Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Пермский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Петухов Дмитрий Сергеевич

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Специальность 1.1.8 —
«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Келлер Илья Эрнстович

Пермь — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕТОДОВ ОЦЕНКИ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ 11

1.1 Усталостная прочность и методы её оценки 11

1.1.1 Особенности усталости ответственных деталей авиационных двигателей 11

1.1.2 Испытания на нерегулярное нагружение 15

1.1.3 Модели и методы расчёта усталостной прочности 25

1.1.4 Влияние частоты нагружения и наличия выдержек на усталостную прочность 35

1.2 Остаточные напряжения в контексте усталости 41

1.2.1 Реконструкция остаточных напряжений 41

1.2.2 Способы внесения остаточных напряжений в расчёт 43

1.2.3 Оценка усталостной прочности при наличии остаточных напряжений 45

1.3 Выводы по главе 1 47

ГЛАВА 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ РАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ 49

2.1 Реконструкция полей в образце плоской геометрии 50

2.1.1 Задача о пластине со слоем собственных деформаций . . . 50

2.1.2 Метод полосок 55

2.1.3 Пример применения метода полосок 59

2.1.4 Метод рентгеновской дифракции 61

2.1.5 Определение собственных деформаций по полю напряжений 64

2.1.6 Пример применения метода рентгеновской дифракции . . 67

2.2 Задача о двусторонне обработанной пластинке 68

2.2.1 Решение задачи 68

2.2.2 Пример реконструкции 73
2.3 Об учёте кривизны полоски при применении метода полосок . . . 75
2.3.1 Продольная кривизна 75
2.3.2 Поперечная кривизна 78
2.4 Другие задачи реконструкции профиля собственных деформаций 80
2.5 Выводы по главе 2 81

ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ 84
3.1 Уравнения модели 85
3.2 Отличия от модели Оттосена 87
3.3 Идентификация констант модели по экспериментальным данным 89
3.3.1 Алгоритм идентификации и его применение к алюминиевому сплаву АА2024 89
3.3.2 Жаропрочный никелевый сплав 98
3.3.3 Чугун EN-GJV-450 101
3.4 Верификация модели 102
3.5 Особенности расчёта программ нагружения с периодическими перегрузками 110
3.6 Учёт частоты и выдержек 112
3.6.1 Обобщение модели 112
3.6.2 Идентификация констант модели 114
3.6.3 Оценка усталостной прочности материала на полётном цикле с учётом выдержек 118
3.7 Выводы по главе 3 119

ГЛАВА 4. ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПОВЕРХНОСТНО ОБРАБОТАННЫХ ДЕТАЛЕЙ АВИАДВИГАТЕЛЯ 123
4.1 Диск компрессора высокого давления 123
4.1.1 Расчет напряженно-деформированного состояния диска под действием температурных напряжений, центробежных сил и поверхностной технологической обработки 123
4.1.2 Оценка усталостной долговечности диска компрессора высокого давления на полетных циклах 128

4.1.3 Анализ результатов 133
4.2 Проушина кронштейна крепления авиадвигателя 135
4.2.1 Расчет напряжений в проушине с учетом остаточных напряжений 135
4.2.2 Оценка усталостной долговечности проушины на полётных циклах 140
4.2.3 Анализ результатов 143
4.3 Выводы по главе 4 144

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 147

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 150

Приложение А. Теорема о прогибе полоски 167

Приложение Б. Реконструкция собственных деформаций методом разрезания образца на полоски 171
Б.1 Описание метода 171
Б.2 Примеры применения метода 174
Б.2.1 Брус из сплава АМг5 174
Б.2.2 Стальное ребро аддитивно возведённое на стальном основании 176

Приложение В. Реконструкция полей в образце по разнородным данным 180
В.1 Описание метода 180
В.2 Пример применения метода 184

Приложение Г. Реконструкция полей собственных деформаций и остаточных напряжений в образце цилиндрической геометрии 187
Г.1 Задача о трубе 187
Г.2 Разрезанная труба 189
Г.3 Метод Давиденкова (метод колец и полосок) 194
Г.4 Определение собственных деформаций по полю напряжений в трубе 196

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы диссертации

Процессы поверхностной обработки деталей машин столетие используются для повышения их усталостной прочности. Главным фактором, отвечающим за сопротивление зарождению усталостных трещин, являются специально наводимые сжимающие тангенциальные остаточные напряжения в приповерхностном слое. Ответственные детали авиационного двигателя подвергают для этого дробеструйной обработке. В зависимости от физического процесса обработки (точечного пластического деформирования, фазовых превращений, химических реакций, усадки, ионной имплантации и др.) в приповерхностном слое детали возникают собственные, т.е. неупругие, деформации (этот термин используется в области технологических приложений остаточных напряжений: сварке, аддитивном производстве, механохимии, термической и поверхностной обработке). Несовместная часть тензора собственных деформаций в упругом теле порождает поле остаточных напряжений, которое является самоуравновешенным и распределенным по всему объему тела, и потому напрямую не переносимо в конечноэлементную модель из данных разрушающего контроля. Для его учета в численной модели самым простым способом (альтернативным моделированию процесса поверхностной обработки) является введение в неё локализованного вблизи поверхности распределения тангенциальных компонент тензора собственных деформаций. Все известные способы учета остаточных напряжений в расчетах подразумевают предварительное решение обратной задачи определения распределения собственных деформаций по распределению остаточных напряжений. Разработка эффективного метода определения приповерхностного распределения собственных деформаций по данным разрушающего контроля является актуальной задачей для усталостного расчёта с учётом остаточных напряжений.

Детали планера и двигателя самолёта подвергаются нерегулярной циклической нагрузке. Циклы нагружения различаются длительностью, содержат перегрузки и выдержки под нагрузкой. Авиационные сплавы, в общем, чувствуют эффекты наследственности, которые не учитываются распространенными в конструкторских бюро методиками расчета со схематизацией истории нагружения, сведением циклов многоосного нагружения к эквивалентным одноосным

циклам и суммированию их вкладов в повреждённость. Разработка модели накопления усталостной повреждённости в упругом диапазоне с учётом наследственности нагружения, методов её идентификации и верификации и применение для расчета ответственных деталей машин также является актуальной составляющей работы.

Цель диссертационной работы

Разработка теоретических основ новой методики расчета усталостной долговечности ответственных деталей машин с учетом поверхностной обработки при их нерегулярном нагружении на основе эволюционной модели накопления повреждённости, учитывающей предысторию нагружения, и эффективного способа учета в численной модели поверхностных собственных деформаций, определенных по данным разрушающего контроля.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

- Упростить процедуру решения обратной задачи реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций вблизи плоской или цилиндрической поверхности по данным разрушающего контроля остаточных напряжений, путём получения явных точных выражений для искомых распределений.
- Построить эволюционную модель накопления усталостной повреждённости для нерегулярной истории циклического нагружения с учетом многоосности, непропорциональности, частоты нагружения и выдержек для применения после конечноэлементного расчёта нагружения детали. Выполнить идентификацию и верификацию модели.
- Применить результаты для исследования особенностей накопления усталостной повреждённости в деталях авиадвигателя с поверхностными остаточными напряжениями на полётных циклах.

Научная новизна

- Впервые получены явные точные выражения для реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций вблизи плоской или цилиндрической поверхности по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Результат предназначен для учета поверхностных технологических остаточных напряжений в численной модели детали.
- Сформулирована новая эволюционная модель накопления усталостной повреждённости для нерегулярной истории циклического нагружения с учетом многоосности и непропорциональности, разработан метод идентификации и

верификации модели. Модель предназначена для расчёта времени жизни детали после конечноэлементного расчёта напряжений.

– Сформулировано реономное обобщение эволюционной модели накопления усталостной повреждённости, описывающее зависимость усталостной долговечности и предела выносливости от частоты нагружения и выдержек в цикле, выполнена идентификация констант модели по базовым испытаниям.
– Теоретически (в расчетах по эволюционной модели с учетом остаточных напряжений) установлена ранее не исследованная завышенность оценки усталостной долговечности детали при упрощении программы полетного цикла или упрощении распределения собственных деформаций вблизи поверхности, которая не описывается расчетом со схематизацией истории нагружения, сведением циклов многоосного нагружения к эквивалентным одноосным циклам и суммированием их вкладов в повреждённость.

Теоретическая значимость

– Получены явные точные выражения для реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций вблизи плоской или цилиндрической поверхности по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Оценена величина ошибки определения остаточных напряжений методом полос при применении к участкам с искривлённой поверхностью.
– Сформулирована эволюционная модель накопления усталостной повреждённости для нерегулярной истории циклического нагружения с учетом многоосности и непропорциональности, а также её реономное обобщение, для описания зависимости усталостной долговечности и предела выносливости от частоты нагружения и выдержек в цикле. Выполнена идентификация и верификация модели.

Практическая значимость

– Полученные теоретические результаты (оригинальные выражения реконструкции собственных деформаций вблизи поверхности по данным разрушающего контроля и эволюционная модель накопления усталостной повреждённости, отражающая особенности процесса в полетных циклах) могут служить основой разработки методики расчета усталостной долговечности ответственных деталей машин.
– Показана завышенность оценки усталостной долговечности при упрощении программы полетного цикла или упрощении распределения собственных деформаций вблизи поверхности, которая не описывается расчетом в рамках

методики схематизации полетного цикла и линейного суммирования повреждённости, что указывает на границы применимости такой методики.

– Рекомендована одновременная реконструкция остаточных напряжений и собственных деформаций в ходе разрушающего контроля, для чего предложено внедрить полученные формулы в программное обеспечение аппаратуры.

Результаты могут быть востребованными подразделениями прочностных расчетов конструкторских организаций АО «ОДК-Авиадвигатель», ПАО «ОДК-Сатурн», АО «ОДК-Кузнецов», АО «ОДК-Климов».

