: число Прандтля $Pr = 10$, соответствующее широкому классу слабопроводящих жидкостей [18; 71], число Релея $Ra = -2500$, отвечающее подогреву сверху, $M = 14.14$ [8; 18; 119]. Значения параметра $C = 0.224$ или $C = 1.0$ соответствуют умеренной униполярной инжекции ($0.2 < |C| < 5$) [61], Для $C = 0.224$ горизонтальный размер ячейки был равен $L = 2$, для $C = 1.0$ - $L = 1.44$, соответственно.

Примерами жидкостей, свойствам которых близок приведенный набор параметров, могут служить этанол с ионами хлора [8] или циклогексан с добавлением соли триизоамиламмония перхлората и тетраметилфенилендиамина, заполняющий конденсатор с электродами из нержавеющей стали [124]. В работе [124] при изучении униполярной однородной инжекции диапазон зазоров между электродами составлял 0.1–1.5 мм, напряженность электрического поля изменялась в пределах 0–100 кВ/см. Для оценок в дальнейшем расстояние между электродами выбиралось равным 1,5 мм и напряжение между электродами 4,2 кВ ($E = 28$ кВ/см).

Исследование проводилось следующим образом: при фиксированном наборе безразмерных параметров, приведенном выше, задавалось начальное возмущение в виде двух противоположно вращающихся конвективных валов с малой амплитудой. При этом электрическое число Релея, пропорциональное напряжению на обкладках конденсатора и являющееся в данном случае управляющим параметром, постепенно увеличивалось до тех пор, пока возмущения не начинали нарастать, а жидкость — двигаться. Далее применялся метод продолжения по параметру, позволяющий получить бифуркационную диаграмму электроконвективных течений.

Чтобы проверить численный метод, сравним результаты линейной теории с результатами расчетов в полностью нелинейной задаче. При $C = 0.224$ значение электрического числа Релея, соответствующее колебательной неустойчивости T_{osc} , полученное в нелинейных расчетах, отличается от результатов линейной теории T_{osc}^{lin} менее чем на 1.5%: например, $Ra = -2500$, $M = 14.14$:

$T_{osc} = 6805$ и $T_{osc}^{lin} = 6905$. Разница в частотах на пороге электротермоконвекции примерно равна 2% ($\omega = 9.608$; $\omega^{lin} = 9,598$).

4.3.1 Смешанный режим

Обсудим сначала случай $C = 0.224$: при последовательном увеличении электрического числа Релея T из области неподвижной жидкости (малые колебания затухают) при значении $T = T_{C1} = 6805$ конвекция возникает в форме прямой бифуркации Хопфа в виде смешанного режима М (mixed regime) (рис. 4.3, 4.4).

Распределения функции тока, температуры, отклонений заряда и потенциала от их равновесных распределений (4.17), (4.19) в смешанном режиме системы приведены на рис. 4.5. Как можно заметить, заряд и потенциал в данном режиме отклоняются от своих значений в отсутствие движения жидкости крайне слабо.

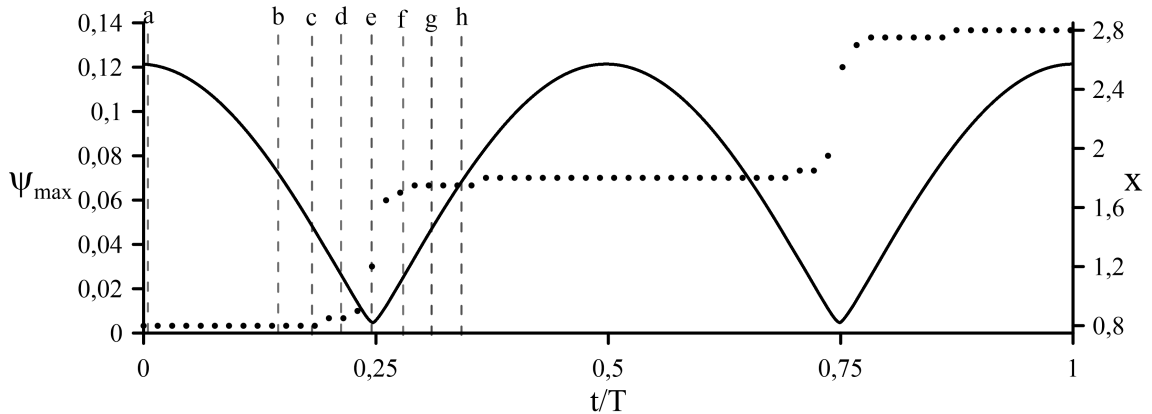


Рисунок 4.3 — Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (сплошная линия и левая вертикальная ось) и x -координаты максимума функции тока в ячейке (точки и правая вертикальная ось) в смешанном режиме М, $C = 0.224$ $T = 6815$

Данный режим назван таким образом, поскольку является комбинацией режима стоячих волн и режима бегущих волн, периодически сменяющих друг друга. Большую часть периода колебаний структура представляет собой стоячую волну. В момент максимума интенсивности конвекции, в ячейке присутствуют два симметричных конвективных вала, закрученных в противоположную сторону (момент времени «а» рис. 4.3 и распределение «а» рис. 4.4). Центр конвективного вала, вращающегося против часовой стрелки, имеет горизонтальную координату $x = 0.8$, центр вращающегося по часовой стрелке

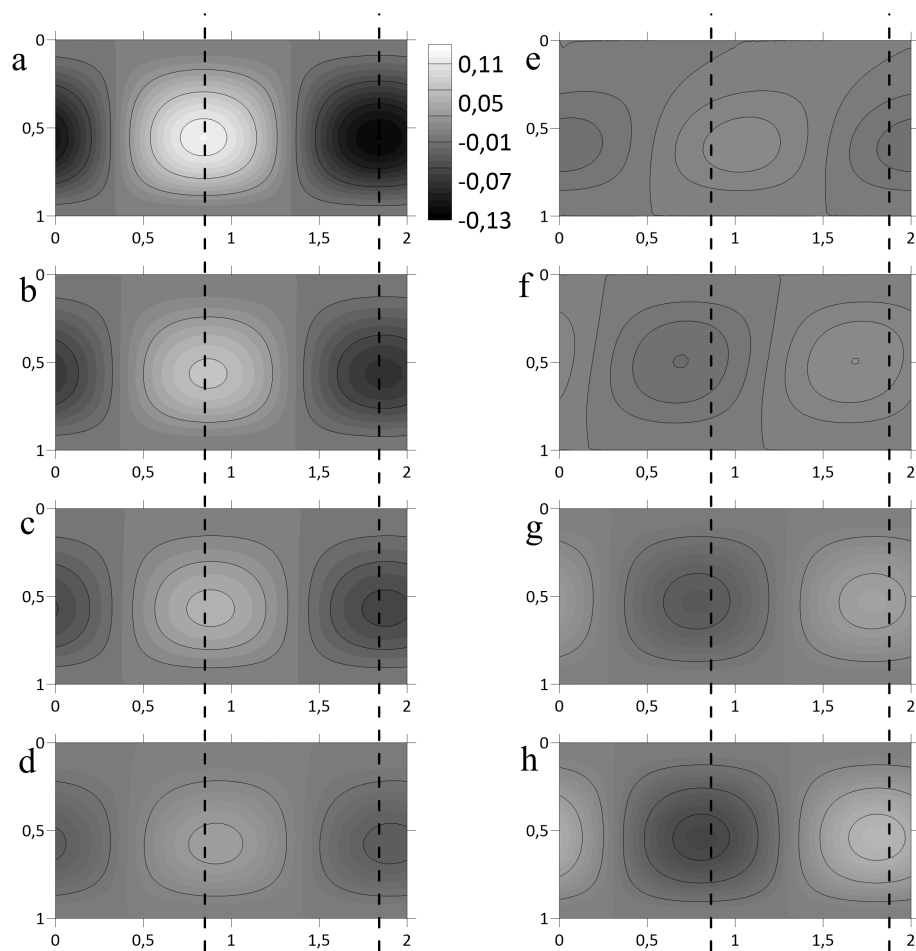


Рисунок 4.4 — Распределения функции тока в ячейке в смешанном режиме М, обозначения распределений соответствуют моментам времени на рис. 4.3, цветовая шкала одинакова для всех распределений, $C = 0.224$, $T = 6815$

вала $-x = 1.8$. Затем, интенсивность конвекции в валах начинает уменьшаться до некоторого минимального значения (моменты времени с – d рис. 4.3 и соответствующие распределения рис. 4.4) $\psi_{max} = 0.005$ в момент времени e рис. 4.3. Однако, в отличие от «чистых» стоячих волн, при которых интенсивность конвекции в ячейке упала бы до нуля и валы просто менялись местами, в смешанном режиме в этот момент проявляются бегущие волны: в моменты минимума интенсивности конвекции конвективная структура «проскакивает» как одно целое вдоль горизонтального направления (моменты времени d - f рис. 4.3 и соответствующие распределения рис. 4.4) и происходит резкое увеличение координаты максимума функции тока со значения $x = 0.85$ в момент времени d до значения $x = 1.85$ в момент f.

Такое поведение координаты максимума функции тока со значения в момент времени d до значения в момент f на рис. 4.3 и эволюция соответствующих распределений функции тока на рис. 4.4 подтверждают, что в этой части смешанного режима проявляется бегущая волна.

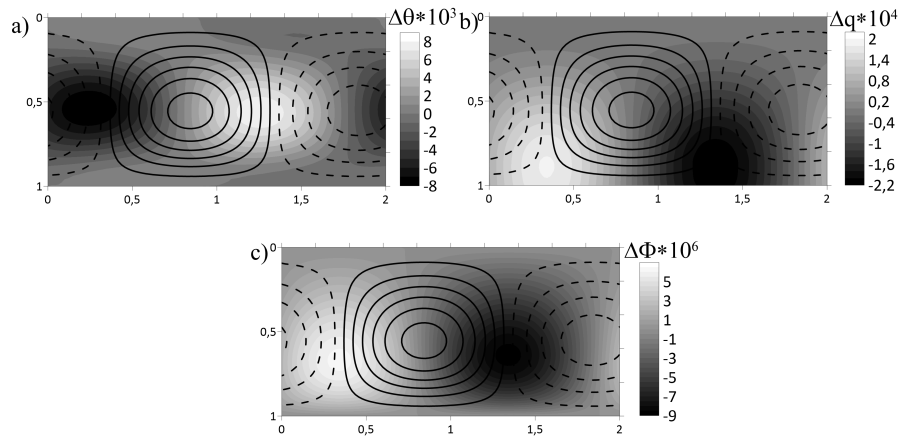


Рисунок 4.5 — Распределения в ячейке отклонения температуры от равновесного значения отклонения температуры (а), плотности заряда от равновесного значения (б) и электрического потенциала от равновесного значения (с) в смешанном режиме М в момент времени а на рис. 4.3., $C = 0.224$, $T = 6815$. Линии на каждом из распределений соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные.

4.3.2 Бегущие волны

При значениях безразмерного электрического параметра T , лежащих в пределах $[T_{C2} = 6818 < T < T_{C3} = 7037]$, система пребывает в режиме бегущих волн TW (traveling wave). В результате эволюции начального возмущения случайным образом может сформироваться волна, бегущая как вправо, так и влево, что соответствует симметрии задачи относительно инверсии направления x . Поскольку в работе используется метод продолжения по параметру, то с ростом электрического числа Релея подробно исследовалась волна, бегущая влево (рис. 4.6).

В режиме бегущих волн в ячейке одновременно существует два конвективных вала, вращающихся в противоположные стороны. Интенсивность конвекции в них остается постоянной, однако они движутся вдоль горизонтального направления с постоянной фазовой скоростью, о чем свидетельствует линейный характер зависимости координаты максимума функции тока от времени (рис. 4.6). Распределения некоторых функций системы в ячейке представлены на рис. 4.7.

Для лучшего понимания картины этого конвективного режима в определенный момент времени был взят горизонтальный и проходящий посередине ячейки разрез всех ключевых функций системы (за исключением вихря скорости) (рис. 4.8).

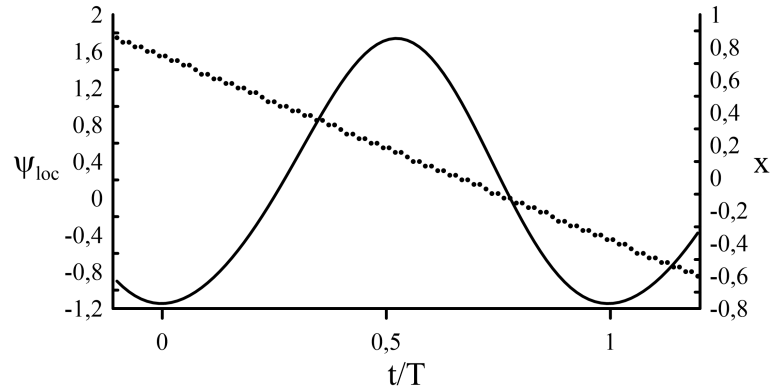


Рисунок 4.6 — Зависимость от времени значения функции тока в фиксированной точке ячейки Ψ_{loc} (сплошная линия и левая вертикальная ось) и x -координаты максимума функции тока в ячейке (точки и правая вертикальная ось) в режиме бегущих волн TW, $C = 0.224$, $T = 6950$

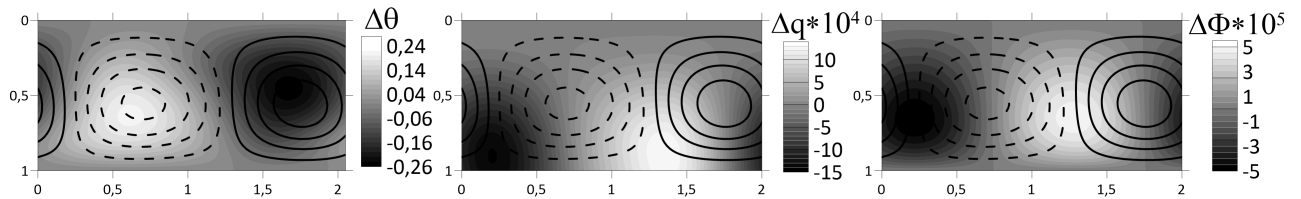


Рисунок 4.7 — Распределения отклонений от равновесных значений температуры, плотности заряда и электрического потенциала в режиме бегущих волн TW в момент времени, соответствующему левой вертикальной оси рис. 4.6, $C = 0.224$, $T = 6950$. Линии на каждом из распределений соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные

Как можно видеть, отклонения параметров (температуры, заряда и потенциала) от равновесных значений в целом соответствуют распределению в пространстве конвективных валов. Отклонения заряда и потенциала почти максимальны и положительны вблизи координаты ($x = 1.15$), где функция тока, увеличиваясь, проходит через ее нулевое значение. При этом жидкость под действием силы Кулона на избыточный положительный заряд движется вверх, к катоду. С другой стороны, отклонения заряда и потенциала отрицательны вблизи координаты ($x = 0.05$), где сила Кулона и скорость жидкости направлены от катода. Стоит отметить, что потенциал возмущается крайне слабо.

Экстремальные отклонения температуры от равновесия немного смещены относительно центров конвективных валов: например, в центре закрученного против часовой стрелки конвективного вала (штриховые линии) содержится более нагретая жидкость. Наблюдается некоторая асимметрия вращения соседних конвективных валов: распределение модуля скорости в ячейке имеет два

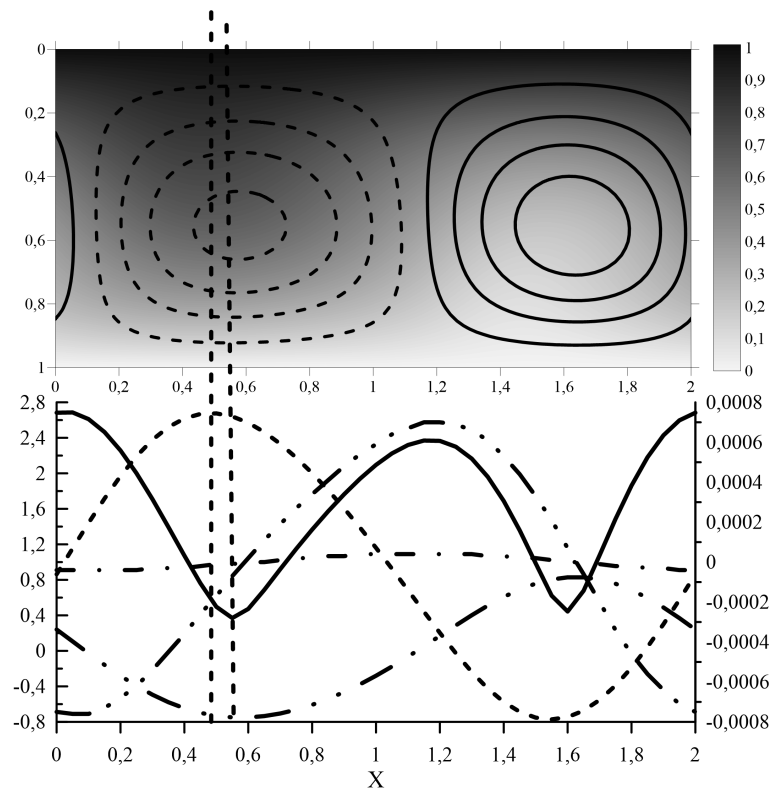


Рисунок 4.8 — Бегущие волны, $C = 0.224$, $T = 6950$. На верхнем рисунке распределение температуры в ячейке: линии на распределении – изолинии функции тока, сплошные линии – положительные значения, штриховые – отрицательные. На нижнем рисунке горизонтальные разрезы функций, характеризующих течение, соответствующие середине высоты ячейки. Сплошная линия – модуль скорости сплошной среды; штриховая линия – температура; штрихпунктирная линия с тремя точками – отклонение заряда от равновесного распределения; штрихпунктирная линия – отклонение электрического потенциала от равновесного распределения; штрихпунктирная линия с двумя точками – функция тока. Левая вертикальная ось соответствует значениям модуля скорости и функции тока, правая вертикальная ось значениям отклонений заряда и потенциала, зависимость температуры построена в условном масштабе.