Методология и методы диссертационного исследования

Работа имеет теоретический характер. Расчёты и работа с аналитическими выражениями выполнялись в пакете Wolfram Mathematica. Обратная задача реконструкции профиля собственных деформаций по экспериментальным данным решена аналитически на основе уравнений линейной теории упругости. Несвязанная математическая модель усталостной долговечности, учитывающая нерегулярность, непропорциональность, многоосность нагружения и реономные эффекты, построена на основе концепции поверхности выносливости в пространстве напряжений. Модель идентифицирована по экспериментальным данным для ряда сплавов методом Нелдера–Мида. Модель верифицирована по данным нерегулярного нагружения алюминиевого сплава. Продемонстрировано применение модели на ряде задач.

Положения, выносимые на защиту

1. Выведенные явные точные формулы реконструкции распределения собственных деформаций по данным разрушающего контроля упрощают введение технологических остаточных напряжений в численную модель детали, исключая необходимость использования приближённых процедур, принятых во всех существующих методиках.
2. Разработанная эволюционная модель накопления усталостных микроповреждений способна описывать совокупность следующих испытаний, по которым производится идентификация модели: кривые усталости для нескольких значений параметра асимметрии цикла, диаграммы Хейга для одноосного нагружения и чистого сдвига, испытания на несинфазное двухосное нагружение и испытания на нерегулярное одноосное нагружение.
3. Реономное обобщение эволюционной модели накопления усталостной повреждённости способно описывать зависимости усталостной долговечности

и предела выносливости от частоты нагружения и выдержек в цикле, наблюдаемые в эксперименте.

4. Теоретически (в расчетах по эволюционной модели с учетом остаточных напряжений) установлена ранее не исследованная завышенность оценки усталостной долговечности детали при упрощении программы полетного цикла или упрощении распределения собственных деформаций вблизи поверхности, которая не описывается расчетом со схематизацией истории нагружения, сведением циклов многоосного нагружения к эквивалентным одноосным и суммированию их вкладов в повреждённость.

Достоверность

Достоверность результатов исследования обеспечена точными решениями прямых и обратных пространственных задач линейной теории упругости для тел с несовместными собственными деформациями, использованием апробированных способов разрушающего контроля остаточных напряжений, непротиворечивостью выражений для реконструкции собственных деформаций и соответствием известным выражениям для реконструкции остаточных напряжений в рамках ряда способов разрушающего контроля, способностью эволюционной модели накопления усталостной повреждённости описывать базовые и контрольные испытания при регулярном и нерегулярном нагружении ряда металлических сплавов.

Апробация

Основные положения работы докладывались на XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2018 г.), XII и XV Международных конференциях «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2018, 2021 гг.), XLVII International Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2019 г.), конференции «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (Нижний Новгород, 2019 г.), XII и XIII Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Уфа, 2019 г., Санкт-Петербург, 2023 г.), XXI-XXIV Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2019-2025 гг.), XXVII-XXXI Международных научных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2021- 2025 гг.), XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2024 г.), International Scientific Conference “Advanced Mechanics: Structure, Materials,

Tribology" (Samarkand, 2024), семинаре «Механика макро- и наноструктур» под руководством д.ф.-м.н. С. Н. Коробейникова и д.ф.-м.н. А.В. Шутова (Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 2025 г.).

Реализация работы

Работа выполнялась в рамках госзадания ПФИЦ УрО РАН при поддержке грантов РФФИ № 17-08-01085, РНФ и Пермского края № 24-29-20148, Пермского НОЦ мирового уровня «Рациональное недропользование», а также крупного научного проекта при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535).

Личный вклад соискателя

В проведенном исследовании его автором получены все аналитические результаты работы; выполнены качественный анализ результатов и их проверка на непротиворечивость и соответствие известным результатам, обработка экспериментальных данных, формулировка эволюционной модели накопления усталостной повреждённости, её идентификация и верификация, качественное исследование поведения модели на примерах расчетов усталостной долговечности ответственных деталей авиационного двигателя на полётных циклах.

Публикации

Основные научные результаты диссертации отражены в 10-ти статьях [1–10] в рецензируемых журналах и коллективной монографии по механике деформируемого твердого тела, реферируемых международными базами цитирования или входящих в список ВАК, и 3-х патентах РФ на изобретения [11–13].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 199 страниц, включая 88 рисунков и 14 таблиц. Список литературы содержит 161 наименование.

Благодарности

Выражаю благодарность моему научному руководителю И.Э. Келлеру, начальнику отдела прочности силовых схем и перспективных методов анализа АО "ОДК-Авиадвигатель" И.Л. Гладкому, старшему научному сотруднику Центра экспериментальной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета А.В. Ильиных, сотрудникам НИО 18 научно-исследовательского комплекса прочности летательных аппаратов Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н.Е. Жуковского — заместителю начальника А.В. Панкову и ведущему инженеру В.Н. Басову, а также оппонентам и коллегам за многолетнюю поддержку и интерес к работе.

ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕТОДОВ ОЦЕНКИ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

1.1 Усталостная прочность и методы её оценки

1.1.1 Особенности усталости ответственных деталей авиационных двигателей

Детали авиадвигателя в условиях эксплуатации испытывают циклические механические и температурные нагрузки, которые со временем способны привести к их повреждению или разрушению. Чтобы спроектировать деталь, обладающую необходимым запасом усталостной прочности, необходимо уметь рассчитывать эту усталостную прочность. Для этого необходима модель накопления усталостных повреждений, учитывающая особенности нагружения, реализующегося в условиях эксплуатации. В нашем случае можно выделить следующие особенности:

- Для полётного цикла типичным является нерегулярное циклическое нагружение (рис.1.1). Выбранный метод расчёта усталостной прочности должен быть способен учесть эту нерегулярность. Так, влияние порядка циклов нагружения может привести к сильно неконсервативной оценке времени жизни некоторых металлических сплавов, занижая их до 15 раз [14]. Также в полётных циклах могут встречаться нечастые перегрузки, влияние которых на усталостную прочность значительно [15].
- Для полётного цикла характерны длительные выдержки при постоянном напряжении либо колебания небольшой амплитуды около этого постоянного напряжения [17], возможно при повышенной температуре. Для большинства конструкционных материалов в таких условиях наблюдается ползучесть. В случае деталей авиадвигателя ползучесть недопустима, поэтому используются различные высокотемпературные сплавы. Однако в ряде таких сплавов на основе титана с малой или нулевой долей β фазы, таких как Ti-6242, IMI685, IMI829, IMI834, наблюдается эффект dwell fatigue. Он заключается в

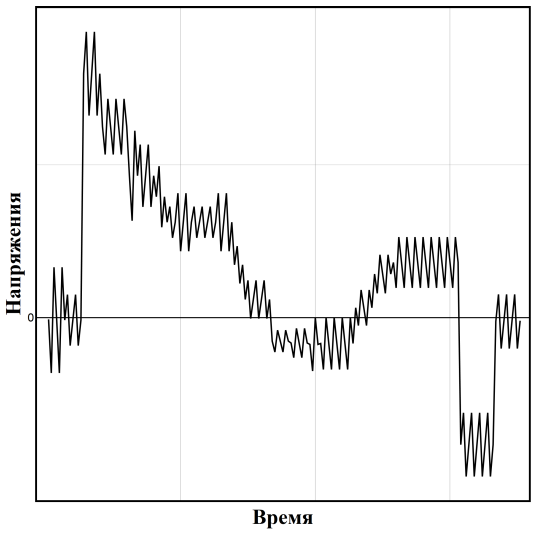


Рисунок 1.1 — Диаграмма напряжения в детали подвески авиадвигателя в ходе полётного цикла.

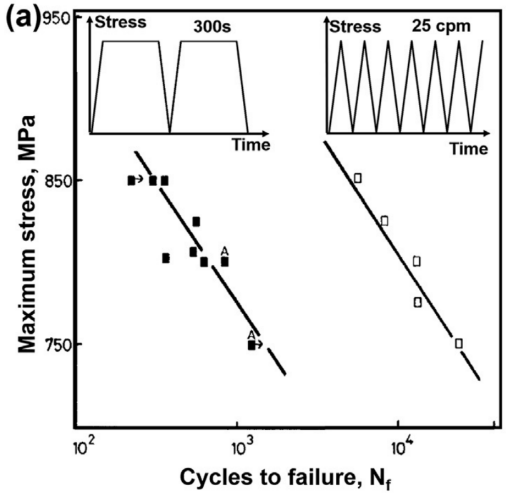


Рисунок 1.2 — Сравнение диаграмм Вёлера малоцикловой усталости для отнулевых треугольных циклов и циклов с выдержкой при амплитудном напряжении для сплава IMI685 [16].

том, что хотя во время выдержек образца при постоянной нагрузке не происходит значимых деформаций, наличие этих выдержек значительно (до 3-х порядков) снижает усталостную долговечность в режиме малоцикловой усталости [18–20], рис.1.2. На эффект dwell fatigue впервые обратили внимание ещё во второй половине 1970х годов, так как он приводил к непредвиденному разрушению элементов газотурбинных двигателей [16;21]. Но до сих пор он приводит к авариям [22]. Существует множество работ, посвящённых экспериментальному исследованию этого эффекта, а также его связи с микроструктурой и моделированию физики эффекта на уровне зерна, но методик его учёта в рамках сложных программ нагружения пока не предложено. Выдержка при повышен-

ной температуре и пониженном, по сравнению с пиком, напряжении может и положительно влиять на усталостную прочность [23], рис.1.3. Этот эффект называют thermal alleviation.