экстремума, меньший из которых соответствует движению жидкости в направлении нагретого катода (когда сила Кулона и сила плавучести противоположны друг другу), а больший – движению жидкости в направлении от катода (когда силы плавучести и Кулона сонаправлены).

Экстремумы горизонтальных распределений различных функций в ячейке не совпадают друг с другом. Особенно это проявляется у температуры: максимум ее значения (координата $x = 0.45$, левая вертикальная штриховая линия на рис. 4.8) расположен левее центра конвективного вала, закрученного против часовой стрелки ($x = 0.55$, правая вертикальная штриховая линия на рис. 4.8). С учетом того, что конвективная структура в ячейке как единое целое движется справа налево, можно заключить: изменение температуры опережает

по фазе изменение функции тока чуть больше чем на π , а возмущения заряда и потенциала опережают изменение функции тока приблизительно на $\pi/2$.

Коэффициенты трех гармоник разложения горизонтального распределения функции тока в ряд Фурье представлены в виде зависимостей от времени и фазовых траекторий (параметрическая зависимость между мнимой и действительной частями гармоник) на рисунке 4.9. Вещественные части разложения функции тока в ряд Фурье, конечно, будут зависеть от времени, поскольку жидкость в конденсаторе вместе с конвективными валами движется в горизонтальном направлении. Однако по значениям амплитуд гармоник рис. 4.9 можно заключить, что в режиме бегущих волн доминирует именно первая гармоника, ее максимальные значения более чем в 10 раз превышают значения второй гармоники. По фазовым траекториям же можно понять, что первая пространственная гармоника меняется со временем по гармоническому закону, а вот вторая и третья более сложным образом. Но именно их вклад в конечном итоге и приводит к появлению слабой, почти незаметной асимметрии в пространственном распределении конвективных валов.

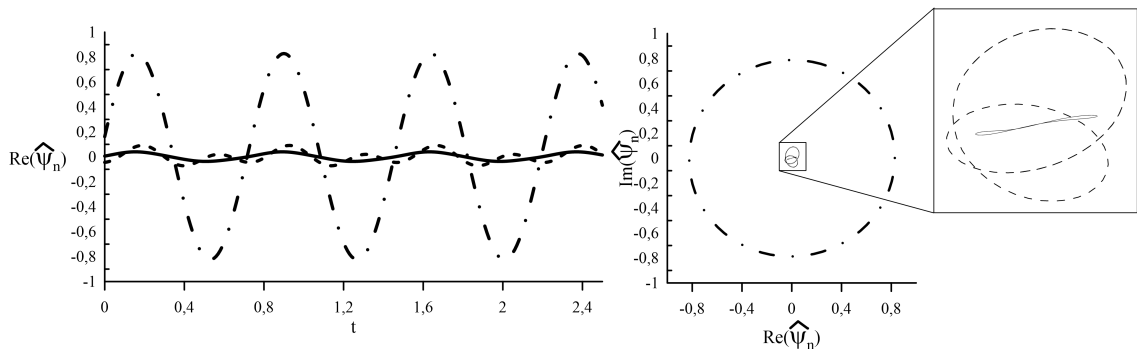


Рисунок 4.9 — Зависимость коэффициентов при действительных гармониках разложения в ряд Фурье функции тока от времени (левый график) и фазовые траектории этого разложения (правый график) в режиме бегущих волн ($C = 0.224$, $T=6950$). На обоих графиках: штрихпунктирная линия – коэффициент при первой гармонике, штриховая линия – при второй гармонике, сплошная линия – при третьей

4.3.3 Модулированные бегущие волны

При увеличении параметра T система переходит к режиму модулированных бегущих волн MTW (modulated traveling wave) (рис. 4.10). Система

пребывает в этом режиме для значений безразмерного электрического параметра T , лежащих в пределе $[T_{C3} = 7037 < T < T_{C4} = 7061]$, при дальнейшем увеличении параметра T система резким скачком перейдет к режиму высокоинтенсивной стационарной конвекции.

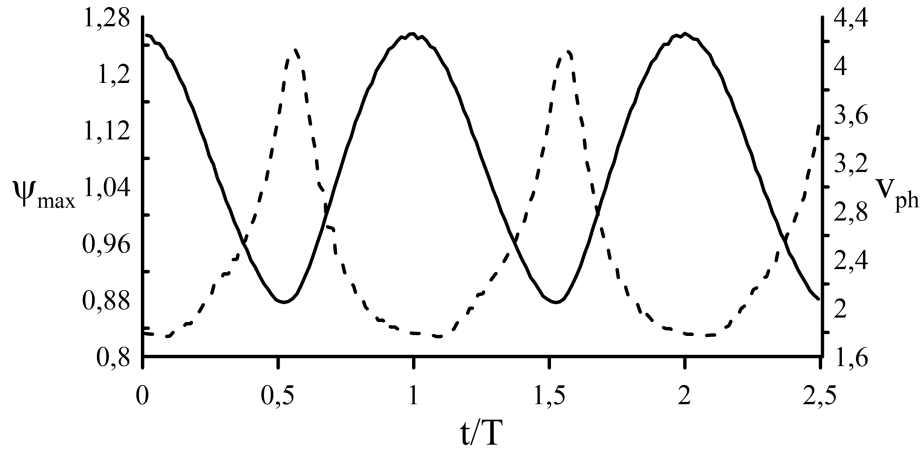


Рисунок 4.10 — Зависимость от времени значения функции тока в фиксированной точке ячейки ψ_{loc} (сплошная линия и левая вертикальная ось) и фазовой скорости v_{ph} максимума функции тока в ячейке (пунктирная и правая вертикальная ось) в режиме модулированных бегущих волн MTW, $C = 0.224$, $T = 7050$

Данный режим похож на режим бегущих волн TW, в ячейке присутствуют два конвективных вала, закрученных в противоположные стороны идвигающихся вдоль горизонтального направления. Но, в отличие от режима бегущих волн, в режиме модулированных бегущих волн интенсивность конвекции в валах и скорость перемещения максимума и минимума функции тока в ячейке начинают зависеть от времени по некому периодическому закону. Как можно видеть на рис. 4.10, максимуму интенсивности конвекции в конвективном вале соответствует минимум его горизонтальной скорости, и наоборот. Кроме того, возникает асимметрия в конвективных валах: один из валов периодически расширяется, а интенсивность конвекции в нем падает, а второй, наоборот, сжимается, а жидкость в нем начинает течь быстрее (рис. 4.11, верхний график). После этого начинает расширяться второй вал, и так далее.

Для режима модулированных бегущих волн были получены горизонтальные разрезы функций системы (рис. 4.11).

Хотя основные закономерности в пространственном распределении функций системы не меняются в сравнении с режимом бегущих волн, тем не менее, «рассинхронизация» различных функций системы усиливается: по-видимому,

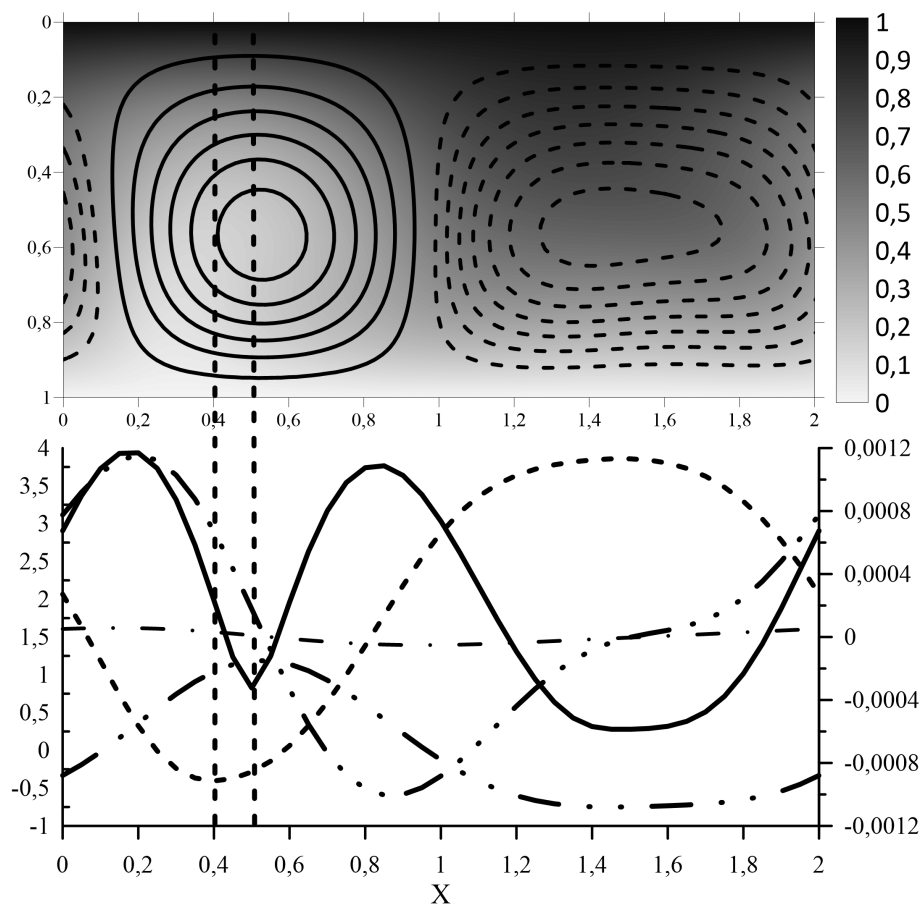


Рисунок 4.11 — Горизонтальные разрезы параметров системы в режиме модулированных бегущих волн, $C = 0.224$, $T = 7050$. На верхнем графике: распределение температуры в ячейке. Линии на распределении соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные. На нижнем рисунке линии обозначены точно так же, как и на нижнем рисунке рис. 4.8

температура, заряд и электрический потенциал не успевают перераспределиться вслед за периодически изменяющимися конвективными валами самой жидкости.

Также для этого режима были найдены коэффициенты при пространственных гармониках функции тока (рис. 4.12). Как видно из графиков, в режиме модулированных бегущих волн большую роль начинает играть вторая гармоника, ее максимальное значение всего в три раза меньше максимального значения первой гармоники (рис. 4.12). Помимо всего прочего, амплитуда первой гармоники в этом случае начинает зависеть от времени (рис. 4.12). Судя по всему, проявление сильной второй гармоники в колебаниях системы и приводит к появлению значительной асимметрии в пространственном распределении функций.

Для экспериментального наблюдения и изучения конвективных бегущих волн, например, в смесях спирт–вода, используются кольцевые каналы [80; 81].

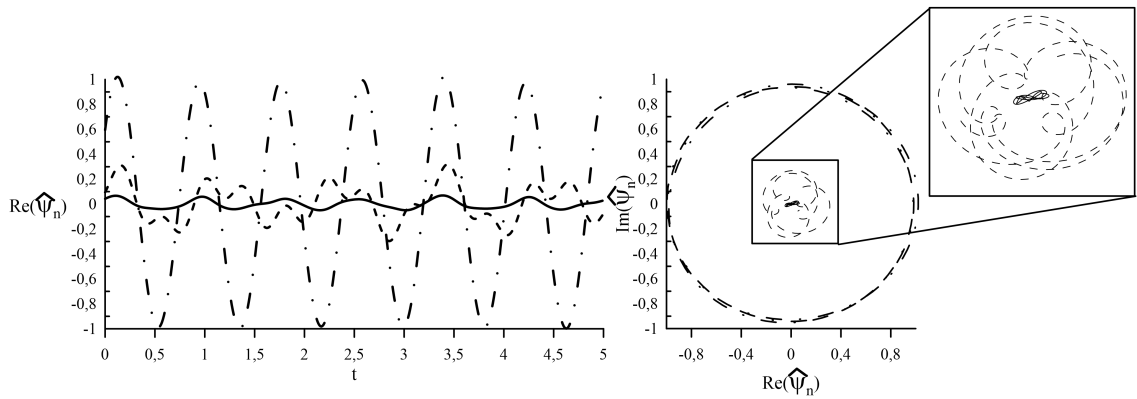


Рисунок 4.12 — Зависимость коэффициентов при действительных гармониках разложения в ряд Фурье функции тока от времени (левый график) и фазовые траектории этого разложения (правый график) в режиме модулированных бегущих волн ($C = 0.224$, $T = 7050$). На обоих графиках: штрихпунктирная линия – коэффициент при первой гармонике, штриховая линия – при второй гармонике, сплошная линия – при третьей

Это важно, так как у конвекции в бинарной смеси и электроконвекции в жидкости существуют общие черты: 1) конвективный перенос примеси (заряда) конкурирует с другими механизмами переноса (термодиффузией нейтральной примеси по направлению градиента температуры или противоположно ему, дрейфом зарядов в электрическом поле); 2) конвекция может возникать колебательным образом, в результате эволюции формируется бегущая волна.

Геометрия кольцевых каналов трехмерна, но в каналах большого радиуса $R \gg d$ длиной $L = 2\pi R$ и шириной $1.3d \div 3d$ [81] реализуются квазидвумерные режимы конвекции бинарной смеси в виде бегущих валов, оси которых перпендикулярны боковым границам. Полученные при численном моделировании бегущих волн в горизонтальном слое бифуркационные диаграммы решений и распределения примеси [81; 82] находятся в хорошем соответствии с экспериментальными результатами для кольцевых [81] и прямоугольных каналов [83]. При ширине канала, большей $3d$, квазидвумерные валы разрушаются из-за трехмерных неустойчивостей [84]. В узких каналах влияние боковых границ настолько велико [85], что результаты существенно расходятся с предсказанными численным расчетом.

Для возможной экспериментальной проверки этих выводов из анализа двумерных структур рассмотрим волновое течение слабопроводящей жидкости в круговом канале длиной $L = ml \gg 1$, где m — целое число (размерная длина $L = 2md \gg d$). При небольших надкритичностях параметра T подбором L можно добиться, чтобы волновые возмущения с пространственными периодами $l_1 \neq l$, удовлетворяющими условию $L = m_1 \cdot l_1$, затухали (находились под ней-

тральной кривой $T(k)$). Для циклогексана с добавками солей [124] (при $\varepsilon = 2.2$, $K = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2 \cdot \text{с}/\text{В}$, $\eta = 0.979 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $V_0 = 4.2 \text{ кВ}$) получим электрическое число Релея, равное $T = 6960$, что соответствует интервалу значений T , в котором численное моделирование предсказывает существование бегущей волны. Таким образом, в геометрии кольцевых каналов шириной $1.3d \div 3d$ и большим отношением радиуса к высоте следует ожидать появления волновых течений.

4.3.4 Стационарная конвекция

Область существования надкритических режимов заканчивается при $T > T_{C4}$. При значениях электрического числа Релея, превышающих данный порог надкритические слабоинтенсивные режимы конвекции теряют устойчивость, и система скачкообразно переходит к режиму стационарной конвекции SOC (steady overturning convection) (рис. 4.13).

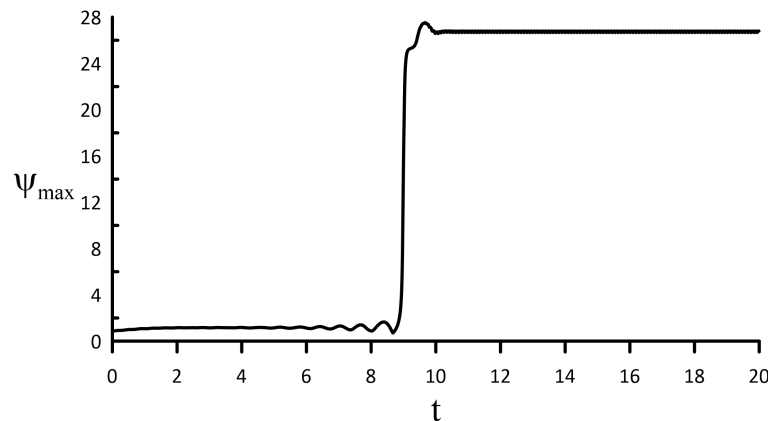


Рисунок 4.13 — Зависимость от времени максимального значения функции тока ψ_{max} при $C = 0.224$, $T = 7070$, переход от режима модулированных бегущих волн MTW к режиму стационарной конвекции SOC

Данный режим характеризуется интенсивностью конвекции, в десятки раз превышающей интенсивность конвекции в надкритических режимах, рассмотренных ранее, а также своей стационарностью, в том смысле, что все рассматриваемые функции системы обладают постоянными во времени значениями. В ячейке располагаются два зеркальных конвективных вала, закрученных в противоположные стороны (рис. 4.14).