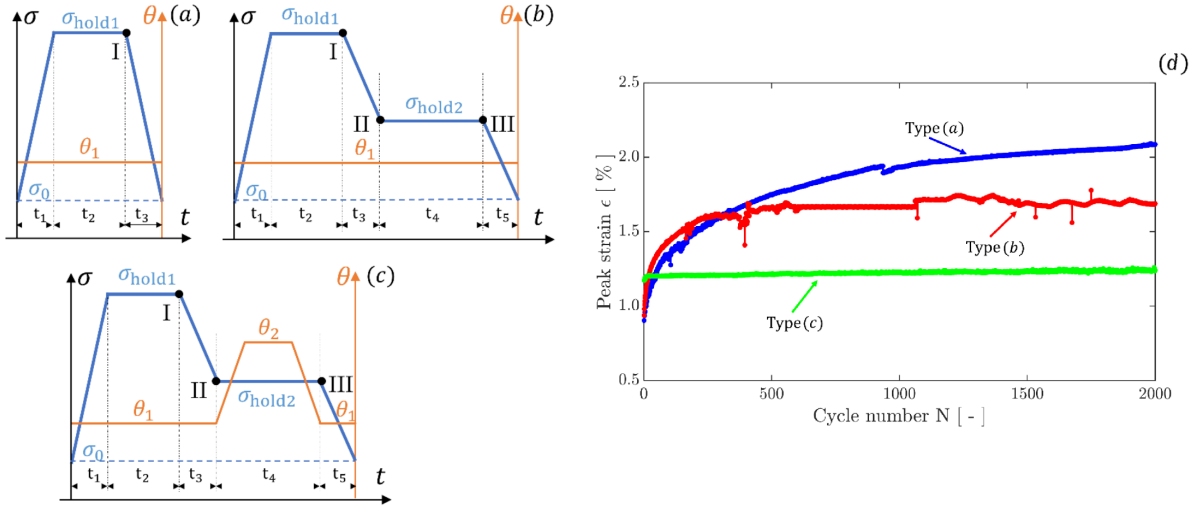
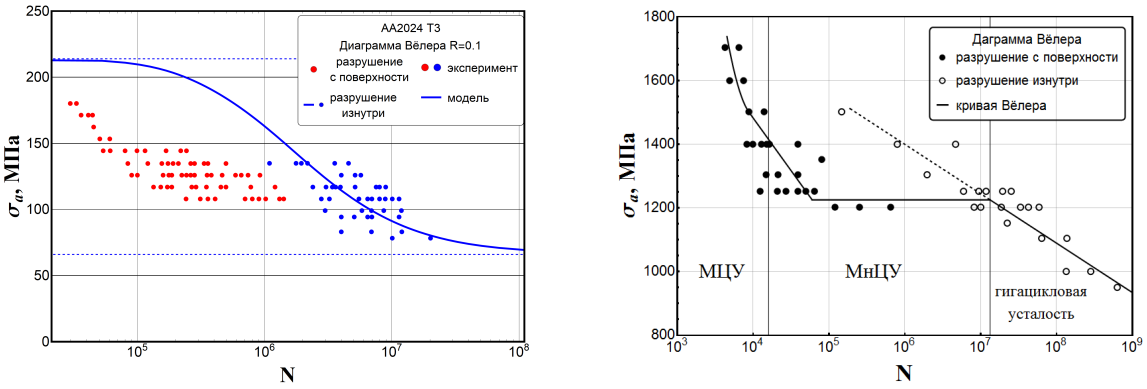


Рисунок 1.3 — Влияние дополнительной выдержки образца при повышенной температуре на максимальную за цикл осевую деформацию [23]: (a) — цикл с выдержкой при пиковой нагрузке, (b) — цикл с выдержкой при пиковой нагрузке и выдержкой при меньшей нагрузке при постоянной температуре, (c) — цикл с выдержкой при пиковой нагрузке и выдержкой при меньшей нагрузке и повышенной температуре, (d) — зависимость осевой деформации от номера цикла.

- Опасные с точки зрения усталостного разрушения поверхности деталей дополнительно обрабатывают. Например, популярной является дробеструйная обработка замков лопаток. В результате обработки в детали формируется приповерхностный слой тангенциальных пластических деформаций растяжения, вызывающих слой сжимающих остаточных напряжений [2]. Даже если основное циклическое нагружение является одноосным и пропорциональным, при добавлении постоянного поля остаточных напряжений оно становится многоосным и непропорциональным.
- Наличие приповерхностного слоя сжимающих остаточных напряжений может перемещать очаг разрушения под поверхность детали. Усталостное разрушение в этом случае развивается по закономерностям, отличным от сценариев развития поверхностной трещины. Это можно заметить на диаграмме Вёлера, продолженной в область гигацикловой усталости: точки соответствующие разрушению изнутри лежат на отдельной ветви диаграммы, находящейся

правее стандартной [24; 25], рис.1.4. Это свидетельствует о том, что для предсказания усталостной прочности поверхностно упрочнённых деталей следует проводить эксперименты с поверхностно упрочнёнными образцами с исследованием очага разрушения, что на сегодняшний день является редким событием. При этом модели, позволяющие учитывать несколько ветвей диаграммы Вёлера, соответствующие различным модам разрушения, существуют. Например, в [26] в рамках одного расчёта предлагается использовать две различные модели для режимов много- и гигацикловой усталости.



а) б)

Рисунок 1.4 — Диаграммы Вёлера с указанием того, началось ли разрушение с поверхности образца или под поверхностью: для AA2024T3 [24] (а) и стали JIS SUJ2 [25] (б).

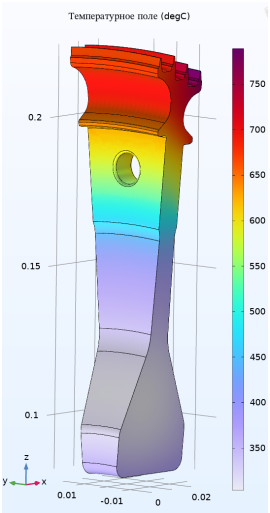


Рисунок 1.5 — Температурное поле в сегменте диска компрессора высокого давления.

- В ходе полётного цикла в детали реализуется нестационарное неоднородное поле температуры (рис. 1.5). В результате возникают температурные напряжения, накладывающиеся на основную нагрузку. Кроме того, физические

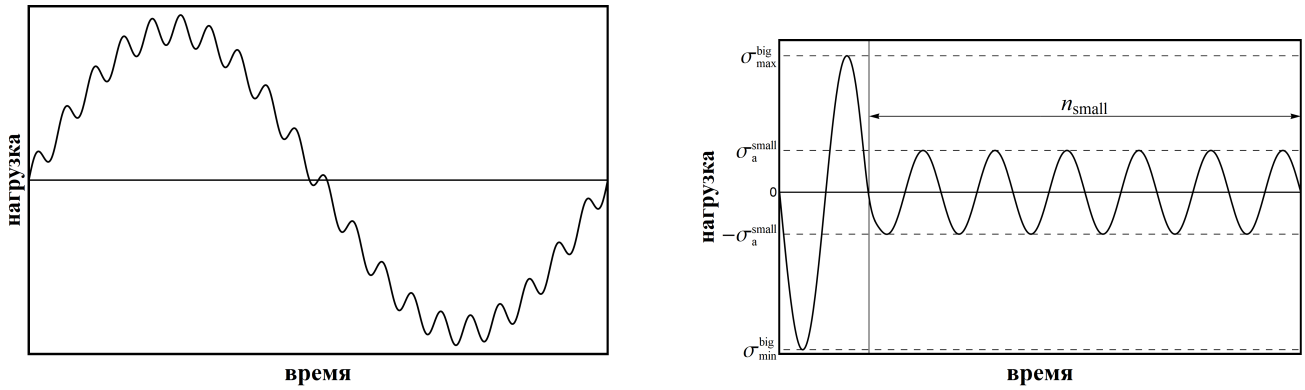
свойства материала, такие как усталостные характеристики и упругие модули, зависят от температуры. Учёт изменения этих свойств с течением времени может значительно повлиять на оценку усталостной прочности.

1.1.2 Испытания на нерегулярное нагружение

Для оценки усталостной прочности деталей, работающих на нерегулярных рабочих нагрузках, зачастую недостаточно испытаний на регулярное нагружение, так как эффекты нерегулярности программы нагружения и порядка циклов значительно влияют на время жизни [27]. Эти эффекты иногда рассматриваются с точки зрения динамики роста трещин [28; 29], данная же работа выполнена в рамках макрофеноменологического понятия момента разрушения спустя некоторое количество повторений программы. Поэтому проводятся усталостные испытания на нерегулярном нагружении, имитирующие рабочую нагрузку.

На рис. 1.6 приведены простейшие программы на нерегулярное нагружение: двухчастотное нагружение (а) и регулярное нагружение с периодическими перегрузками [31] (б).

Для определения усталостных свойств материалов планера и деталей двигателя самолёта проводятся испытания по программам, имитирующим полётные циклы. Подобные испытания часто проводятся на образцах с концентратором. Тогда используют величину напряжение брутто — усилие, приложенное



а) б)

Рисунок 1.6 — Простейшие программы нерегулярного нагружения: двухчастотное нагружение [30] (а) и один блок нерегулярного нагружения [31] (б).

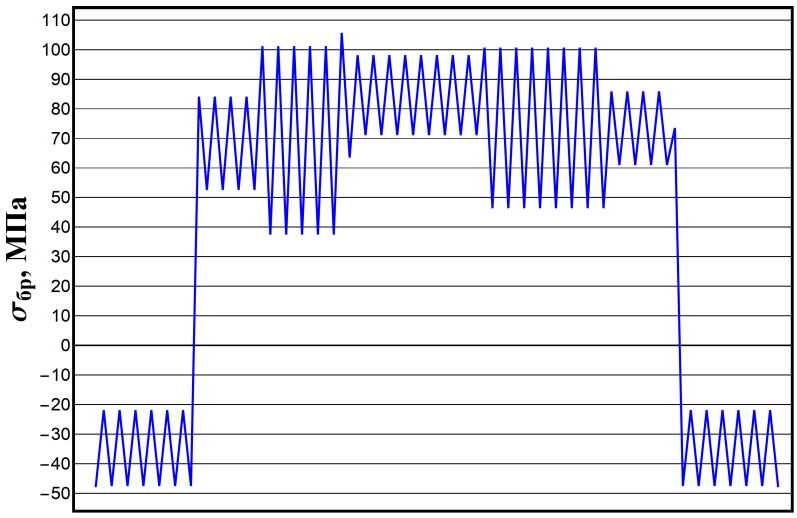


Рисунок 1.7 — «Блочная» программа нагружения [17].

к образцу, поделённое на площадь поперечного сечения без учёта ослабления (до конца раздела 1.1.2 $\sigma_{\text{бр}}$, σ_m, σ_a есть напряжения брутто). Существуют как относительно простые имитации, например программа «Блочная» [17] (рис. 1.7), так и более сложные, приведённые ниже. На рис. 1.7 и далее $\sigma_{\text{бр}}$ есть брутто напряжение — усилие, приложенное к образцу, поделённое на поперечную площадь сечения без учёта ослабления

Приведём пример трёх программ одноосного нагружения, которые будут позже использованы для верификации предлагаемой модели усталостного разрушения:

1. «Боинг» для планера реактивного транспортного самолёта [32].
2. «TWIST» для корня крыла транспортного самолёта [33].
3. «ЦАГИ» для корня крыла тяжёлого транспортного самолёта [34].

Каждая программа испытаний состоит из полётов разной опасности, расположенных в случайном порядке, причём полёты разной опасности встречаются с разной частотой.

Программа «Боинг» состоит из полётов пяти типов (рис. 1.8). Частоты полётов разных типов программы «Боинг» (за 5000 полётов) приведены в табл. 1.1 в порядке уменьшения опасности.

Таблица 1.1 — Частоты полётов программы «Боинг».

Тип	A	B	C	D	E
частота	1 (0.02%)	13 (0.26%)	215 (4.3%)	1067 (21.3%)	3704 (74.1%)

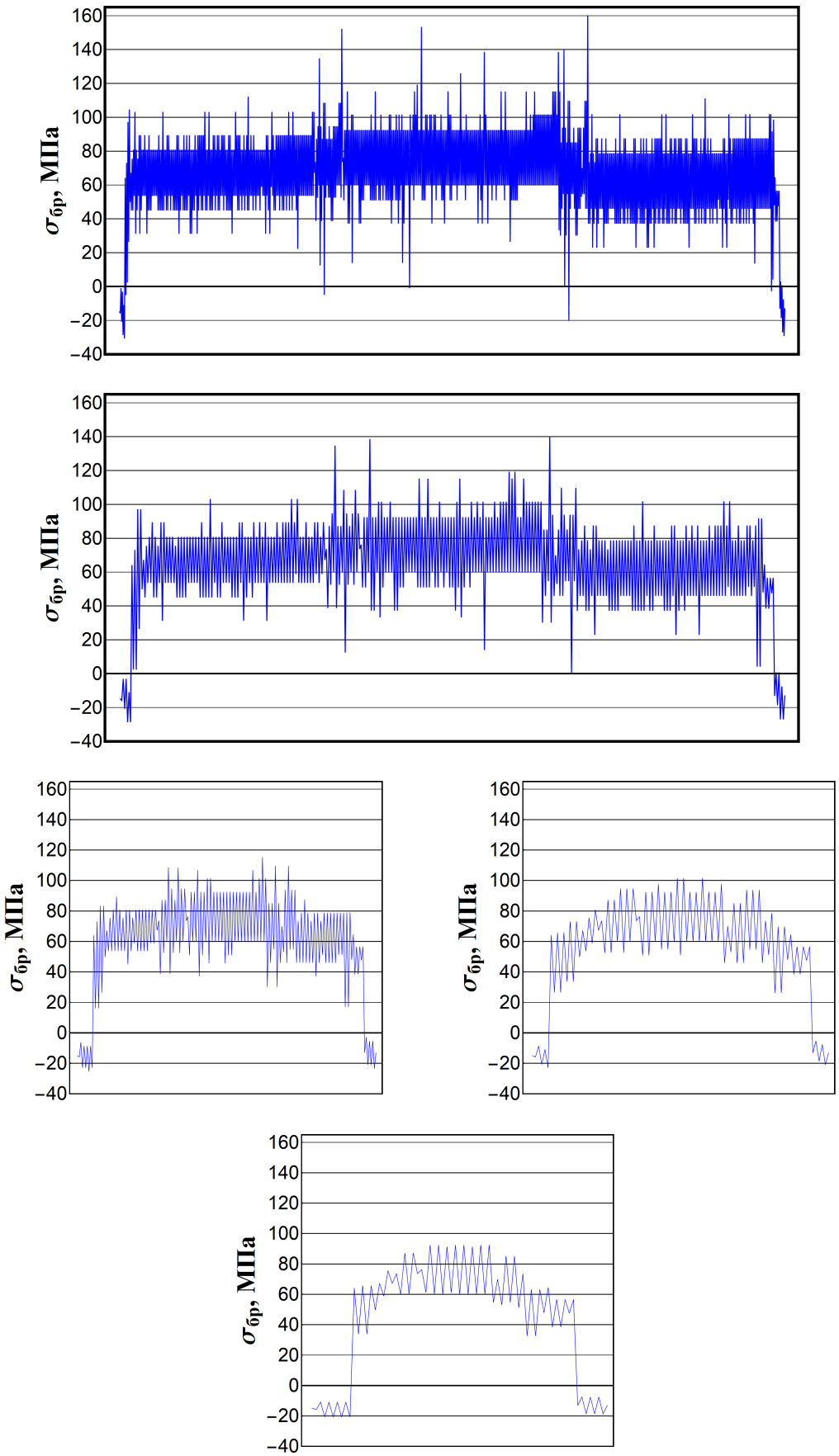


Рисунок 1.8 — Пять полётов разных типов программы «Боинг» в порядке понижения опасности.

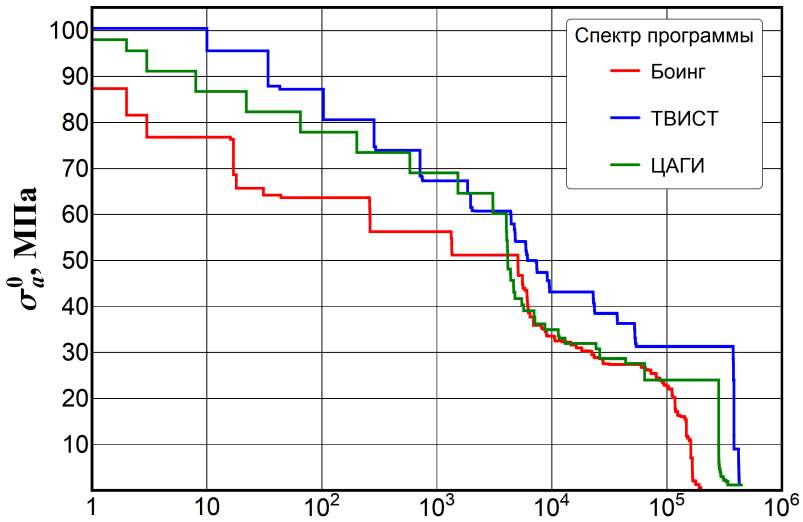
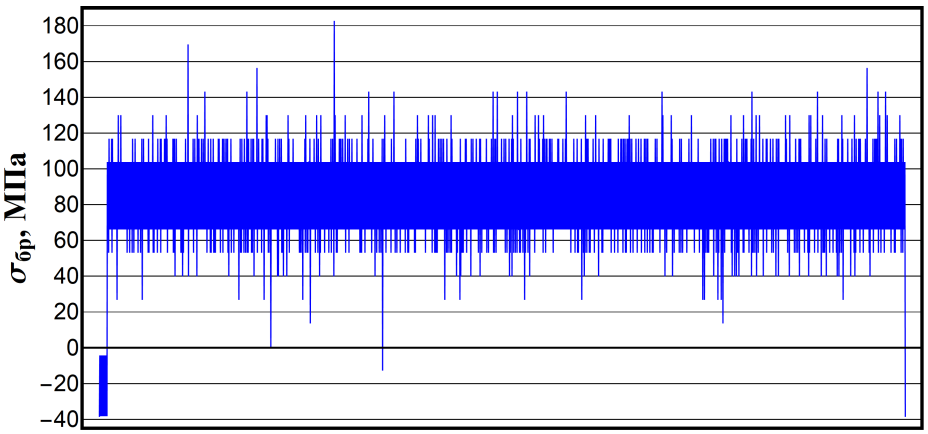
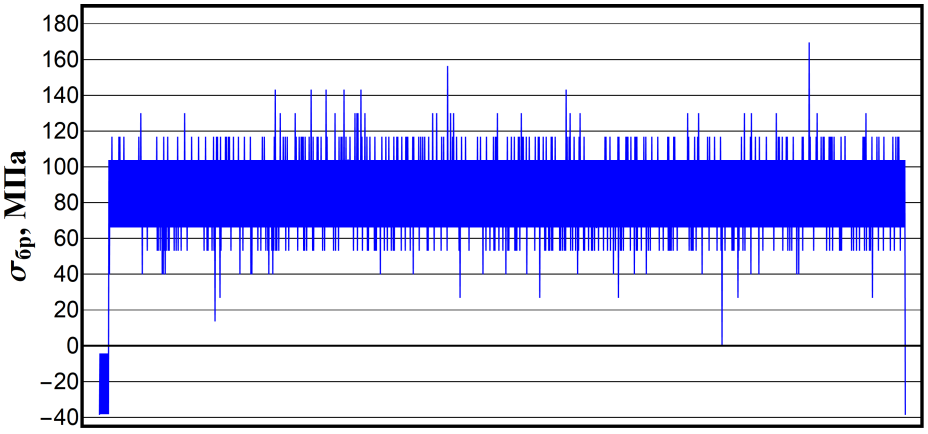
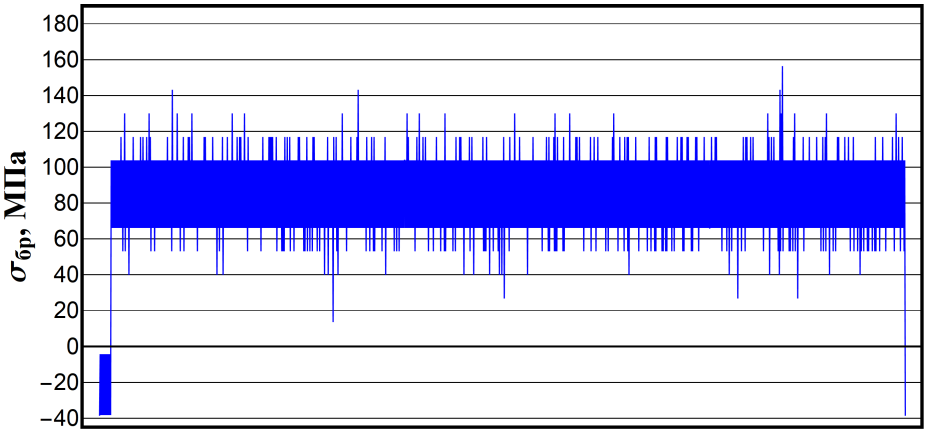