Зависимость от времени безразмерного теплопотока, приходящегося на горизонтальную единицу длины нагретой обкладки конденсатора, (числа Нуссельта Nu) для различных режимов конвекции представлен на рисунке 4.15.

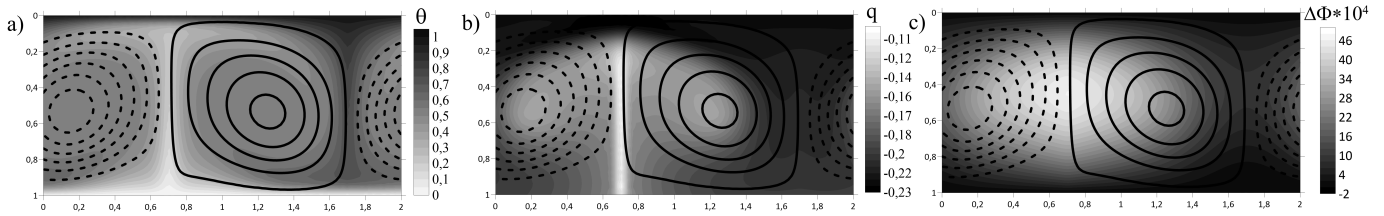


Рисунок 4.14 — Распределения в ячейке отклонения температуры от равновесного значения отклонения температуры (а), плотности заряда от равновесного значения (b) и электрического потенциала от равновесного значения (с) в режиме стационарной конвекции SOC, $C = 0.224$, $T = 7070$. Линии на каждом из распределений соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные

Как можно видеть, в режиме стационарной конвекции безразмерный теплопоток более чем в пять раз превышает значения, наблюдаемые в надкритической области.

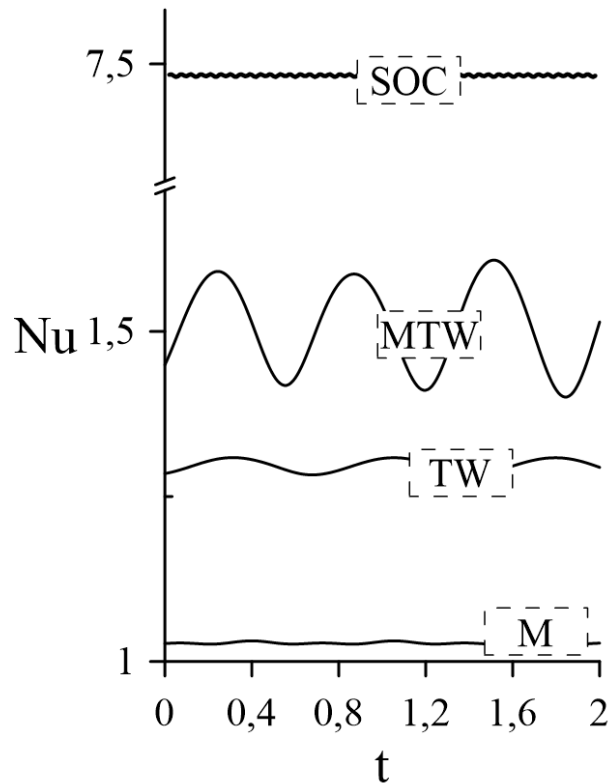


Рисунок 4.15 — Зависимость от времени безразмерного теплопотока, приходящегося на горизонтальную единицу длины нагретой обкладки конденсатора для различных режимов конвекции при $C = 0.224$: смешанного (M) $T = 6810$; бегущих волн (TW) $T = 6950$; модулированных бегущих волн (MTW); $T = 7050$; стационарной конвекции (SOC) $T = 7070$.

4.3.5 Стоячие волны

В постановке, использующей полностью периодические граничные условия вдоль горизонтального направления (выражение 3.8) не удалось обнаружить устойчивый режим стоячих волн, хотя он наблюдается во многих задачах, при решении которых используются похожие системы уравнений. Для того, чтобы численно смоделировать стоячие волны, пришлось искусственно ограничить движение жидкости по горизонтали.

Для вихря скорости, температуры, заряда и потенциала по-прежнему используются периодические граничные условия, а функция тока теперь считается равной нулю на концах отрезка периодичности:

$$\Psi(L \cdot n, z, t) = 0, n \in \mathbb{Z} \quad (4.27)$$

Такие граничные условия из всего набора периодических по горизонталь решений выделяет решение с узлами функции тока на вертикальных границах, что соответствует стоячей волне.

Можно представить, что внутрь конденсатора помещаются вертикальные мембраны на расстоянии друг от друга. Такие мембраны идеально тепло- и электропроводны, но не пропускают через себя жидкость. С таким ограничением конвекция в жидкости появляется при том же критическом значении электрического числа Релея путем прямой бифуркации колебательным образом, но теперь в результате эволюции формируются стоячие волны SW (рис. 4.16).

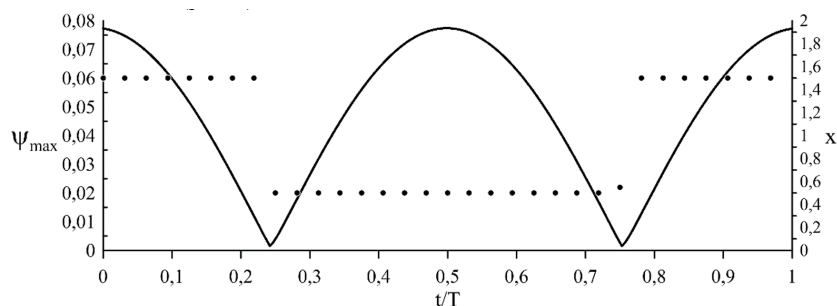


Рисунок 4.16 — Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (сплошная линия и левая вертикальная ось) и x - координаты максимума функции тока в ячейке (точки и правая вертикальная ось) в режиме стоячих волн SW, $C = 0.224$, $T = 6810$

Сравним поведение системы в режиме стоячих волн SW и смешанном режиме M (см. раздел 4.3.1). Во-первых, в режиме стоячих волн при смене положения конвективных валов интенсивность конвекции в них действительно

стремится к нулю, а не к какому-то малому значению, как в смешанном режиме (рис. 4.3). Во-вторых, положение максимумов функции тока (т.е. центров конвективных валов) меняется скачкообразно, а не плавно, как в ходе проскакивания жидкости вдоль горизонтального направления в режиме смешанных волн М. На рис. 4.17 изображено пространственное распределение некоторых характеристик системы вблизи максимума интенсивности конвекции в режиме стоячих волн SW. Качественно они не отличаются от аналогичных распределений в смешанном режиме.

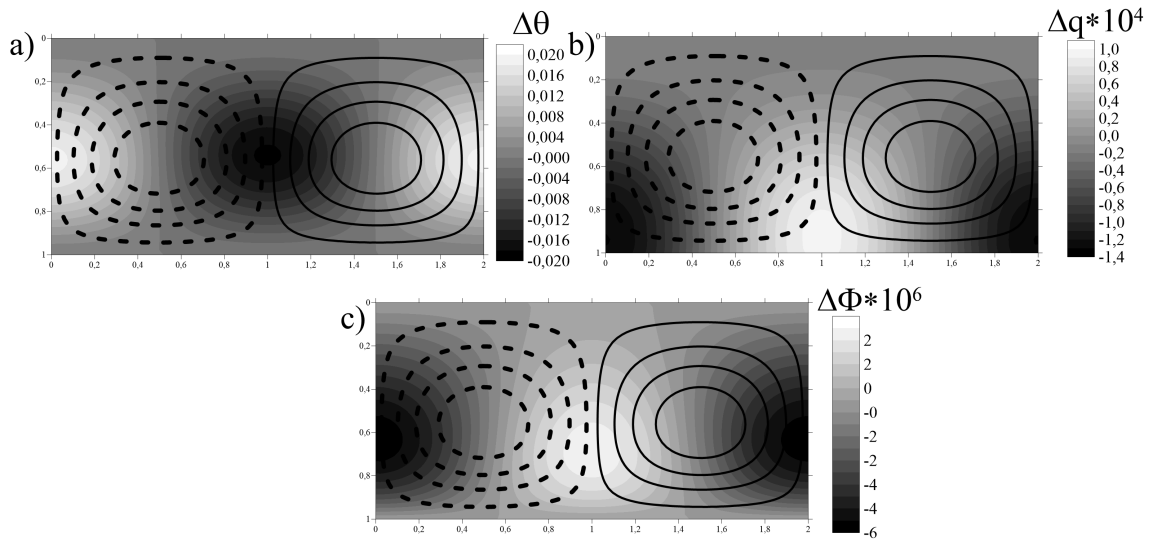


Рисунок 4.17 — Распределения в ячейке отклонения температуры от равновесного значения отклонения температуры (а), плотности заряда от равновесного значения (б) и электрического потенциала от равновесного значения (с) в режиме стоячих волн SW, $C = 0.224$, $T = 6810$. Линии на каждом из распределений соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные

4.3.6 Модулированные стоячие волны

Режим стоячих волн существует при $T \in [T_{C1} = 6805, 6864]$. При $T \in [T_{C2'} = 6865, T_{C3'} = 6918]$ системе реализуется режим модулированных стоячих волн MSW (рис. 4.18). Он отличается от режима стоячих волн тем, что в нем при уменьшении интенсивности конвекции в ячейке перестановка конвективных валов происходит через появление в системе второй пространственной гармоники (рис. 4.18).

Как можно видеть, в те моменты, когда интенсивность конвекции в ячейке достигает минимальных (но ненулевых) значений (разрезы а и б (рис. 4.18)),

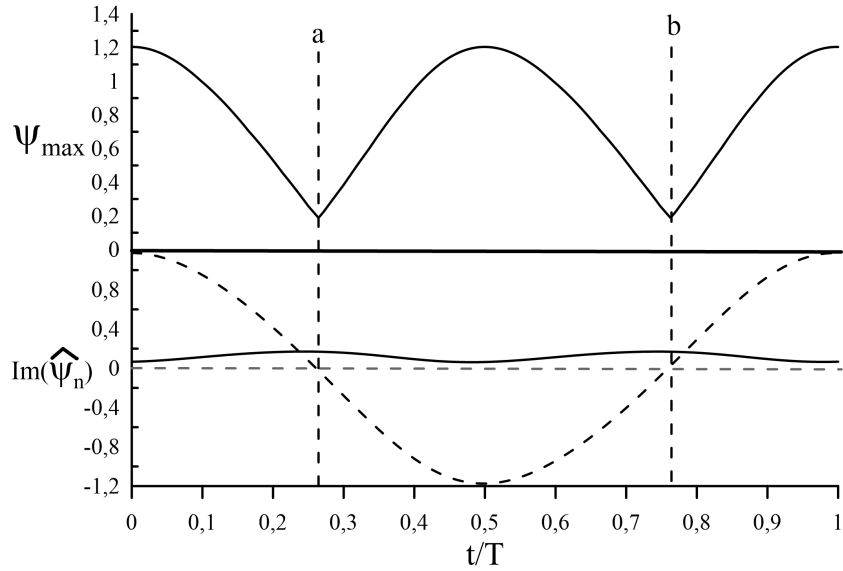


Рисунок 4.18 — Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (верхний график) и коэффициентов при мнимых гармониках разложения в ряд Фурье функции тока (нижний график, штриховая линия – первая гармоника, сплошная – вторая) в режиме модулированных стоячих волн MSW, $C = 0.224$, $T = 6910$

мода первой пространственной гармоники становится равной нулю, но при этом мода второй пространственной гармоники положительна и максимальна, ввиду этого в ячейке наблюдаются две пары закрученных в противоположную сторону конвективных валов (рис. 4.19).

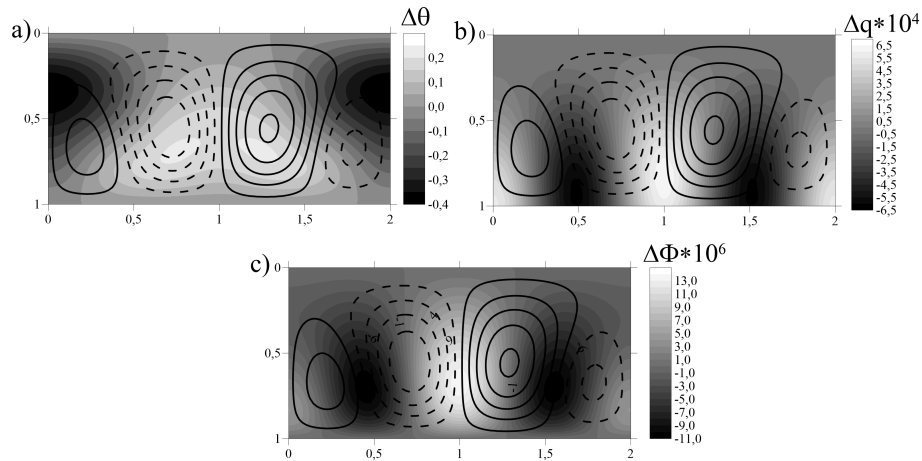


Рисунок 4.19 — Распределения в ячейке отклонения температуры от равновесного значения отклонения температуры (а), плотности заряда от равновесного значения (b) и электрического потенциала от равновесного значения (с) в режиме модулированных стоячих волн MSW, $C = 0.224$, $T = 6910$, соответствует разрезу а рис. 6. Линии на каждом из распределений соответствуют изолиниям функции тока, сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные.

При значениях $T > 6919$ система переходит к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции SOC.

4.3.7 Бифуркационные диаграммы режимов движения жидкости в постоянном поле

Результатом исследования эволюции электроконвективных режимов в полной постановке и постоянном электрическом поле становится бифуркационная диаграмма режимов движения жидкости, включающая как устойчивые, так и неустойчивые решения (рис. 4.20), при значении параметра инжекции $C = 0.224$.

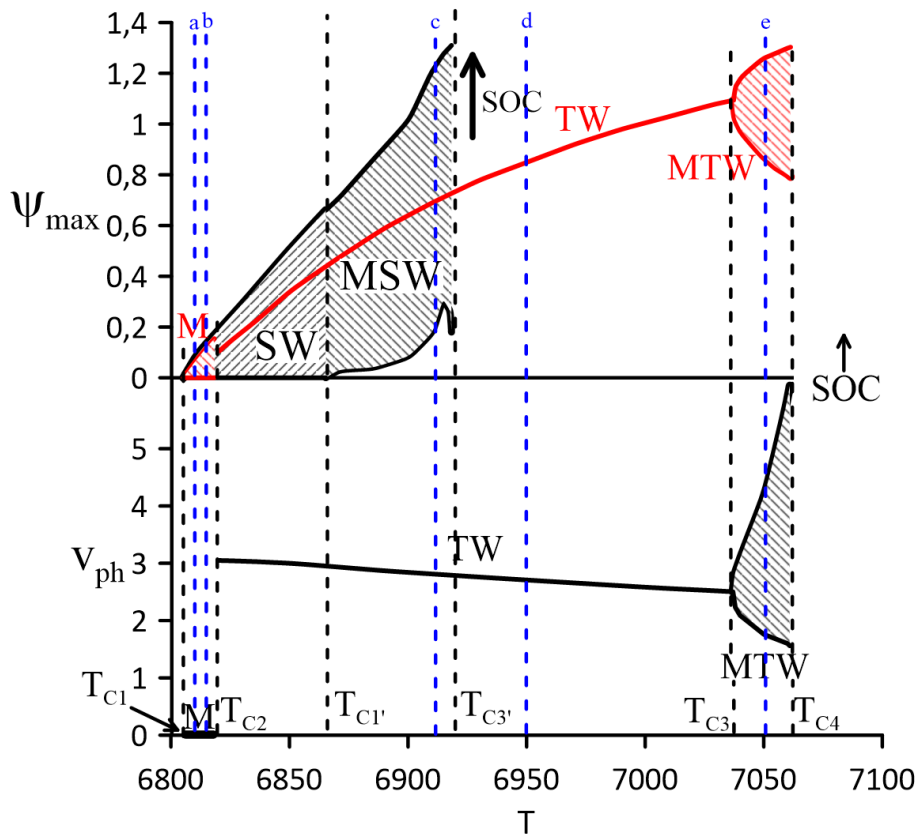


Рисунок 4.20 — Бифуркационная диаграмма режимов движения жидкости для максимального значения функции тока и фазовой скорости жидкости в зависимости от управляющего параметра T , $C = 0.224$, на верхнем графике красным цветом – устойчивые решения, черным – неустойчивые. Штриховка подразумевает, что рассматривая величина меняется в неких пределах. Синие разрезы соответствуют рисункам предыдущих разделов следующим образом: разрез а, смешанный режим – раздел 4.3.1; разрез b, стоячая волна – 4.3.5; разрез с, модулированная стоячая волна – 4.3.6; разрез d, бегущая волна – 4.3.2; разрез e, модулированная бегущая волна – 4.3.3

Проиллюстрируем при помощи диаграммы полученные результаты:

Конвекция в жидкости возникает в результате прямой бифуркации колебательным образом при значении управляющего параметра $T_{C1} = 6805$. Здесь

в системе наблюдается сосуществование двух серий решений: устойчивого решения в виде смешанного режима М и неустойчивого решения в виде стоячих волн SW, получаемого при применении специальных периодических условий.

При увеличении параметра T , при значении $T_{C2} = 6818$ в системе возникает устойчивый режим бегущих волн TW. Он является основным устойчивым режимом электроконвекции в надкритической области управляющего параметра и наблюдается для широкого диапазона значений параметра.

Если же двигаться по ветви неустойчивых решений, то при значении $T_{C2'} = 6865$ режим стоячих волн переходит в режим модулированных стоячих волн MSW, а при еще большем увеличении управляющего параметра при $T_{C3'} = 6919$ система скачкообразно переходит к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции SOC.

Возвращаясь к ветви устойчивых решений, при $T_{C3} = 7037$ в системе начинает реализовываться режим модулированных бегущих волн MTW, характеризующийся тем, что интенсивность конвекции в ячейке и фазовая скорость бегущей волны начинает периодически изменяться с амплитудой, возрастающей при увлечении управляющего параметра.

При значениях управляющего параметра, превосходящих $T_{C4} = 7062$, система скачкообразно переходит к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции SOC из ветви устойчивых режимов.

Здесь имеет смысл сделать два наблюдения: во-первых, в случае как устойчивых, так и неустойчивых режимов конвекция возникает одинаково: при одном и том же критическом значении управляющего параметра в результате прямой бифуркации колебательным образом. Во-вторых, переход к высокоинтенсивному режиму движения жидкости происходит в тот момент, когда в обоих типах решений максимальное значение функции тока в ячейке достигает одинакового критического значения $\psi_{max} = 1.31$.

Кроме того, была построена бифуркационная диаграмма для случая $C = 1.0$ (рис. 4.21).

По сравнению со случаем более слабой инъекции, пороги возникновения конвекции сильно сдвинуты вниз, так что она появляется в результате прямой бифуркации при $T = 655$ в форме бегущих волн, интенсивность конвекции в которых плавно нарастает по мере увеличения управляющего параметра, при этом фазовая скорость горизонтального движения конвективной структуры падает. Так продолжается вплоть до значения $T = 673$, при превышении которого

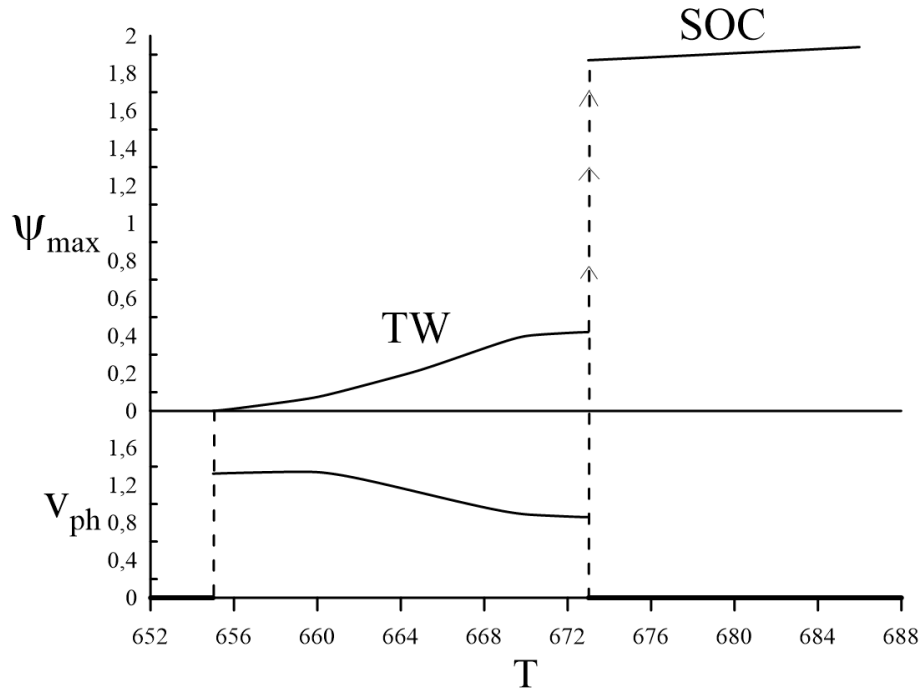


Рисунок 4.21 — Бифуркационная диаграмма режимов движения жидкости для максимального значения функции тока и фазовой скорости жидкости в зависимости от управляющего параметра T , $C = 1.0$, $L = 1.44$

в система скачкообразно переходит к режиму стационарной конвекции SOC. Для циклогексана с добавками соли [124] ($\epsilon = 2.2$, $K = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2 \cdot \text{с}/\text{В}$, $\eta = 0.979 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $V_0 = 405 \text{ В}$) получается электрическое число Релея $T = 670$, что отвечает интервалу, в котором численное моделирование предсказывает существование бегущей волны.

4.4 Волновые режимы конвекции в переменном поле

Целью данного раздела является исследование того, как гармоническая модуляция электрического потенциала на верхней обкладке конденсатора будет влиять на устойчивый режим бегущих волн. С этой целью модифицируется одно из граничных условий:

$$z = 0 : \Phi = \alpha \sin 2\pi \nu t, \quad (4.28)$$

где α — амплитуда модуляции потенциала на верхней обкладке конденсатора, а ν — линейная частота этой модуляции.

Будет рассматриваться влияние наложения периодического поля на надкритический режим бегущих волн, наблюдаемый при $C = 0.224$, $T = 6950$

(раздел 4.3.2). Фазовая скорость горизонтального движения конвективной структуры соответствует собственной частоте колебаний системы $\nu_0 = 1.35$.

4.4.1 Частота модуляции вдвое меньше собственной частоты

При частоте модуляции $\nu = \nu_0/2 = 0.675$ для набора амплитуд модуляции от $\alpha = 0.01$ до $\alpha = 0.05$ наблюдается режим модулированных бегущих волн MTW. В режиме MTW появляется модуляция максимального значения функции тока, то есть интенсивность конвекции в конвективных валах начинает периодически меняться с частотой, равной частоте модуляции (рис. 4.22).

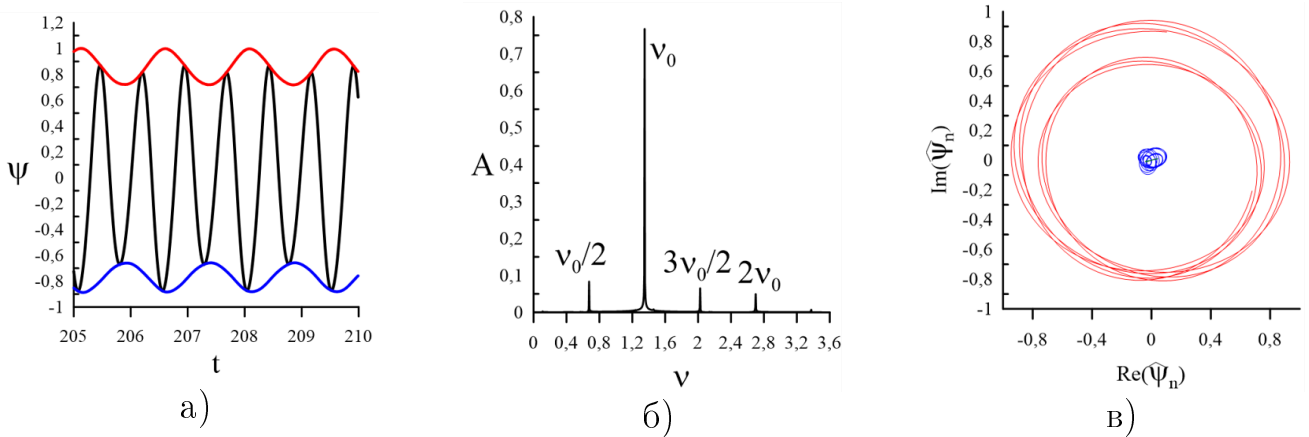


Рисунок 4.22 — Установившийся режим модулированной бегущей волны при частоте модуляции $\nu = \nu_0/2 = 0.675$ и амплитуде модуляции $\alpha = 0.05$. а) — зависимости от времени максимального значения функции тока в ячейке ψ_{max} (красным), минимального значения ψ_{min} (синим), функции тока в фиксированной точке ψ_{loc} (черным); б) — Фурье-спектр колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки; в) — фазовые траектории этого пространственного разложения функции тока в ряд Фурье; траектория первой гармоники красной линией, второй — синей, третьей — зеленой

Поскольку горизонтальное движение бегущей волны сохраняется, то в точке ячейки должна наблюдаться суперпозиция колебаний, вызванных модуляцией потенциала с частотой $\nu_0/2$ и бегущей волной, что видно на Фурье-спектре (рис. 4.22б). Фурье-разложения функции тока в ячейке по компонентам пространственных гармоник показывают, что при такой модуляции амплитуда уже первой компоненты изменяется со временем, а фазовый портрет демонстрирует существование двух предельных амплитуд колебания (рис. 4.22в).

4.4.2 Частота модуляции некратна собственной частоте

При частоте модуляции $\nu = 1$ и при амплитуде модуляции ($\alpha = 0.03$) в ячейке будет наблюдаться режим МТW (рис. 4.23),

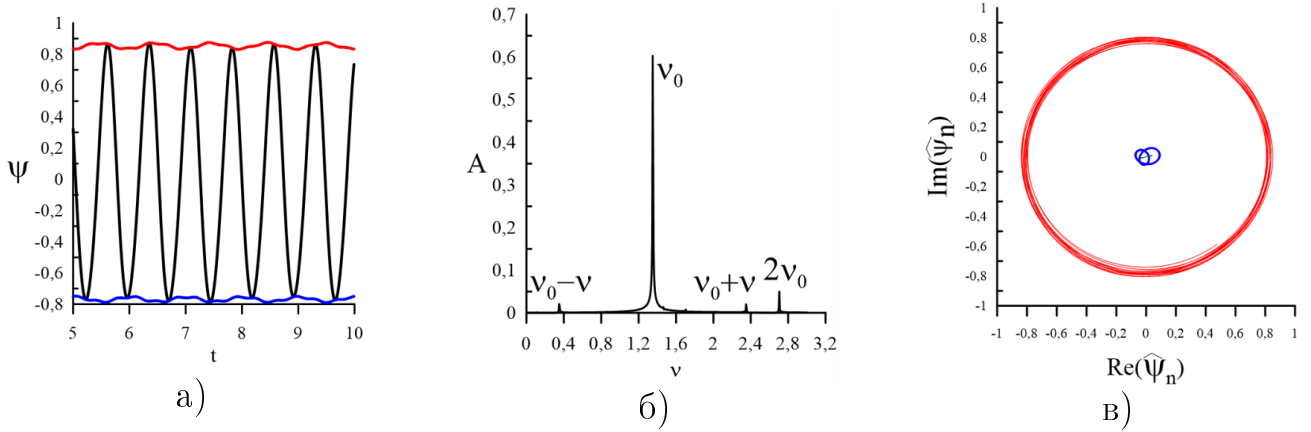


Рисунок 4.23 — Зависимости параметров системы при частоте модуляции $\nu = 1$ и амплитуде модуляции $\alpha = 0.03$. Система обозначений совпадает с рис. 4.22

отличающийся от предыдущего случая лишь тем, что модуляция интенсивности конвекции теперь будет происходить с частотой, несоизмеримой с собственной, а значит колебания функции тока в точке ячейки будут квазипериодическими (рис. 4.23б), и в Фурье-спектре колебаний присутствуют частоты, являющиеся линейными комбинациями собственной частоты системы ν_0 и внешней частоты ν . В колебаниях системы при этом наблюдается небольшая, но заметная ангармоничность (вклад второй и третьей гармоник в итоговое распределение порядка 10% от первой).

4.4.3 Частота модуляции равна собственной частоте

Интересным в данном случае является то, что при амплитудах, при которых режим МТW является устойчивым ($\alpha = 0.01$), модуляции интенсивности конвекции синхронизированы (рис. 4.24) с бегущей волной так, что в Фурье-спектре не появляется никаких дополнительных частот по сравнению с режимом TW (рис. 4.24б). По спектру колебаний функции тока в точке нельзя отличить режим бегущей волны от режима модулированной конвекции. При этом амплитуда первого компонента разложения функции тока по пространственным гармоникам не изменяется (рис. 4.24в).

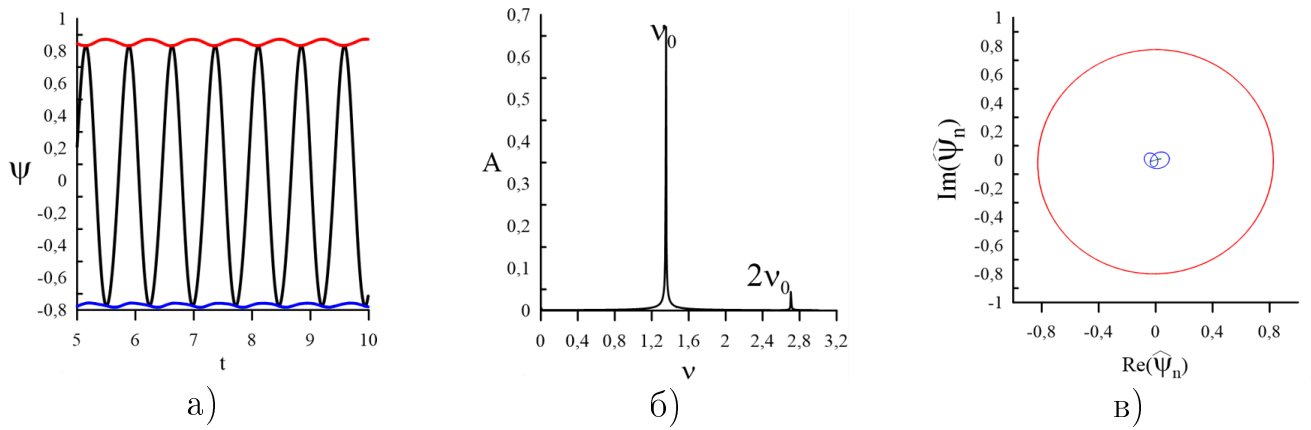


Рисунок 4.24 — Зависимости параметров системы при частоте модуляции $\nu = 1.35$ и амплитуде модуляции $\alpha = 0.01$. Система обозначений совпадает с рис. 4.22

4.4.4 Частота модуляции вдвое больше собственной частоты

Если еще больше увеличивать частоту конвекции ($\nu = 2\nu_0 = 2.7$), то режим МТВ теряет свою устойчивость даже при малых амплитудах модуляции (например при $\alpha = 0.01$). При удвоенной частоте модуляции режим МТВ устойчив лишь при $\alpha = 0.005$, но и в этом случае новых частот в Фурье-спектре функции тока в точке ячейки не обнаруживается (рис. 4.256).

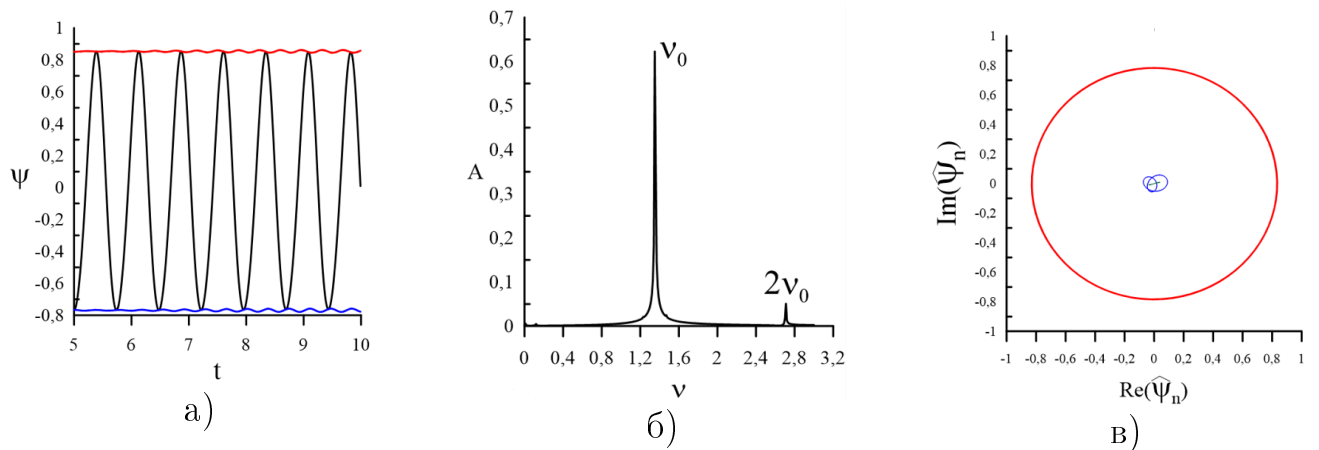


Рисунок 4.25 — Зависимости параметров системы при частоте модуляции $\nu = 2.7$ и амплитуде модуляции $\alpha = 0.005$. Система обозначений совпадает с рис. 4.22

Исследование откликов режима бегущих волн на модуляцию электрического поля можно обобщить следующим образом:

Модуляция поля вызывает изменение амплитуды пространственных гармоник $\psi_n(t)$. Поведение гармоник различно при разных соотношениях частот $Q = \nu/\nu_0$. В наиболее распространенном случае характерные частоты ν и ν_0 решения МТВ рационально не связаны друг с другом. Колебания амплитуды

первой гармоники $\psi_1(t)$ (рис. 4.23в) являются примером такого квазипериодического отклика с $Q = 0.74074$. Таким образом, траектория $\psi_1(t)$ (рис. 4.23в) не замкнута, и орбиты заполняют область между $|\psi_1(t)|_{max} = 0.83$ и $|\psi_1(t)|_{min} = 0.77$.