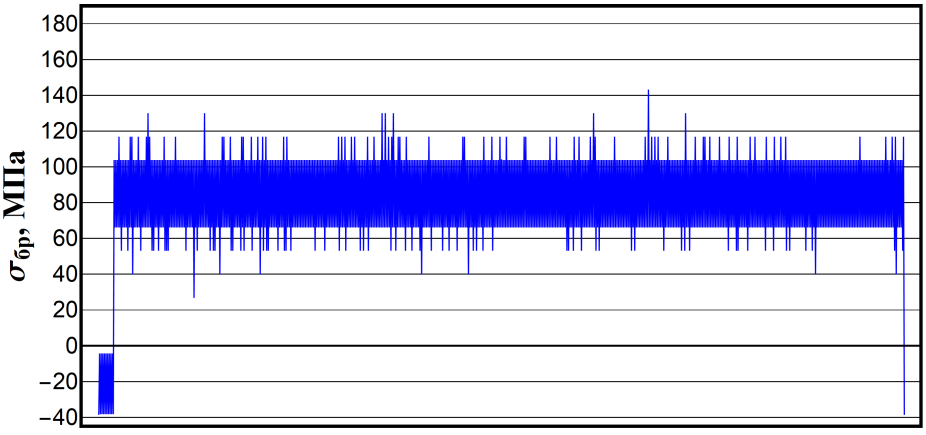
Рисунок 1.9 — Спектры программ «Боинг» (за 5000 полётов), «TWIST» (за 4000 полётов), «ЦАГИ» (за 4000 полётов). По вертикальной оси отложены эквивалентные амплитуды циклов, вычисленные по формуле Одинга. Программы нагружения схематизированы методом полных циклов.

Программа «TWIST» состоит из квазислучайных полётов семи типов, в программе испытаний эти полёты случайно перемешаны, полёты разных типов встречаются с различной частотой. Полёт состоит из наземного этапа и воздушного этапа. Наземный этап для всех типов полётов одинаков: 10 циклов со средним напряжением $-0.25\sigma_m$ и амплитудой $0.2\sigma_m$, где σ_m есть среднее напряжение воздушного этапа. Воздушный этап состоит из набора циклов с одинаковым средним напряжением σ_m и различной амплитудой, наборы циклов различны для полётов различного типа. При реализации квазислучайного полёта максимумы и минимумы циклов случайно перемешаны (но за максимумом обязательно следует минимум, и наоборот). Частоты полётов разных типов программы «TWIST» (за 4000 полётов) приведены в табл. 1.2 слева, а количества циклов различной амплитуды внутри воздушного этапа полёта каждого типа приведены в основной части табл. 1.2. Типы полётов (A, B, C, и т.д.) приведены в порядке понижения опасности. Ниже на рис. 1.11 приведено по одной реализации квазислучайного полёта каждого типа, расположенных в порядке уменьшения опасности, а спектр нагружения по программе «TWIST» изображён на рис. 1.9.


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
$\sigma_{бр}$, МПа


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
$\sigma_{бр}$, МПа


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
$\sigma_{бр}$, МПа


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
$\sigma_{бр}$, МПа

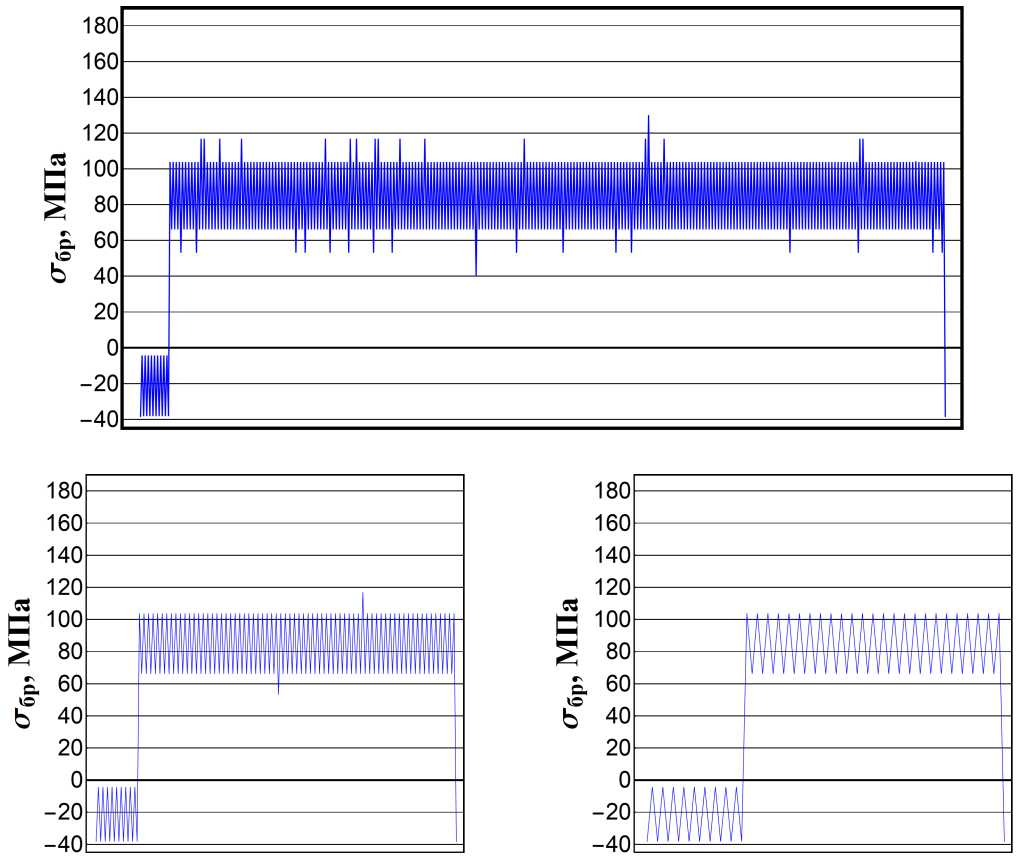


Рисунок 1.11 — По одной реализации каждого из 7ми типов полёта программы «TWIST» в порядке понижения опасности.

Таблица 1.2 — Программа «ТВИСТ»: частоты полётов 7ми типов за 4000 полётов (слева) и количества циклов различной амплитуды внутри воздушного этапа полёта каждого типа (в основной части таблицы).

Частота полёта	Тип полёта	σ_a/σ_m						
		1.15	0.995	0.84	0.685	0.53	0.375	0.222
9 (0.225%)	A	1	1	2	14	44	208	680
24 (0.6%)	B		1	1	6	24	165	603
60 (1.5%)	C			1	3	19	115	512
181 (4.5%)	D				1	7	70	412
420 (10.5%)	E					1	16	233
1092 (27.3%)	F						1	69
2214 (55.35%)	G							25

Программа «ЦАГИ» по структуре похожа на программу «TWIST», но в отличие от неё в программе «ЦАГИ» существует несколько вариантов наземного этапа полёта. Таким образом, каждый полёт состоит из наземного

этапа (случайно выбранного из 10ти вариантов) и воздушного этапа (также случайно выбранного из 10ти вариантов).

Среднее напряжение воздушного этапа полёта σ_m, среднее напряжение наземного этапа полёта составляет $-0.5\sigma_m$. Частоты воздушных этапов разных типов программы «ЦАГИ» (за 4000 полётов) приведены в табл. 1.3 слева, а количества циклов различной амплитуды внутри воздушного этапа каждого типа приведены в основной части табл. 1.3. Те же данные для наземных этапов сведены в табл. 1.4. Типы этапов (A, B, C,... и a, b, c,...) приведены в порядке понижения опасности.