На рис. 4.24в и 4.25в изображены зависимости для модулированных бегущих волн с $Q = 1$ и 2 соответственно. Здесь орбиты $\psi_1(t)$ замыкаются после одного и двух периодов $\Phi(0,t)$ соответственно. Вклад второй гармоники $|\psi_2(t)|_{max} = 0.098$ не превышает 13% вклада первой гармоники. Вклад третьей гармоники невелик, $|\psi_3(t)|_{max} = 0.04$.

Как можно заметить, при увеличении частоты модуляции в четыре раза по сравнению с первым рассмотренным случаем, амплитуда, при которой устойчив режим MTW, уменьшается более чем в десять раз (с $\alpha = 0.05$ до $\alpha = 0.003$).

4.4.5 Параметрический резонанс

Во всех рассмотренных выше случаях, при варьировании частоты модуляции поля обнаруживается некая критическая амплитуда α^* , при которой режим модулированных бегущих волн (MTW) теряет свою устойчивость, и система скачкообразно переходит к режиму модулированной электроконвекции МЕС (этот режим подробно описаны в разделе 3.3.3). В этом модулированном электроконвективном режиме (МЕС) амплитуда функции тока изменяется в некоторых интервалах ($\psi_1 < \psi_{max}(t) < \psi_2$) синхронно с разностью потенциалов около немодулированного SOC-решения. Здесь же рассмотрим процесс перехода к нему (рис. 4.26).

Зависимость горизонтальной координаты максимума функции тока (соответствующая координате центра одного из конвективных валов) на графике мировой линии для промежутков времени $30 < t < 35$ рис. 4.266 демонстрирует движение конвективной структуры вдоль горизонтального направления, при этом это движение модулировано по фазе: траектория на характеристической плоскости имеет разный наклон касательной.

Для промежутков времени $47.5 < t < 50$, положение центра одного из конвективных валов колеблется вблизи интервалов $0.5 < x < 0.8$ и $1.5 < x < 1.8$, формируя на плоскости $t(x)$ следы, напоминающие по форме подкову. Левые границы этих интервалов соответствуют положениям экстремумов первой

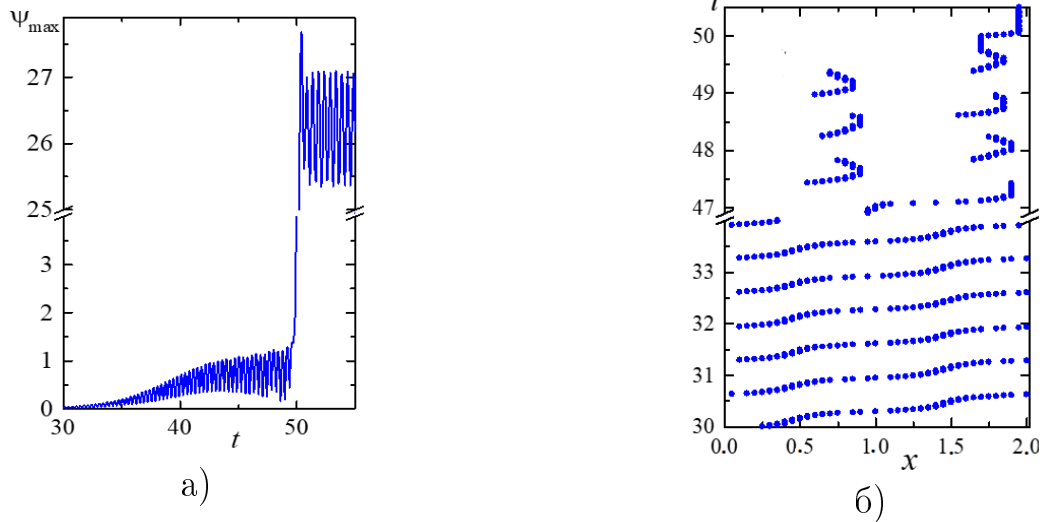


Рисунок 4.26 — Переход от режима модулированной бегущей волны МТВ к режиму модулированной конвекции МЕС. а) — временная зависимость максимального значения функции тока в ячейке, б) — поведение горизонтальной координаты максимума функции тока на характеристической плоскости. $Pr = 10$, $M = 14.14$, $C = 0.224$, $Ra = -2500$, $T = 6950$, $\alpha = 0.05$, $\nu = 2$.

пространственной гармонике, а само пульсирующее движение максимума и минимума конвективной структуры вперед и назад вызывается изменениями амплитуд второй пространственной гармонике. Спустя период по времени, соответствующий периоду модуляции поля, конвективные валы меняются местами. Для моментов времени $t > 50$ горизонтальная координата максимума функции тока становится постоянной, и конвективная структура прекращает пространственное движение. Это признак перехода системы к режиму МЕС.

Чем больше частота модуляции поля, тем меньше критическая амплитуда перехода к стационарной электроконвекции. Однако, более внимательное исследование демонстрирует, что зависимость критической амплитуды от частоты нелинейна, для нее обнаруживается серия минимумов, соответствующих конкретным частотам модуляции (рис. 4.27а).

Ниже этой кривой режим МТВ стабилен; выше этой границы стабильна модулированная электроконвекция (МЕС). Зависимость $\alpha_*(\nu)$ не является монотонной: нейтральная кривая содержит в себе большое количество локальных максимумов и минимумов. Такое поведение границы между режимами указывает на то, что в системе возникает параметрический резонанс (точки резонанса — локальные минимумы нейтральной кривой, в данном случае при $\nu_0/\nu = 1/2, 1, 2$). Он обусловлен тем, что при гармонической модуляции по-

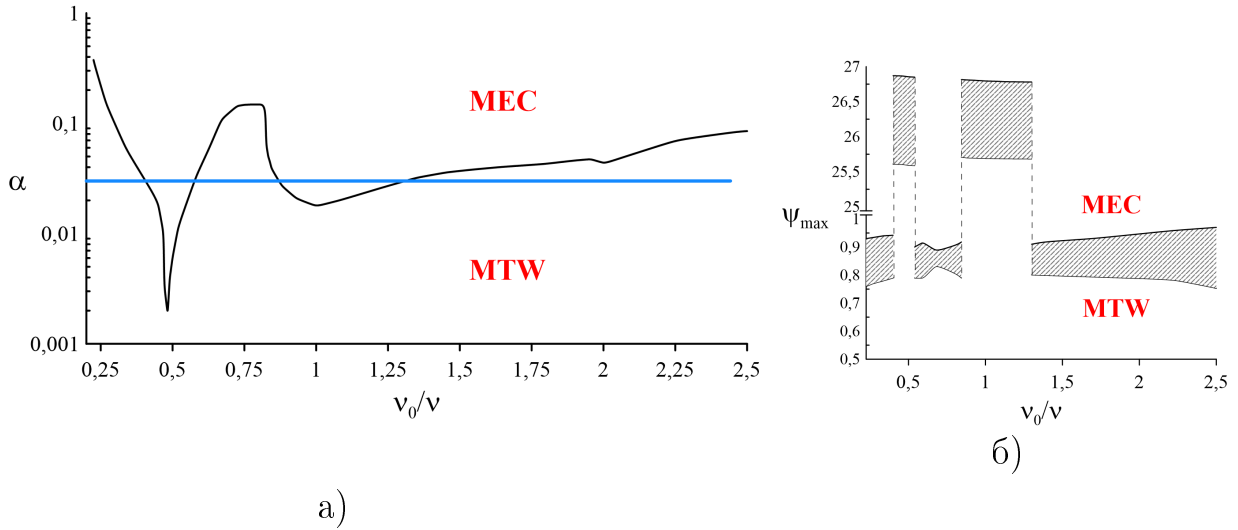


Рисунок 4.27 — Нейтральная кривая возникновения режима модулированной стационарной конвекции в логарифмическом масштабе (а), и наблюдаемая в системе амплитуда изменения максимального значения функции тока при фиксированной частоте $\alpha = 0.03$ (б). Голубой разрез на графике а) соответствует параметрам графика б)

тенциала на обкладке гармонически модулируется параметр T , фигурирующий в виде множителя переменных в исходной системе уравнений (4.1).

Интервал изменения амплитуды ψ_{max} в зависимости от частоты показан на рисунке 4.276 при $\alpha = 0.03$. Нижние заштрихованные области соответствуют модулированной бегущей волне. Можно видеть, что соотношение частот $\nu_0/\nu = 0.75$ между первыми двумя резонансными язычками является наименее благоприятным для параметрического возбуждения модулированной электроконвекции: диапазон изменения амплитуды ψ_{max} здесь минимален (рис. 4.276, $\nu_0/\nu = 0,75$). С увеличением периода внешней модуляции (ростом отношения ν_0/ν) интервал изменения амплитуды решений растет.

Верхние области на рис. 4.27 соответствуют решениям, расположенным внутри резонансных выступов, и характеризуют модулированную электропроводность (МЕС). Как следует из теории параметрического резонанса [92], условия для передачи энергии от внешнего источника к системе более благоприятны в первом резонансном диапазоне $0.40 < \nu_0/\nu < 0.58$, поэтому интервал изменения амплитуды отклика там больше, чем во втором резонансном диапазоне. язык $0.87 < \nu_0/\nu < 1.3$. Используя переменное электрическое поле, можно управлять интенсивностью конвекции и, следовательно, теплопередачей. Изменение частоты возбуждения переключает поток низкой интенсивности на более интенсивный.

Параметрический резонанс в системах, подобных колеблющемуся маятнику, у которого периодически меняется центр тяжести, или колебательному контуру с переменной емкостью, описываемых известным уравнением Матъё рассмотрен, например, в [92], и, по большей части, картина, наблюдаемая в данной задаче, похожа на результат, получаемый из линейной теории Флоке, но нельзя и не упомянуть про существенные различия.

Во-первых, согласно линейной теории, резонанс должен наблюдаться при соотношениях собственной частоты и частоты модуляции $\nu_0/\nu = n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. В текущей же задаче на нейтральной кривой отсутствует минимум при $\nu_0/\nu = 3/2 = 1.5$, что было проверено дополнительно. Во-вторых, в линейной системе ширина области резонанса уменьшается с ростом отношения ν_0/ν (рис. 4.28), в текущей же задаче наблюдается обратный эффект при переход от первой ко второй резонансной области.

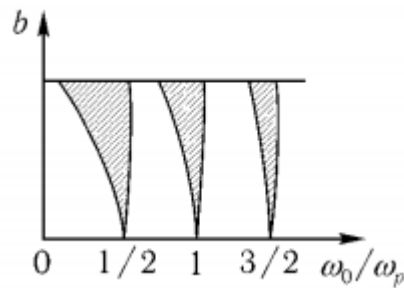


Рисунок 4.28 — График зон параметрической неустойчивости для уравнения Матъё, взятый из [92], b — амплитуда параметрической модуляции, ω_0 — собственная циклическая частота колебаний системы, ω_p — циклическая частота параметрической модуляции

Вообще, отличие от нуля значений нейтральной кривой в точках минимума, то есть наличие областей существования устойчивого режима под минимумами нейтральной кривой является эффектом, который обычно возникает в системах с диссипацией энергии, к которым относится и рассматриваемая система. Скорее всего, отсутствие резонанса при $\nu_0/\nu = 3/2$ также можно объяснить ярко выраженной нелинейностью исходной системы (4.1).

Также рассмотрим вопрос о возможности управления процессом увеличения теплопотока (рис. 4.29).

На данном рисунке в момент времени $t = 0$ с (жидкость, находится в состоянии бегущей волны при $T = 6950$) включается гармоническая модуляция потенциала на катоде с частотой, вдвое превышающей собственную частоту

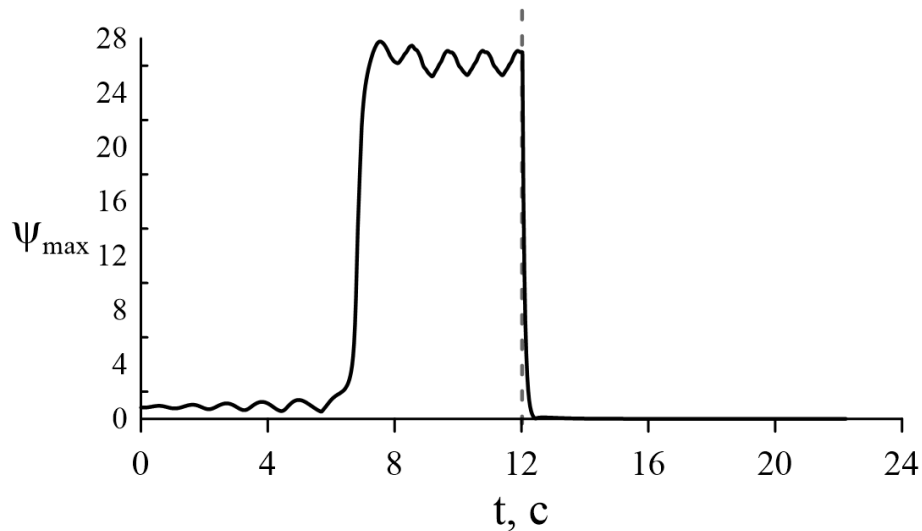


Рисунок 4.29 — Зависимость максимального значения функции тока от времени в размерном масштабе, переход от режима ТW к режиму МЕС, а затем к состоянию равновесия

бегущей волны и амплитудой $\alpha = 0.05$. Примерно за 6с через режим модулированных бегущих волн происходит возбуждение в системе высокоинтенсивных колебаний (режима МЕС).

Затем, в момент времени $T = 9$ с электрическое поле отключается (серый разрез рис. 4.29), и видно, что в силу нагрева сверху система практически мгновенно возвращается к состоянию механического равновесия. Для того, чтобы вновь возбудить в системе либо бегущие волны, либо модулированную электроконвекцию, необходимо после короткого отключения вновь подать напряжение на обкладки конденсатора либо без временной его модуляции, либо с ней.

4.5 Влияние расчетной сетки на электроконвективные численные решения

В рамках глав 3 и 4 для численного моделирования всегда использовалась сетка, состоящая из 41×21 узлов, соответствующая ячейке длиной $L = 2$, так что шаг сетки $h = 0.05$. Полагалось, что дальнейшее измельчение сетки не приводит к существенному изменению картины движения жидкости в ячейке. Действительно, результаты, полученные на такой «грубой» сетке, физичны и соответствуют данным линейной теории и результатам в изотремическом случае, а измельчение сетки для полноценного анализа привело бы к значительному увеличению машинного времени, затрачиваемого на вычисления. Кроме того,

нелинейные расчеты для задачи с инжекцией, зависящей от напряженности поля, показали, что измельчение сетки не влияет на возникающие надкритические режимы [18].

Рассмотрим, как влияет число узлов сетки на характер решений. Далее в расчетах, кроме основной сетки (41×21 узел), применялись более подробные, с числом узлов 61×31 и 81×41 .

4.5.1 Процедура билинейной интерполяции

В предыдущих исследованиях активно применялся метод «продолжения по параметру». Он заключается в том, что при расчетах в качестве начальных распределений функций системы используются финальные распределения функций, полученные при предыдущем расчете.

С одной стороны, такой подход ускоряет исследование: время, затрачиваемое системой на переход между двумя близкими состояниями, значительно меньше, чем время, которое бы потребовалось системе на то, чтобы перейти от каких-то начальных малых возмущений к конкретному состоянию.

С другой стороны, в подобных системах (и рассматриваемая система не является исключением) часто встречаются гистерезисы, и для того, чтобы не переключиться на другое решение, соответствующее тем же значениям управляющих параметров, необходимо в качестве начального условия использовать режим, соответствующий этой же ветви гистерезиса.

Для сравнения колебательных режимов на сетках различных масштабов также хотелось бы использовать метод «продолжения по параметру»: в качестве начального состояния системы на измельченной сетке использовать распределения функций, полученные на «грубой» сетке при тех же значениях управляющих параметров. Но, поскольку сетки обладают различным шагом, необходимо каким-то образом перемасштабировать распределения функций, определенных на «грубой» сетке. В силу того, что распределения функций тока, вихря, температуры, заряда и потенциала достаточно плавны (значения функций в соседних узлах близки), для перемасштабирования можно использовать процедуру билинейной интерполяции [125].

Данная процедура является обобщением процедуры линейной интерполяции, применяемой для нахождения значений дискретно-заданной функции

одной переменной $y = f(x)$, лежащих между узлами дискретизации. В рамках линейной интерполяции предполагается, что функция меняется между двумя соседними узлами ($y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$) линейно. Тогда, ввиду наличия двух точек (y_1, x_1) и (y_2, x_2) , через которые проходит линейная аппроксимация, всегда можно определить значение линейной аппроксимирующей функции между этими точками $f(x_1 > x > x_2) \approx y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

В рассматриваемой задаче изучаемые функции определены на плоскости $x - z$, и в случае билинейной интерполяции необходимо применить алгоритм линейной интерполяции несколько раз (рис. 4.30).

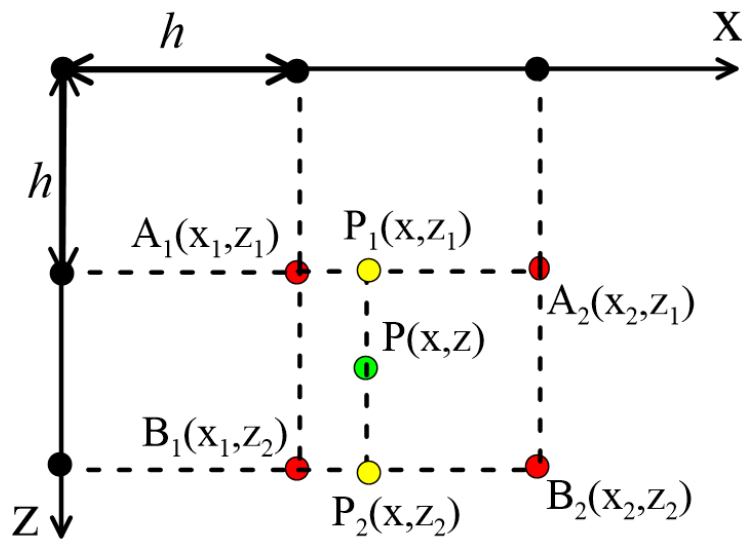


Рисунок 4.30 — Схема билинейной интерполяции

Для того, чтобы определить значение функции в точке P с координатами z и x , лежащей в прямоугольнике, ограниченном узлами A_1 , A_2 , B_1 и B_2 , необходимо сначала вычислить значения функции в вспомогательных точках P_1 и P_2 при помощи алгоритма линейной интерполяции, а затем и в самой искомой точке.

Программа, выполняющая эту процедуру, была написана в рамках данной работы и успешно применена для анализа.

4.5.2 Результаты анализа

Рассматривался случай электроконвекции в постоянном поле ($\alpha = 0$). Для численного моделирования были использованы следующие значения безразмерных параметров: число Прандтля $Pr = 10$, соответствующее широкому классу

слабопроводящих жидкостей [18; 71], число Релея $Ra = -2500$, отвечающее подогреву сверху, $C = 0.224$. Такая задача была численно смоделирована на сетке масштабом 41×21 узел. Была получена бифуркационная диаграмма режимов движения жидкости, а также проанализированы надкритические режимы.

Бегущие волны

При изучении влияния масштаба сетки на режим бегущих волн использовалось значение $T = 6950$, соответствующее бегущим волнам на «грубой» сетке 41×21 узел. Используя распределения функций при таких параметрах моделирования, перемасштабируя их для более мелких шагов сетки, методом продолжения по параметру были получены временные зависимости функций системы на измельченных сетках 61×31 узел ($h = 0,0(3)$) и 81×41 узел ($h = 0,025$).

Как можно видеть из рис. 4.31а, режим бегущих волн сохраняется и для более подробных сеток. Максимальное и минимальное значение функции тока в ячейке остается практически постоянным, а значение функции тока в конкретной точке ячейки меняется гармонически, что соответствует бегущей волне или горизонтальному движению волны с постоянной фазовой скоростью. Фурье-спектры колебательных зависимостей значения функции тока в точке ячейки для разных масштабов (рис. 4.31б) также практически совпадают.

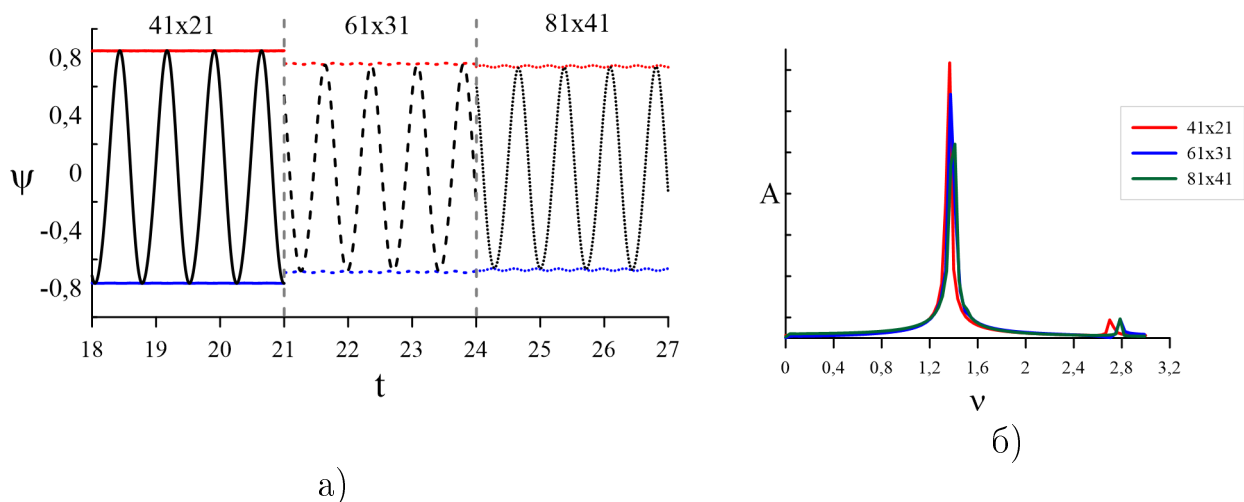


Рисунок 4.31 — а) Зависимость от времени максимального значения функции тока (красным), минимального значения функции тока (синим), значения функции тока в конкретной точке ячейки ($x = 0.5, z = 0.5$) (черным) при различных масштабах сетки: сплошная линия — 41×21 узел, штриховая — 61×31 узел, пунктирная — 81×41 узел. б) Фурье-спектры зависимости значения функции тока в той же точке ячейки от времени при различных масштабах сетки: красным — 41×21 узел, синим — 61×31 узел, зеленым — 81×41 узел, $T = 6950$

При измельчении сетки незначительно уменьшается интенсивность конвекции в ячейке (падает максимальное значение функции тока), и также незначительно возрастает скорость горизонтального движения жидкости (табл. 1).

Также были получены распределения функции тока ψ , отклонения заряда от равновесного Δq и отклонения температуры от равновесной $\Delta\theta$ в ячейке при различных масштабах сетки (рис. 4.32). Данные распределения практически идентичны для каждого из масштабов, и даже на самой грубой сетке 41×21 узел на одну пространственную структуру в распределении любой функции, характеризующей бегущую волну, приходится более десяти узлов сетки.

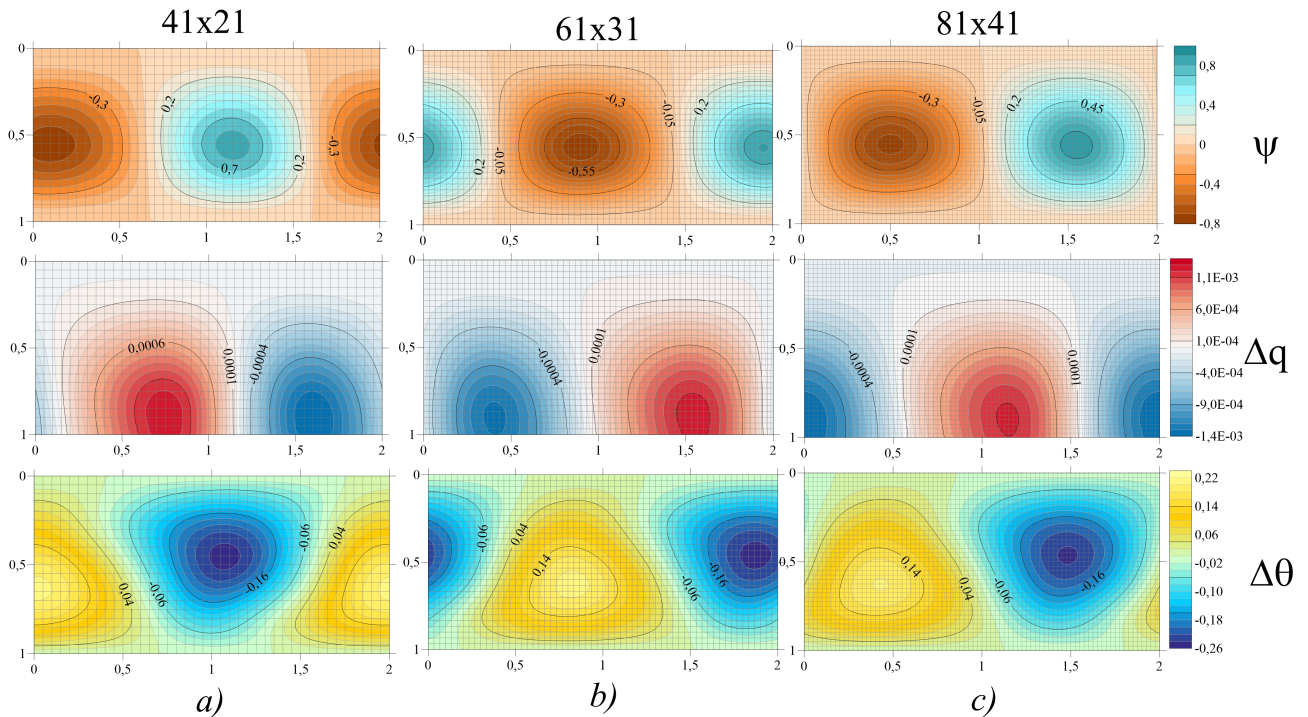


Рисунок 4.32 — Распределения функции тока ψ , отклонения заряда от равновесного Δq и отклонения температуры от равновесной $\Delta\theta$ в ячейке при различных масштабах сетки: а) 41×21 узел; б) 61×31 узел; в) 81×41 узел. Серая сетка соответствует сетке численного метода. Цветовые схемы совпадают для каждого из масштабов, $T = 6950$

Сравнение количественных характеристик (максимальное и минимальное значение функции тока в ячейке, фазовая скорость горизонтального движения жидкости) режима бегущих волн при различных масштабах сетки дано в таблице 1.

Модулированные бегущие волны

Таким же образом был исследован режим модулированных бегущих волн MTW, при $T = 7040$ он наблюдается как на «грубой» сетке 41×21 узлов,

размер сетки	41 × 21	61 × 31		81 × 41	
	значение	значение	разница с 41 × 21	значение	разница с 41 × 21
Ψ_{max}	0.847	0.756	≈ 11%	0.743	≈ 11%
Ψ_{min}	-0.767	-0.689	≈ 10%	-0.671	≈ 13%
$ v_{ph} $	2.72	2.74	≈ 1%	2.82	≈ 4%

Таблица 1 — Сравнение характеристик бегущей волны для различных масштабов сетки, $T = 6950$

так и на измельченной в полтора раза, содержащей 61×31 узел: появляется модуляция максимального и минимального значения функции в ячейке (рис. 4.33а), соответствующая модуляции интенсивности конвекции в валах, в Фурье-спектре значения функции тока в точке ячейки появляется дополнительная частота, соответствующая временной модуляции параметров (рис. 4.33б), а зависимость положения горизонтальной компоненты скорости максимального значения функции тока в ячейке отклоняется от линейной (рис. 4.33в), появляется модуляция фазовой скорости бегущей волны.

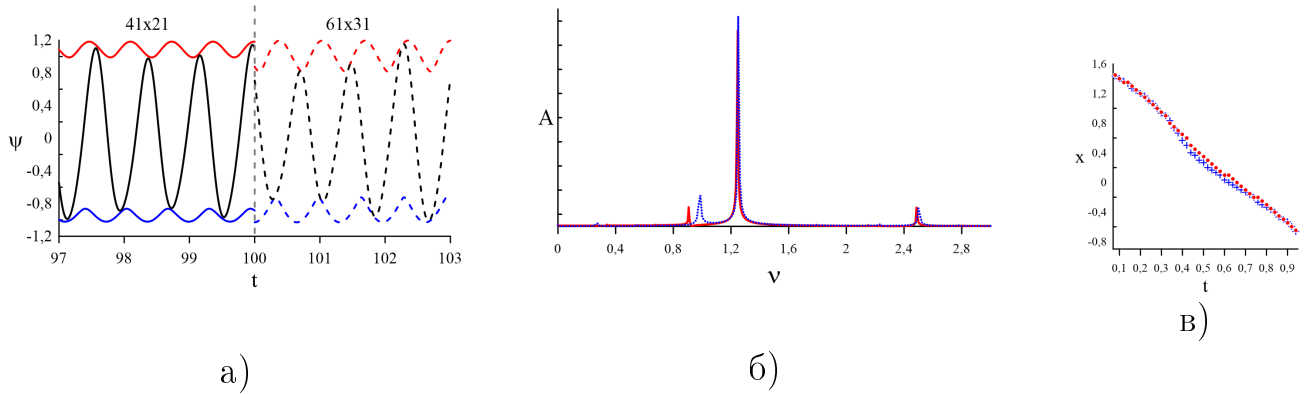


Рисунок 4.33 — а) Зависимость от времени максимального значения функции тока (красным), минимального значения функции тока (синим), значения функции тока в конкретной точке ячейки ($x = 0.5, z = 0.5$) (черным) при различных масштабах сетки: сплошная линия — 41×21 узел, штриховая — 61×41 узел. б) Фурье-спектры зависимости значения функции тока в той же точке ячейки от времени при различных масштабах сетки: красная сплошная линия — 41×21 узел, синяя пунктирная — 61×41 узел. в) Зависимость от времени x -координаты максимума функции тока в ячейке (левая вертикальная ось, символы) при различных масштабах сетки: красные точки и штрих-пунктирная линия — 41×21 узел, синие кресты и штриховая линия — 61×41 узел, $T = 7040$

Если сравнивать режим MTW на различных сетках, то можно заметить, что хотя максимальная и минимальная возможная интенсивность конвекции

на обеих сетках примерно одинакова, при переходе от крупной сетки к мелкой увеличивается интенсивность временной модуляции параметров, больше амплитуда колебаний максимального и минимального значений функции тока, больше частота модуляции, фазовая скорость жидкости меняется с большей амплитудой (рис. 4.33).

Распределения же функций системы в ячейке, как и в случае бегущей волны TW, практически идентичны на обеих сетках (рис. 4.34).

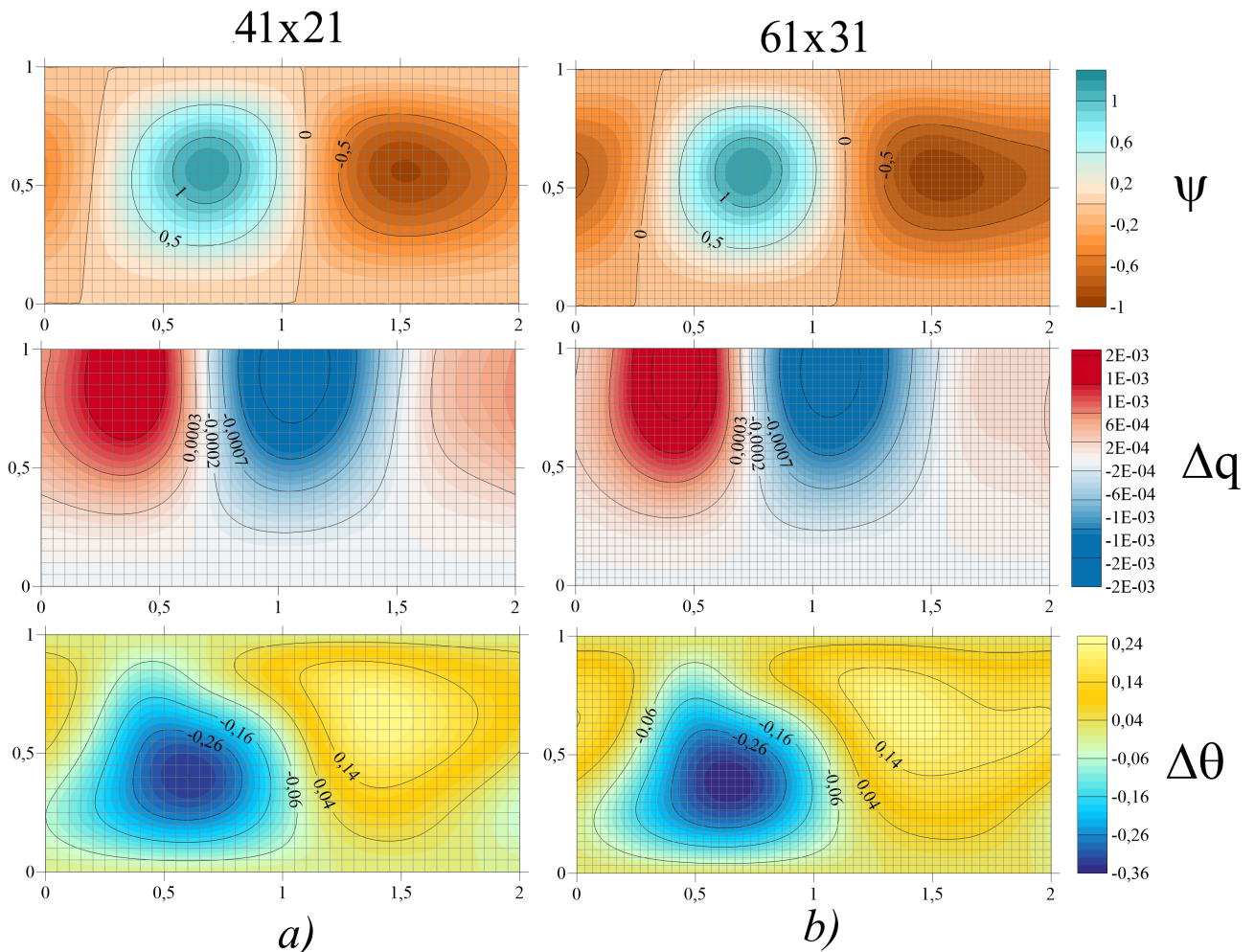


Рисунок 4.34 — Распределения функции тока ψ , отклонения заряда от равновесного Δq и отклонения температуры от равновесной $\Delta\theta$ в ячейке при различных масштабах сетки: а) 41×21 ; б) 61×41 узел. Серая сетка соответствует сетке численного метода. Цветовые схемы совпадают для каждого из масштабов, $T = 7040$

Сравнение количественных характеристик (максимальные и минимальные значения функции тока в ячейке, минимальная и максимальная фазовая скорость горизонтального движения жидкости) режима бегущих волн при различных масштабах сетки дано в таблице 2.