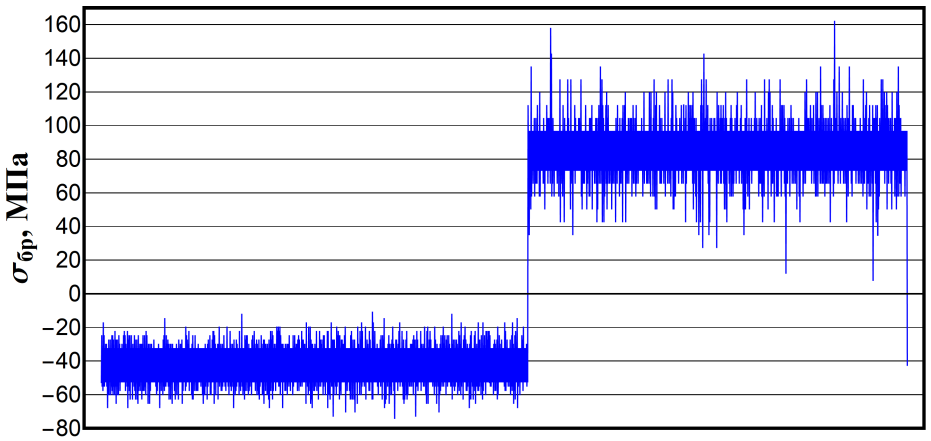
Распределения частот наземных и воздушных этапов разного типа одинаковы. Спектр нагружения по программе «ЦАГИ» изображён на рис. 1.9, а ниже на рис. 1.13 приведено по одной реализации квазислучайного полёта каждого из десяти типов (на этих графиках наземные и воздушные этапы сгруппированы по опасности, при расчёте они случайно перемешаны).

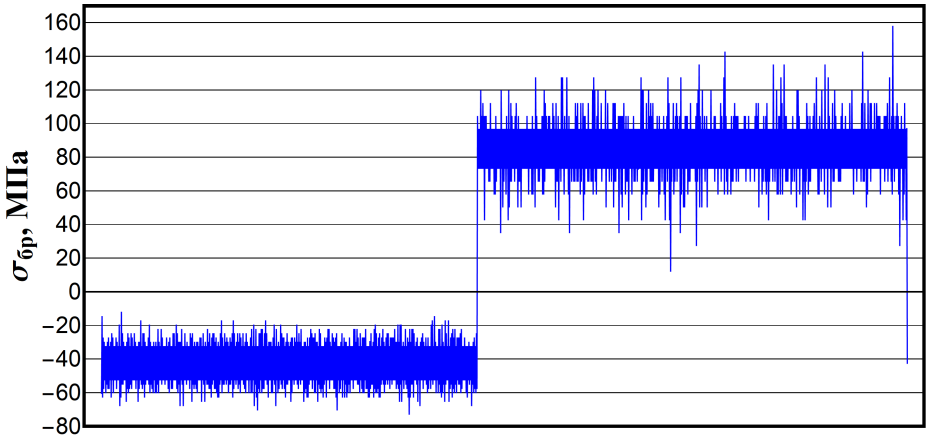
Таблица 1.3 — Программа «ЦАГИ»: частоты воздушных этапов полёта 10ти типов (слева) и количества циклов различной амплитуды внутри воздушного этапа каждого типа (в основной части таблицы).

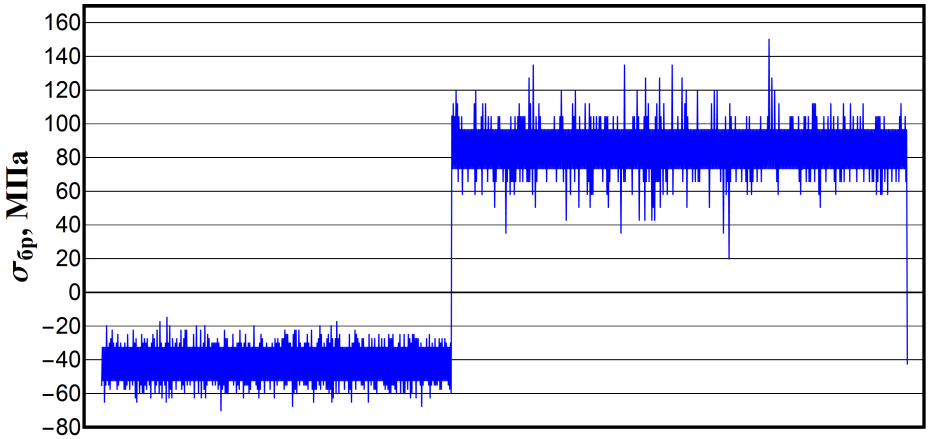
Частота этапа	Тип этапа	σ_a/σ_m									
		0.91	0.86	0.77	0.68	0.59	0.5	0.41	0.32	0.23	0.14
1 (0.025%)	A	1	1	0	2	6	19	27	56	112	264
1 (0.025%)	B		1	0	2	4	13	21	46	91	222
5 (0.125%)	C			1	0	3	5	10	26	72	208
14 (0.35%)	D				1	0	3	8	23	57	183
43 (1.1%)	E					1	1	5	17	45	156
136 (3.4%)	F						1	3	11	36	124
380 (9.5%)	G							1	6	27	91
940 (23.5%)	H								1	14	85
1540 (38.5%)	I									1	49
940 (23.5%)	J										25

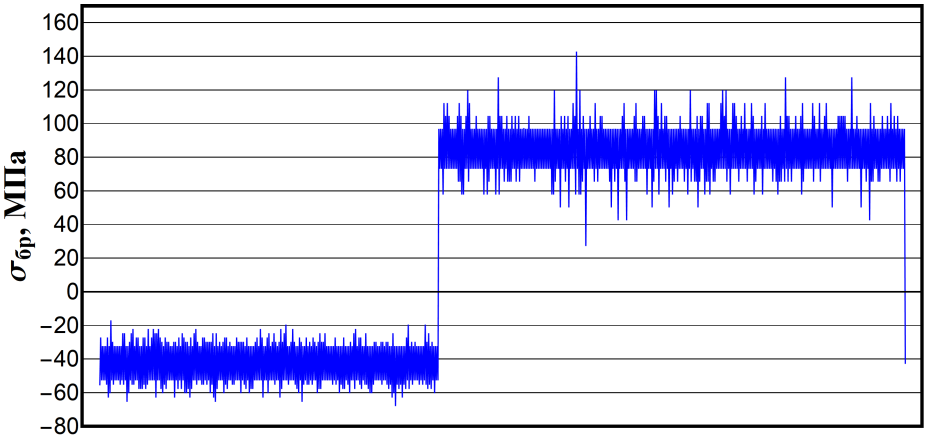
Таблица 1.4 — Программа «ЦАГИ»: частоты наземных этапов полёта 10ти типов (слева) и количества циклов различной амплитуды внутри наземного этапа каждого типа (в основной части таблицы).

Частота этапа	Тип этапа	σ_a/σ_m									
		0.375	0.36	0.33	0.3	0.27	0.24	0.21	0.18	0.15	0.12
1 (0.025%)	a	1	2	3	11	20	41	61	74	93	243
1 (0.025%)	b		1	2	7	13	30	50	60	70	117
5 (0.125%)	c			1	2	7	15	28	40	50	107
14 (0.35%)	d				1	3	9	18	30	45	94
43 (1.1%)	e					1	5	13	23	40	68
136 (3.4%)	f						1	6	16	35	52
380 (9.5%)	g							1	10	23	51
940 (23.5%)	h								1	15	39
1540 (38.5%)	i									1	29
940 (23.5%)	j										10


σбр, МПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80


σбр, МПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80


σбр, МПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80


σбр, МПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80

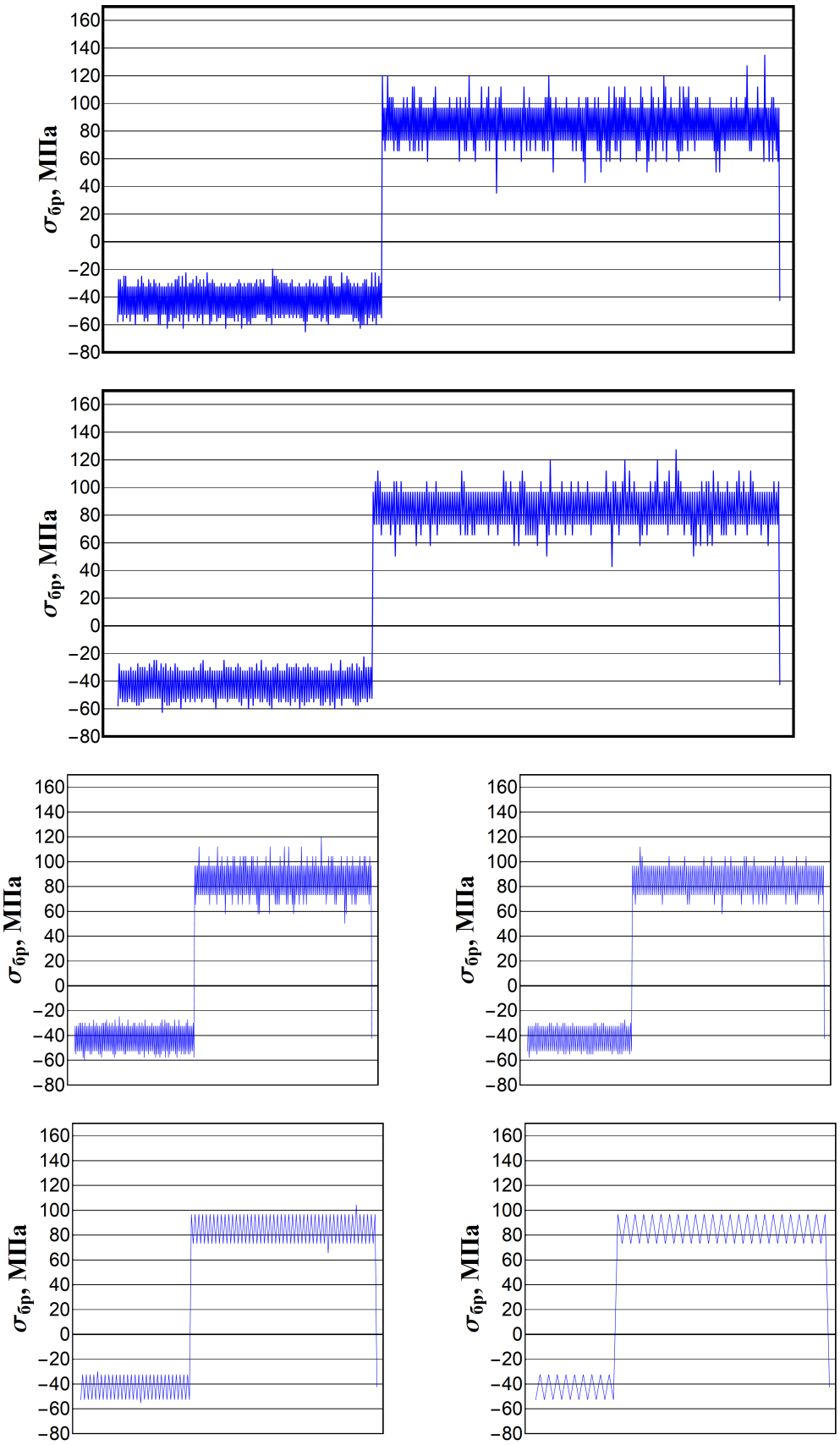


Рисунок 1.13 — По одной реализации каждого из 10ти типов наземного и воздушного этапов полёта программы «ЦАГИ» в порядке понижения опасности.