размер сетки	41 × 21	61 × 31	
	значение	значение	разница с 41 × 21
ψ_{max}	1.09	0.98	$\approx 10\%$
Ψ_{max}	1.18	1.20	$\approx 2\%$
Ψ_{max}	0,99	0.81	$\approx 4\%$
ψ_{min}	-0.95	-0.87	$\approx 8\%$
Ψ_{min}	-0.86	-0.72	$\approx 16\%$
Ψ_{min}	-1.02	-1.03	$\approx 1\%$
$ v_{ph} $	3.2	3.8	$\approx 19\%$
$ v_{ph} $	2.2	1.8	$\approx 18\%$

Таблица 2 — Сравнение характеристик модулированной бегущей волны на грубой и измельченной сетке, $T = 7040$

Пороги конвективных режимов

Значения, при которых возникает колебательная конвекция в неподвижной жидкости (электрическое число Релея, рис. 4.20) или происходит переход к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции (SOC, электрическое число Релея, рис. 4.20) для сеток 41×21 и 61×31 узлов приведены в таблице 3.

размер сетки	41 × 21	61 × 31	
	значение T	значение T	разница с 21x41
Возникновение конвекции	6805	6857	$< 1\%$
Переход к SOC	7061	7050	$< 1\%$

Таблица 3 — Сравнение порогов смены режимов на грубой и измельченной сетке

График сходимости решений в зависимости от шага расчетной сетки представлен на рис 4.35.

4.6 Итоги главы

Численно решена задача об электроконвекции слабопроводящей жидкости при наличии автономной инжекции на катоде. Рассмотрены случаи постоянного и модулированного переменного напряжения на обкладках конденсатора.

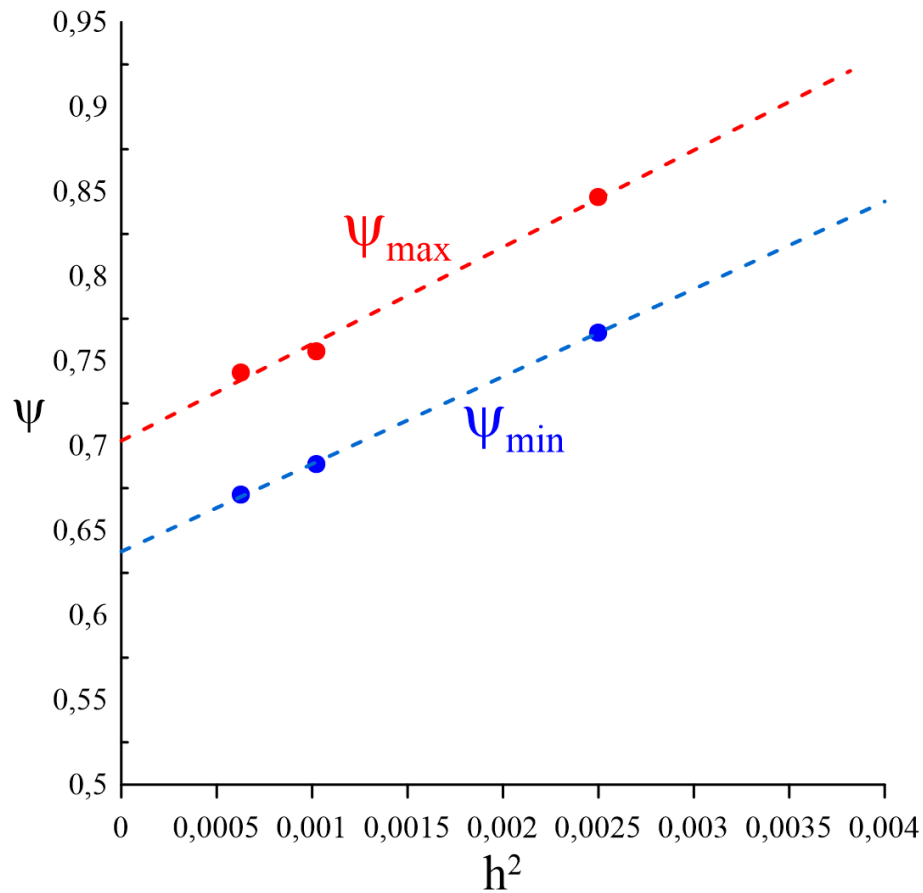


Рисунок 4.35 — Максимальные и минимальные значения функции тока в режиме бегущих волн в зависимости от квадрата шага расчетной сетки, а также их линейные аппроксимации

Использована полная постановка, учитывающая перераспределение электрического поля внутри конденсатора, вызываемое перераспределением заряженной массы.

В случае постоянного поля обнаружены устойчивый смешанный режим, режимы бегущих волн, модулированных бегущих волн, и неустойчивые режимы стоячих волн и модулированных стоячих волн. Также обнаружен переход к режиму высокоинтенсивной модулированной электроконвекции. Построена бифуркационная диаграмма устойчивых и неустойчивых режимов конвекции в зависимости от управляющего параметра, пропорционального напряжению на обкладках.

В случае переменного поля исследовано влияние частоты его колебаний на бегущие волны. Обнаружены различные виды отклика системы, субгармонический, квазипериодический и синхронный. Обнаружен параметрический резонанс: построена нейтральная кривая критической амплитуды колебаний внешнего поля, при которой происходит возбуждение высокоинтенсивных модулированных колебаний.

Исследован вопрос о влиянии расчетной сетки на результаты численного интегрирования. Показано, что измельчение сетки по сравнению с теми значениями, которые использовались в рамках данного исследования, не приводит к качественным изменениям в решениях, а лишь к незначительным количественным.

Заключение

Итоги выполненного исследования

1. На основе маломодовой модели проведен анализ влияния умеренного нагрева сверху и переменного электрического поля на поведение горизонтального слоя слабопроводящей жидкости, электропроводность которой зависит от температуры. Показано, что в широком интервале частот электроконвекция возникает в виде квазипериодических колебаний. Определены критические волновые числа и пороги конвекции. Обнаружен новый сценарий нелинейной эволюции течения, в котором рост электрического параметра приводит к последовательному появлению квазипериодических, хаотических, а затем синхронных колебаний. Бифуркационная диаграмма, содержащая области гистерезиса малоинтенсивных квазипериодических (переходящих в хаотические) колебаний и высокоинтенсивных синхронных получена впервые.
2. Обнаружен режим амплитудно- и фазовомодулированной бегущей волны, характеризующийся сильным нарушением симметрии конвективной структуры, проанализированы его особенности.
3. Впервые определено влияние интенсивности нагрева сверху, подвижности зарядов и степени инжекции на характеристики монотонной и колебательной неустойчивости в горизонтальном слое слабопроводящей жидкости при автономной униполярной инжекции с катода.
4. Для электротермоконвекции при наличии автономной инжекции обнаружено и изучено новое конвективное решение – режим смешанной конвекции, представляющий собой чередование фаз стоячей и бегущей волны.
5. Построены бифуркационные диаграммы и определены области существования различных состояний диэлектрической жидкости в постоянном электрическом поле: равновесия, смешанного состояния, бегущих и модулированных бегущих волн, стационарной конвекции.
6. Показано, что воздействие на диэлектрическую жидкость при инжекции с катода электрического поля на резонансных частотах даже с

крайне малой амплитудой колебаний может изменить характер течения и увеличить в несколько раз теплопоток через конденсатор.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы

Данные, полученные в результате изучения электроконвекции слабопроводящей жидкости, позволяют рекомендовать использование переменного электрического поля для переключения между режимами электроконвекции различной интенсивности, что важно при управлении интенсивностью течений и теплопереноса в различных технологических ситуациях. Проанализированные в работе режимы бегущих волн, распространяющихся в слабопроводящих жидкостях, следует исследовать в случае действия пульсирующего электрического поля.

Список литературы

1. *Taylor, G. I.* Studies in electrohydrodynamics. Circulation produced in a drop by an electric field / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1966. — Vol. 291. — P. 159—166.
2. *Пикин, С. А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. / С. А. Пикин. — Наука, 1981. — 336 с.
3. *Cross, M. C.* Pattern formation outside of equilibrium / M. C. Cross, P. C. Hohenberg // Rev. Mod. Phys. — 1993. — Vol. 65. — P. 851—1112.
4. *Melcher, J. R.* Continuum Electromechanics, 1st edn. / J. R. Melcher. — MIT Press, 1981. — 640 p.
5. *Gross, M. J.* Electrically induced convection in dielectric liquids / M. J. Gross, J. E. Porter // Nature. — 1966. — Vol. 212, no. 5068. — P. 1343—1345.
6. *Atten, P.* Stabilite hydrodynamique des liquids isolants soumis a une injection unipolaire / P. Atten, R. Moreau // J. Me'can. — 1972. — Vol. 11. — P. 471—520.
7. *Остроумов, Г. А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. / Г. А. Остроумов. — М. : Физматгиз, 1972. — 292 с.
8. *Lacroix, J. C.* Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection / J. C. Lacroix, P. Atten, E. J. Hopfinger // Journal of Fluid Mechanics. — 1975. — Июнь. — Т. 69. — С. 539—563.
9. *Болога, М. К.* Электроконвекция и теплообмен / М. К. Болога, Ф. П. Гроссу, И. А. Кожухарь. — Кишнев : Штиинца, 1977. — 320 с.
10. *Стишков, Ю. К.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. / Ю. К. Стишков, А. А. Остапенко. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1989. — 172 с.
11. *Саранин, В. А.* Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. / В. А. Саранин. — Издательство: РХД, 2009. — 332 с.
12. *Де Жен, П.* Физика жидких кристаллов. / П. Де Жен. — Мир, 1977. — 400 с.
13. *Ашкрофт, Н.* Физика твердого тела. Т. 1 / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. — Мир, 1979. — 399 с.

14. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.
15. *Zaltzman, B.* Electro-osmotic slip and electroconvective instability. / B. Zaltzman, R. I. // J. Fluid Mech. — 2007. — Vol. 279. — P. 173—226.
16. *Atten, P.* Electroconvection and its effect on heat transfer. / P. Atten, F. M. J. McCluskey, A. T. Perez // IEEE Trans. Electr. Insul. — 1988. — No. 23. — P. 659—667.
17. *Майер, В. В.* Простые лекционные демонстрации неустойчивости и самоорганизации / В. В. Майер, Е. И. Вараксина, В. А. Саранин // Усп. физ. наук. — 2014. — Т. 184, № 11. — С. 1249—1254.
18. *Мордвинов, А. Н.* Электроконвекция при инъекции с катода и нагреве сверху / А. Н. Мордвинов, Б. Л. Смородин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2012. — Т. 141, № 5. — С. 997—1005.
19. Electro-thermo-convection in a differentially heated square cavity under arbitrary unipolar injection of ions / R. D. Selvakumar [et al.] // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2021. — Vol. 89. — P. 108787.
20. Electroconvective stability in a horizontal capacitor / S. R. Kosvintsev [et al.] // Proceedings of International Conference «Modern Problems of Electrophysics and Electrohydrodynamics of Liquids» (MPEEL). — 2000. — P. 79—82.
21. *Turnbull, R. J.* Electroconvective Instability with a Stabilizing Temperature Gradient. I. Theory / R. J. Turnbull // The Physics of Fluids. — 1968. — Vol. 11, no. 12. — P. 2588—2596.
22. *Turnbull, R. J.* Electroconvective Instability with a Stabilizing Temperature Gradient. II. Experimental Results / R. J. Turnbull // The Physics of Fluids. — 1968. — Vol. 11, no. 12. — P. 2597—2603.
23. *Lee, C. O.* Thermal instability of a slightly conducting liquid layer in a vertical electric field / C. O. Lee // Proceedings of 5th International Heat Transfer Conference. Vol. 3. — 1974. — P. 173—177.
24. *Саранин, В. А.* О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле / В. А. Саранин // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. — 1976. — № 5. — С. 16—23.

25. *Martin, P. J.* Conductivity models of electrothermal convection in a plane layer of dielectric liquid / P. J. Martin, A. T. Richardson // *Journal of Heat Transfer*. — 1984. — Vol. 106. — P. 131—136.
26. *Косвинцев, С. Р.* Экспериментальное изучение электроконвекции в плоском слое неоднородно нагретых слабопроводящих жидкостей / С. Р. Косвинцев // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. — 1994. — № 2. — С. 128—140.
27. *Жданов, С. А.* Влияние электрического поля на устойчивость термогравитационного течения в вертикальном конденсаторе / С. А. Жданов, С. Р. Косвинцев, И. Ю. Макарихин // *ЖЭТФ*. — 2000. — Т. 117, № 2. — С. 398—406.
28. *Макарихин, И. Ю.* О влиянии электрического поля на устойчивость конвективного течения в вертикальной полости / И. Ю. Макарихин // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. — 1994. — № 5. — С. 35—41.
29. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1982. — 736 с.
30. *Ильин, В. А.* Динамика электроконвективных структур слабопроводящей жидкости / В. А. Ильин, Б. Л. Смородин // *Прикл. мех. технич. физ.* — 2008. — 49(3), 20. — С. 30—32.
31. *Ильин, В. А.* Конвекция омической жидкости в переменном электрическом поле / В. А. Ильин, Б. Л. Смородин // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. — 2003. — № 1. — С. 102—107.
32. *Ильин, В. А.* Нелинейные режимы конвекции слабопроводящей жидкости / В. А. Ильин, Б. Л. Смородин // *Письма в ЖТФ*. — 2007. — Т. 33. — С. 81—87.
33. *Ильин, В. А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле / В. А. Ильин // *Журнал технической физики*. — 2013. — Т. 83, № 1. — С. 64—73.
34. *Lorenz, E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow / E. N. Lorenz // *Journal of Atmospheric Sciences*. — Boston MA, USA, 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130—141.
35. *Smorodin, B. L.* On the parametric excitation of electrothermal instability in a dielectric liquid layer using an alternating electric field / B. L. Smorodin,

- M. G. Verlade // Journal of Electrostatics. — 2001. — Vol. 50, no. 3. — P. 205—226.
36. *Ильин, В. А.* Периодические и хаотические режимы электроконвекции жидкого диэлектрика в горизонтальном конденсаторе / В. А. Ильин, Б. Л. Смородин // Письма в журнал технической физики. — 2005. — № 10. — С. 57—63.
37. *Siddheshwar, P.* Linear and nonlinear electroconvection under AC electric field / P. Siddheshwar, D. Radhakrishna // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2012. — Vol. 17, no. 7. — P. 2883—2895.
38. *Смородин, Б. Л.* Динамика волновых электроконвективных течений в модулированном электрическом поле / Б. Л. Смородин, А. В. Тараут // ЖЭТФ. — 2014. — Т. 145, № 1. — С. 180—188.
39. *Finucane, R.* Onset of instability in a fluid layer heated sinusoidally from below / R. Finucane, R. Kelly // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1976. — Vol. 19, no. 1. — P. 71—85.
40. *Ahlers, G.* Thermal convection under external modulation of the driving force. II. Experiments / G. Ahlers, P. C. Hohenberg, M. Lücke // Phys. Rev. A. — 1985. — Dec. — Vol. 32, issue 6. — P. 3519—3534.
41. *Картавых, Н. Н.* Численное моделирование электроконвекции слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле / Н. Н. Картавых, В. А. Ильин // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — окт. — Т. 7, № 3. — С. 260—269.
42. *Картавых, Н. Н.* Параметрическая электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном плоском конденсаторе / Н. Н. Картавых, Б. Л. Смородин, В. А. Ильин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2015. — Т. 148, 1 (7). — С. 178—189.
43. *Smorodin, B.* Periodic and Chaotic Oscillations in a Low Conducting Liquid in an Alternating Electric Field / B. Smorodin, N. Kartavykh // Microgravity Science and Technology. — 2020. — June. — Vol. 32.
44. *Фарадей, М.* Экспериментальные исследования по электричеству / М. Фарадей. — М. : Изд-во АН СССР, 1947. — 540 с.
45. *Сканави, Г. И.* Физика диэлектриков: область слабых полей / Г. И. Сканави. — М. : Физматгиз, 1949. — 500 с.

46. *Сканави, Г. И.* Физика диэлектриков: область сильных полей / Г. И. Сканави. — М. : Физматгиз, 1958. — 908 с.
47. *Адамчевский, И.* Электрическая проницаемость жидких диэлектриков / И. Адамчевский. — Л. : Энергия, 1972. — 296 с.
48. *Жакин, А. И.* Ионная электропроводность и комплексообразование в жидких диэлектриках / А. И. Жакин // Успехи физ. наук. — 2003. — Т. 173, № 1. — С. 51—68.
49. *Жакин, А. И.* Приэлектродные и переходные процессы в жидких диэлектриках / А. И. Жакин // Успехи физ. наук. — 2006. — Т. 176, № 3. — С. 289—310.
50. *Тарунин, Е. Л.* Расчет электрогидродинамического течения в сильно неоднородных электрических полях / Е. Л. Тарунин, Ю. А. Ямшина // Магнитная гидродинамика. — 1990. — № 2. — С. 142—144.
51. *Malraison, B.* Chaotic Behavior of Instability Due to Unipolar Ion Injection in a Dielectric Liquid / B. Malraison, P. Atten // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Sept. — Vol. 49, issue 10. — P. 723—726.
52. *Atten, P.* Electrohydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection: non linear phenomena / P. Atten, J. Lacroix // J. Electrostatic. — 1978. — Vol. 5. — P. 439—452.
53. *Тарунин, Е. Л.* Ветвление стационарных решений системы уравнений электрогидродинамики при униполярной инжекции / Е. Л. Тарунин, Ю. А. Ямшина // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 1994. — № 3. — С. 23—29.
54. *Ермолаев, И. А.* Численное исследование униполярной инжекции при электроконвективном движении в плоском слое трансформаторного масла / И. А. Ермолаев, А. И. Жбанов // Изв. РАН. МЖГ. — 2003. — № 6. — С. 3—7.
55. *Pontiga, F.* Physical mechanisms of instability in a liquid layer subjected to an electric field and a thermal gradient / F. Pontiga, A. Castellanos // Physics of Fluids. — 1994. — Т. 6, № 5. — С. 1684—1701.
56. *Polyansky, V.* Electric current oscillations in low-conducting liquids / V. Polyansky, I. Pankratieva // Journal of Electrostatics. — 1999. — Vol. 48, no. 1. — P. 27—41.

57. *Панкратьева, И. Л.* Моделирование электрогидродинамических течений в слабопроводящих жидкостях / И. Л. Панкратьева, В. А. Полянский // ПМТФ. — 1995. — Т. 36, № 4. — С. 36—44.
58. *Панкратьева, И. Л.* Образование сильных электрических полей при течении жидкости в узких каналах / И. Л. Панкратьева, В. А. Полянский // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 5. — С. 619—622.
59. *Prybylov, V. N.* Experimental study of electrization current of dielectric liquids in cylindrical pipe / V. N. Prybylov // Colloid. J. — 1996. — Vol. 58. — P. 524—527.
60. *Atten, P.* Chaotic motion in a coulomb force driven instability: Large aspect ratio experiments / P. Atten, J. Lacroix, B. Malraison // Physics Letters A. — 1980. — Vol. 79, no. 4. — P. 255—258.
61. *Tobazeon, R.* Electrohydrodynamic instabilities and electroconvection in the transient and A.C. regime of unipolar injection in insulating liquids: A review / R. Tobazeon // Journal of Electrostatics. — 1984. — Vol. 15, no. 3. — P. 359—384.
62. *Верещага, А. Н.* Надкритические режимы униполярной конвекции в замкнутой полости // Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости / А. Н. Верещага, Е. Л. Тарунин // Свердловск: УрО АН СССР. — 1988. — Июль. — Т. 4, № 2. — С. 93—99. — An optional note.
63. *Верещага, А. Н.* Унарная электроконвекция в плоском слое // Гидродинамика и процессы тепломассопереноса / А. Н. Верещага // Свердловск: УрО АН СССР. — 1989. — С. 42—47.
64. Лазерно- и магнетронно-модифицированные инжектирующие поверхности электродов для ЭГД-преобразователей / А. Е. Кузько [и др.] // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии / Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies. — 2022. — 12(3). — С. 147—168.
65. *Стишков, Ю. К.* Формирование электрогидродинамических течений в сильнонеоднородных электрических полях при двух механизмах зарядообразования / Ю. К. Стишков, В. А. Чирков // Журнал теоретической физики. — 2012. — Т. 82, вып. 1. — С. 3—13.

66. *Кузько, А. Е.* Особенности изменения микрорельефа поверхностей электродов при электроконвекции в ПМС-50 / А. Е. Кузько // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Физика и химия. — 2014. — № 1. — С. 24—30.
67. *Felici, N.* Phenomenes hydro et aerodynamiques dans la conduction des dielectriques fluides / N. Felici // Revue Gen. Electricite. — 1969. — Vol. 78. — P. 717—734.
68. *Castellanos, A.* Electrothermal Convection: Felici's Hydraulic Model and the Landau Picture of Non-Equilibrium Phase Transitions / A. Castellanos, P. Atten, M. G. Velarde // J. Non-Equilib. Thermodyn. — 1984. — Vol. 9, no. 4. — P. 235—244.
69. *Castellanos, A.* Oscillatory and steady convection in dielectric liquid layers subjected to unipolar injection and temperature gradient / A. Castellanos, P. Atten, M. G. Velarde // The Physics of Fluids. — 1984. — Vol. 27, no. 7. — P. 1607—1615.
70. *Worraker, W. J.* The effect of temperature-induced variations in charge carrier mobility on a stationary electrohydrodynamic instability / W. J. Worraker, A. T. Richardson // Journal of Fluid Mechanics. — 1979. — Vol. 93, no. 1. — P. 29—45.
71. Numerical modelling of finite-amplitude electro-thermo-convection in a dielectric liquid layer subjected to both unipolar injection and temperature gradient / P. Traoré [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 658. — P. 279—293.
72. *Wu, J.* A Finite-Volume Method for Electro-Thermoconvective Phenomena in a Plane Layer of Dielectric Liquid / J. Wu, P. Traoré // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. — 2015. — Vol. 68, no. 5. — P. 471—500.
73. *Li, T.-F.* Suppression of Rayleigh-Bénard secondary instability in dielectric fluids by unipolar charge injection / T.-F. Li, K. Luo, H.-L. Yi // Physics of Fluids. — 2019. — Vol. 31, no. 6. — P. 064106.
74. Charge injection enhanced natural convection heat transfer in horizontal concentric annuli filled with a dielectric liquid / J. Wu [et al.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2016. — Vol. 92. — P. 139—148.

75. *Ильин, В. А.* Волновые режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле / В. А. Ильин, В. Н. Александрова // ЖЭТФ. — 2020. — Т. 157, № 2. — С. 349—356.
76. *Смородин, Б. Л.* Волновые режимы электроконвекции при инжекции с катода и нагреве сверху / Б. Л. Смородин // ЖЭТФ. — 2022. — Т. 161, № 1. — С. 137—148.
77. *Smorodin, B. L.* Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity / B. L. Smorodin, I. N. Cherepanov // Eur. Phys. J. E. — 2014. — Vol. 37, 118.
78. *Черепанов, И. Н.* Течение коллоида в горизонтальной ячейке при подогреве сбоку / И. Н. Черепанов // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 135—144.
79. *Черепанов, И. Н.* Возникновение и нелинейные режимы конвекции трехкомпонентной смеси в прямоугольной области пористой среды с учетом эффекта Соре / И. Н. Черепанов // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2019. — Т. 12, № 3. — С. 249—262.
80. *Niemela, J. J.* Localized traveling-wave states in binary-fluid convection / J. J. Niemela, G. Ahlers, D. S. Cannell // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Mar. — Vol. 64, issue 12. — P. 1365—1368.
81. Concentration field in traveling-wave and stationary convection in fluid mixtures / K. D. Eaton [et al.] // Phys. Rev. A. — 1991. — June. — Vol. 43, issue 12. — P. 7105—7108.
82. Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states / W. Barten [et al.] // Phys. Rev. E. — 1995. — June. — Vol. 51, issue 6. — P. 5636—5661.
83. *Winkler, B. L.* Measurements of the concentration field in nonlinear travelling-wave convection / B. L. Winkler, P. Kolodner // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 240. — P. 31—58.
84. *Kolodner, P.* Dynamics of Traveling Waves near the Onset of Convection in Binary Fluid Mixtures / P. Kolodner, C. M. Surko, H. Williams // Proceedings of the Eighth Annual International Conference of the Center for Nonlinear

- Studies on Advances in Fluid Turbulence. — Los Alamos, New Mexico, USA : North-Holland Publishing Co., 1989. — P. 319—333.
85. *Liu, M.* Traveling-wave convection in a narrow rectangular cell / M. Liu, J. R. d. Bruyn // Canadian Journal of Physics. — 1992. — Vol. 70, no. 9. — P. 689—695.
 86. *Жакин, А. И.* Электрогидродинамические течения и теплообмен в системе электродов лезвие – плоскость / А. И. Жакин, А. Е. Кузько // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2013. — № 3. — С. 31—42.
 87. Electrohydrodynamic plumes due to autonomous and nonautonomous charge injection by a sharp blade electrode in a dielectric liquid / P. Traore [et al.] // IEEE Trans. Ind. Appl. — 2015. — Vol. 51. — P. 2504—2512.
 88. *Мизев, А.* Электрогидродинамическая неустойчивость смеси бензола и хлорбензола в неоднородном переменном электрическом поле / А. Мизев, А. Шмыров, Р. Федосеев // Вестник Пермского университета. Физика. — 2022. — мар. — № 1. — С. 58—65.
 89. *Сираев, Р. Р.* Численное моделирование электрогидродинамической конвекции, генерируемой быстро осциллирующей автоэлектронной эмиссией / Р. Р. Сираев, Д. А. Брацун // Вычислительная механика сплошных сред. — 2022. — июл. — Т. 15, № 2. — С. 193—208.
 90. *Reynolds, O.* On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion / O. Reynolds // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A. — 1895. — Jan. — Vol. 186.
 91. *Poincaré, J. H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique / J. H. Poincaré // Acta Math. — 1890. — Vol. 13, no. 1/2. — P. 5—271.
 92. *Рабинович, М. И.* Введение в теорию колебаний и волн. / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 560 с.
 93. Странные аттракторы. сер. Новое в зарубежной науке. Математика. № 22 / Е. Лоренц [и др.]. — М. : Мир, 1981. — 253 с.
 94. *Кроновер, Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р. М. Кроновер. — М. : Постмаркет, 2000. — 352 с.

95. *Берже, П.* Порядок в хаосе. О детерминированном подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видалль. — М. : Мир, 1991. — 368 с.
96. *Sheu, L.-J.* An autonomous system for chaotic convection in a porous medium using a thermal non-equilibrium model / L.-J. Sheu // *Chaos Solitons & Fractals - CHAOS SOLITON FRACTAL*. — 2006. — Nov. — Vol. 30. — P. 672—689.
97. *Jawdat, J.* Low Prandtl number chaotic convection in porous media with uniform internal heat generation / J. Jawdat, I. Hashim // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. — 2010. — Vol. 37, no. 6. — P. 629—636.
98. *Srivastava, A.* Heat and Mass Transfer, and Chaotic Convection in Nanofluids / A. Srivastava, B. Bhadauria // *Journal of Nanofluids*. — 2023. — Jan. — Vol. 12. — P. 904—918.
99. *Laroze, D.* Chaotic convection in a ferrofluid / D. Laroze, P. Siddheshwar, H. Pleiner // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2013. — Sept. — Vol. 18. — P. 2436—2447.
100. *Капица, П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. / П. Л. Капица // *ЖЭТФ*. — 1951. — Т. 21, № 5. — С. 588—597.
101. *Коддингтон, Э. А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1958. — 474 с.
102. *Nepomnyashchy, A.* Generation of nonlinear Marangoni waves in a two-layer film by heating modulation / A. Nepomnyashchy, I. Simanovskii // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Vol. 771. — P. 159—192.
103. *Smorodin, B. L.* Convection in binary fluid mixtures with modulated heating / B. L. Smorodin, M. Lücke // *Phys. Rev. E*. — 2009. — Feb. — Vol. 79, issue 2. — P. 026315.
104. Numerical prediction of transient electrohydrodynamic instabilities under an alternating current electric field and unipolar injection / C.-T. Zhou [et al.] // *Heliyon*. — 2023. — Vol. 9, no. 1. — e12812.

105. *Nguyen, V. D.* Mechanism of electrohydrodynamic printing based on ac voltage without a nozzle electrode / V. D. Nguyen, D. Byun // Applied Physics Letters. — 2009. — Vol. 94, no. 17. — P. 173509.
106. *Kim, J.* Electrohydrodynamic drop-on-demand patterning in pulsed cone-jet mode at various frequencies / J. Kim, H. Oh, S. S. Kim // Journal of Aerosol Science. — 2008. — Vol. 39, no. 9. — P. 819—825.
107. Alternating current electrohydrodynamics in microsystems: Pushing biomolecules and cells around on surfaces / R. Vaidyanathan [et al.] // Biomicrofluidics. — 2015. — Vol. 9, no. 6. — P. 061501.
108. *Nekrasov, O.* Electro-Thermo-Convection of a Dielectric Liquid in the External DC and AC Electric Fields / O. Nekrasov, B. Smorodin // Mathematics. — 2023. — Feb. — Vol. 11, no. 5. — P. 1188.
109. *Жакин, А. И.* Обзоры актуальных проблем. Электродинамика / А. И. Жакин // Успехи физических наук. — 2012. — Т. 182, № 5. — С. 495—520.
110. *Гершуни, Г. З.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. — М. : Наука, 1972. — 392 с.
111. *Федорюк, М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука, 1985. — 448 с.
112. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
113. *Nekrasov, O. O.* Electroconvection instability of poorly conducting fluid in alternating electric field / O. O. Nekrasov, N. N. Kartavykh // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. — 2019. — Vol. 7, no. 3. — P. 217—225.
114. *Смирнов, С. В.* Основы вычислительной физики: учеб. пособие. Ч. I. / С. В. Смирнов. — Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015. — 113 с.
115. *Nekrasov, O.* Effect of charge modulation on the electroconvective flow of a low conducting liquid / O. Nekrasov, B. Smorodin // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2021. — May. — Vol. 16, no. 35.
116. *Ryzhkov, I. I.* Modelling of electrochemically switchable ion transport in nanoporous membranes with conductive surface. / I. I. Ryzhkov, A. S. Vyatkin, M. I. Medvedeva // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. — 2019. — No. 12. — P. 579—589.

117. *Тарунин, Е. Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е. Л. Тарунин. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1990. — 228 с.
118. *Верещага, А. Н.* Численные исследования электроконвекции в слабопроводящих жидкостях с различными физическими свойствами : Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. / Верещага А. Н. — Пермь, 1990. — 125 с.
119. *Pérez, A. T.* Role of charge diffusion in finite-amplitude electroconvection / A. T. Pérez, A. Castellanos // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Nov. — Vol. 40, no. 10. — P. 5844—5855.
120. *Nekrasov, O.* The Electroconvective Flows of a Weakly Conducting Liquid in the External DC and AC Electric Fields. / O. Nekrasov, B. Smorodin // *Microgravity Sci. Technol.* — 2022. — Т. 34, № 75.
121. *Некрасов, О. О.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции и нагреве сверху / О. О. Некрасов, Б. Л. Смородин // *Вычислительная механика сплошных сред.* — 2022. — ноя. — Т. 15, № 3. — С. 316—332.
122. *Ascher, U. M.* Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations / U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, R. D. Russell. — Society for Industrial, Applied Mathematics, 1995.
123. *Castellanos, A.* Numerical Modeling of Finite Amplitude Convection of Liquids Subjected to Unipolar Injection / A. Castellanos, P. Atten // *IEEE Transactions on Industry Applications.* — 1987. — Т. IA—23, № 5. — С. 825—830.
124. *Denat, A.* Ion injections in hydrocarbons / A. Denat, B. Gosse, J. Gosse // *Journal of Electrostatics.* — 1979. — Vol. 7. — P. 205—225.
125. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* / W. H. Press [et al.]. — USA : Cambridge University Press, 1988.