1.1.3 Модели и методы расчёта усталостной прочности

Усталостные свойства материала и рабочее нагружение имеют вероятностный разброс, а так же и само усталостное разрушение есть случайный процесс. В рамках данной работы вероятностный аспект оценки усталостной прочности рассматриваться не будет, вероятностные характеристики с необходимыми поправками и коэффициентами запаса считаются заложенными в экспериментальные данные, такие как кривые Вёлера, диаграммы Хейга и т.д. Оценка усталостной прочности рассматривается с вероятностной точки зрения, например, в [35].

Стандартным при оценке усталостной прочности детали является метод подсчёта циклов. Он заключается в разбиении истории нагружения[1] на отдельные циклы, называемом схематизацией нагружения и последующем суммировании вкладов каждого цикла в скалярный параметр повреждённости D на основе диаграммы Вёлера [37; 38]:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N_i}, \tag{1.1}$$

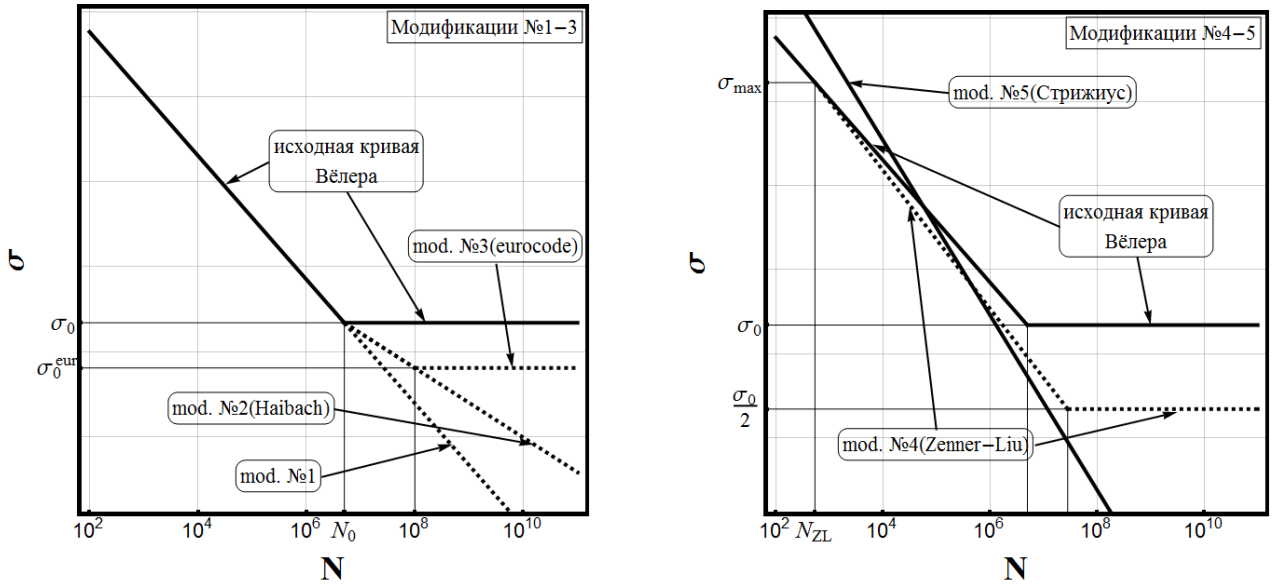
где n есть число циклов в истории нагружения, N_i — количество циклов до разрушения при регулярном нагружении с характеристиками i-го цикла. Когда повреждённость D достигает единицы, происходит формирование макроскопической трещины либо разрушение. Вместо абстрактного значения в качестве параметра повреждённости можно использовать измеряемую физическую величину. Так, в [39] при описании малоцикловой усталости в его качестве предлагается использовать израсходованный ресурс пластической деформации.

Метод подсчёта циклов основывается на гипотезе о линейном суммировании повреждённости Пальмгрена – Майнера, которая предполагает отсутствие памяти у материала. Однако последовательность циклов нагружения может значительно влиять на усталостную прочность [14; 27]. При одинаковом спектре нагружения образцы разрушаются быстрее при случайном порядке циклов, чем при блочном нагружении[2] [40;41]. Применение метода подсчёта циклов в ис-

[1] Если при нагружении присутствуют циклические макроскопические пластические деформации, вместо истории нагружения используют историю деформации [36].

[2] то есть когда одинаковые циклы собраны в блоки

ходном варианте может приводить в этих случаях к сильно неконсервативной оценке усталостной прочности.



а) б)

Рисунок 1.14 — Схематические изображения модификаций диаграммы Вёлера для учёта нерегулярности нагружения.

Популярным способом учёта влияния нерегулярных характеристик нагружения на усталостную прочность является использование модифицированной диаграммы Вёлера вместо исходной при расчёте повреждённости по формуле (1.1). На рис.1.14 схематически изображены несколько вариантов модификации. Модификация №1 представляет из себя просто продолжение диаграммы ниже предела выносливости, чтобы описать снижение предела выносливости при наличии циклов большой амплитуды в спектре нагружения. Модификация №2 [42] есть менее консервативный вариант предыдущей модификации, предлагающая продолжение диаграммы с меньшим наклоном. Модификация №3, предложенная в стандарте [43], добавляет к предыдущему варианту новый предел выносливости, соответствующий значению $N = 10^8$ циклов. Модификация №4 [44] предусматривает снижение усталостной прочности при наличии в истории нагружения редких циклов большой амплитуды. Предлагается провести новую линию диаграммы с повышенным наклоном из точки, соответствующей максимальной амплитуде в истории; предел выносливости также предлагается понизить в два раза. Модификация №5 [45] предлагает полную замену исходной диаграммы Вёлера на соотношение

$$N = \sigma^{-k}\sigma_{avg}^{k-l}10\hat{}\left(a + b\frac{\sigma_{a\,max}}{\sigma_{avg}} + c\left(1 - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{avg}}\right)\right),$$

где σ_{avg} есть среднее напряжение спектра нагрузки, $\sigma_{a\,max}$ — максимальная амплитуда в спектре, σ_{min} — минимальное напряжение в истории, a,b,c,k,l — параметры, определяемые по результатам экспериментов на схожих с исследуемой историях нагружений. Также применяется изменение предела выносливости в зависимости от накопленного параметра повреждённости [46]. Такой подход осложняется тем, что при схематизации нагружения начало и конец циклов большой амплитуды, дающих наибольший вклад в повреждённость, могут находиться далеко друг от друга в истории нагружения.

Другим способом учёта влияния нерегулярности нагружения на усталостную прочность является изменение условия разрушения с $D = 1$ на $D = D_f$ [47]. Параметр D_f зависит от характеристик нагружения либо определяется экспериментально на программах нагружения, схожих с теми, что реализуются на практике.

В программах нагружения деталей авиадвигателей присутствуют циклы небольшой амплитуды при высоком среднем напряжении, оценка вклада которых стандартным методом подсчёта циклов невозможна, но экспериментальные данные показывают что этот вклад есть [48]. Чтобы учесть их влияние на усталостную прочность, оставаясь в рамках стандартного метода, в работе [30] рассмотрено двухчастотное нагружение и предложен метод оценки усталостной прочности, при котором низкочастотное нагружение обрабатывается методом подсчёта циклов, а влияние высокочастотного выглядит как добавка к эквивалентным напряжениям, рассчитываемая по формуле, содержащей отношение частот и амплитуд.

Приведём несколько способов описания случая многоосного нагружения в рамках стандартного метода. Довольно удобной является формула для комбинации одноосного и сдвигового усилий в истории нагружения, предложенная в [49]:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_a^0(N)}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_a^0(N)}\right)^2 = 1, \tag{1.2}$$

где σ_a, τ_a есть амплитуды цикла, $\sigma_a^0(N)$, $\tau_a^0(N)$ — одноосная и крутильная диаграммы Вёлера соответственно. Решив уравнение (1.2) относительно N, можно получить вклад одного цикла в повреждённость $\Delta D = 1/N$. Формула (1.2), в силу своей структуры применима для двухосного нагружения, и только когда главные напряжения циклической нагрузки находятся в противофазе. Популярными являются две похожие более универсальные формулы сведения цикла

многоосного нагружения к эквивалентному одноосному циклу[3]:
Сайнса [50]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1^a-\sigma_2^a\right)^2+\left(\sigma_2^a-\sigma_3^a\right)^2+\left(\sigma_3^a-\sigma_1^a\right)^2}+k\left(\sigma_1^m+\sigma_2^m+\sigma_3^m\right)=\sigma_a^{-1}=(1+k)\sigma_a^0, \tag{1.3}$$

где σ_i^a есть амплитуды изменения главных напряжений, σ_i^m — средние значения главных напряжений, k — константа, обычно принимаемая[4] $k=\sigma_{-1}/\sigma_0-1$, σ_a^{-1}, σ_a^0 — амплитуды эквивалентного симметричного и отнулевого одноосного цикла соответственно, и
Кроссланда [51]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1^a-\sigma_2^a\right)^2+\left(\sigma_2^a-\sigma_3^a\right)^2+\left(\sigma_3^a-\sigma_1^a\right)^2}+ \\ +\frac{k}{3}\max_t\left(\sigma_1(t)+\sigma_2(t)+\sigma_3(t)\right)=\sigma_a^{-1}=(1+k)\sigma_a^0, \tag{1.4}$$

где в отличие от формулы Сайнса, во втором слагаемом используется максимальное гидростатическое напряжение за цикл. Перечисленные феноменологические формулы имеют неплохое соответствие с экспериментом в зоне многоцикловой усталости и в случае предела выносливости при умеренной непропорциональности нагружения.

Более сложным и универсальным подходом к описанию случая многоосного нагружения является метод критической плоскости. На плоскости, проходящей через опасную точку, вводится величина P, зависящая от напряжённо-деформированного состояния. Далее находится максимум этой величины среди всех плоскостей за время цикла, и затем приравнивается к известной функции числа циклов:

$$\max_{\boldsymbol{n},t}(P)=f(N).$$

Если решить это уравнение относительно N, то вклад одного цикла в повреждённость $\Delta D=1/N$. В качестве $f(N)$ обычно выбирают четырёхпараметрическую аппроксимацию вида

$$f(N)=aN^b+cN^d,$$

[3]То есть, нахождение амплитуды цикла одноосного нагружения, вносящего эквивалентный вклад в повреждённость

[4]σ_{-1}, σ_0 есть пределы выносливости в случае симметричного и отнулевого цикла соответственно.

где параметры a, b, c, d определяются из набора экспериментов, включающих опыты как на одноосное, так и многоосное циклическое нагружение. Можно выделить две популярные модели критической плоскости. Модель Смита — Ватсона — Топпера (SWT) [52], которая обычно интерпретируется как соответствующая I-й моде разрушения, имеет вид

$$\max_{\boldsymbol{n}} (\sigma_n^{\max} \Delta\varepsilon_n) = f(N),$$

где $\sigma_n^{\max}$ есть максимальное нормальное напряжение на плоскости за цикл, $\Delta\varepsilon_n$ — размах нормальной к плоскости компоненты деформации за цикл. Модель Фатеми — Соси (Fatemi – Socie) [53] обычно интерпретируется как соответствующая II-й моде разрушения и выглядит как

$$\max_{\boldsymbol{n}} \left(\frac{\Delta\gamma}{2} (1 + k\sigma_n^{\max}) \right) = f(N),$$

где $\Delta\gamma$ есть размах сдвиговой деформации на плоскости за цикл, k — материальный параметр, обычно приблизительно равный обратному пределу текучести материала. Чтобы упростить компьютерные расчёты при применении модели Фатеми – Соси, в качестве критической плоскости берётся плоскость с максимальным размахом сдвиговой деформации вместо плоскости, на которой действительно достигается максимум P. Отличие почти всегда минимально. В расчёте обе этих модели можно использовать параллельно [54] с двумя независимыми параметрами повреждённости и считать что разрушение произойдёт, когда первый из них достигнет критического значения. Методы критической плоскости лучше описывают случай малоцикловой усталости, чем формулы Сайнса и Кроссланда, а также позволяют получить приблизительное направление формирующейся трещины и учитывать непропорциональность циклического нагружения [55].

Близкой альтернативой методам критической плоскости являются более простые, с точки зрения интеграции в конечно-элементный расчёт[5], различные варианты формулы Мэнсона [56]

$$\Delta\varepsilon = aN^b + cN^d, \tag{1.5}$$

где $\Delta\varepsilon$ есть некоторая мера размаха полной деформации за цикл, параметры a, b, c, d зависят от материала, модели и могут меняться в ходе процесса. Как

[5]Нет необходимости искать максимум параметра P перебирая различные направления критической плоскости на каждом шаге по времени.

и ранее, разрешив это соотношение относительно N, получим прирост повреждённости за цикл $\Delta D = 1/N$. Так, в [57] используется выражение

$$\Delta\varepsilon = \left(\ln\left(\frac{1}{1-\Psi(D,T)}\right)\right)^{0.6} N^{-0.6} + 3.5\frac{\sigma_{\text{дл}} - \sigma_m}{E(D,T)} N^{-0.12},$$

где $\Psi(D,T)$, $E(D,T)$ есть относительное сужение при одноосном разрыве и модуль Юнга соответственно, зависящие от накопленной повреждённости и температуры, $\sigma_{\text{дл}}$ — предел длительной прочности, σ_m — среднее напряжение цикла. Мера размаха полной деформации представляется как сумма интенсивностей размахов упругой и пластической частей:

$$\Delta\varepsilon = \frac{3}{2(1+\nu)}\Delta\varepsilon_{\text{и}}^{e} + \Delta\varepsilon_{\text{и}}^{p},$$
$$\Delta\varepsilon_{\text{и}} = \sqrt{2/3\Delta e_{ij}\Delta e_{ij}},$$

где e_{ij} есть компоненты девиатора тензора деформаций.

Существуют модели, явно рассматривающие физические процессы, происходящие в материале в ходе усталостного разрушения. В [58] предлагается несвязанная модель, в которой процесс разрушения рассматривается на 6-ти масштабных уровнях — от дефектов кристаллической решётки до трещин размерном в десятки зёрен. На каждом уровне вводится параметр повреждённости измеряющий плотность и размер дефектов этого уровня. Эти параметры повреждённости есть случайные величины и их функции распределения эволюционируют с течением времени в ходе нагружения. По ним определяется вероятность разрушения или зарождения макроскопической трещины. В [59] модель записана для двухчастотного одноосного нагружения, произведены расчёты для низкоуглеродистой стали.

Модели повреждённости могут быть связанными, если параметр повреждённости D присутствует в уравнениях упругости/пластичности/ползучести, либо несвязанными, если D не влияет на механические свойства среды. Популярным вариантом учёта связанности в модели является снижение эффективной площади сечения материала в ходе накопления повреждённости[6] [60–64]. В результате, для упругих свойств это означает снижение модуля Юнга $E(D)$.

[6]Если в задаче важно учитывать различие снижения площади в различных направлениях (анизотропная повреждаемость), то в качестве параметра повреждённости используют тензор 2-го или 4-го ранга вместо скаляра.

А в уравнениях пластичности и ползучести используется повышенное эффективное значение напряжений[7] $\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \boldsymbol{\sigma}/(1-D)$ вместо номинальных $\boldsymbol{\sigma}$.

В качестве примера приведём модель Лемэтра – Шабоша (Lemaitre – Chaboche) в редакции авторов работы [65]. Выражение для прироста повреждённости за цикл выглядит как

$$\Delta D = \left((1-(1-D)^{\beta+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sigma_i^a}{M_0(1-b_2\sigma_m)(1-D)}\right)^{\beta},$$
$$\alpha = 1 - a\left\langle \frac{\sigma_i^a - \overset{*}{\sigma}{}_i^a}{\sigma_u - \sigma_i^{\max}} \right\rangle, \quad \overset{*}{\sigma}{}_i^a = \sigma_{-1}(1-b_1\sigma_m),$$

где σ_i^a есть амплитуда изменения интенсивности тензора напряжений за цикл

$$\sigma_i^a = \tfrac{1}{2}\max_{t_1,t_2}\left(J_2(\boldsymbol{\sigma}(t_1) - \boldsymbol{\sigma}(t_2))\right),$$
$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}/\sqrt{2},$$

σ_m — среднее напряжение за цикл

$$\sigma_m = \tfrac{1}{6}\left(\max_t(I_1(\boldsymbol{\sigma}(t))) + \min_t(I_1(\boldsymbol{\sigma}(t)))\right),$$
$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

обозначение $\langle x\rangle = max(0,x)$, σ_{-1} — предел выносливости при симметричном нагружении, σ_u — предел прочности на растяжение, β, M_0, b_1, b_2, a — материальные параметры, определяемые из экспериментов на усталость. В оригинале [62] принято $b_1 = b_2$, но исследователи часто разделяют эти параметры для увеличения гибкости модели. В уравнениях пластичности и ползучести предлагается вместо напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ использовать $\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \boldsymbol{\sigma}/(1-D)$, как было указано выше, а выражение для эффективного модуля Юнга выглядит как $E_{eff} = (1-D)E$.

С помощью связанных моделей такого типа можно исследовать динамику возникновения и развития трещин, не используя аппарат механики трещин. В работе [66] с использованием метода критической плоскости и связанных уравнений упругости и усталостной повреждённости численно моделируется возникновение и развитие трещин в образцах из титанового сплава под воздействием крутильной регулярной циклической нагрузки. Элементы, в которых повреждённость достигает критического значения, удаляются.

Чтобы учесть эффект выдержки детали при высоком напряжении и/или температуре на усталостную прочность, в работе [67] используется комбинация

[7] Выражение для эффективного напряжения может быть и более сложным.

модели критической плоскости и модели ползучести. Повреждённость ΔD_c, накопленная за счёт ползучести за один цикл, рассчитывается как:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{A}{1+t} - \frac{B}{1+t}\lg(1+t), \qquad \Delta D_c = \int\limits_0^{\Delta t} \frac{\dot{w}}{w_{crit}} dt, \\ A &= \frac{a\lg(\Delta\varepsilon_c)+b}{E\ln(10)}\left(\sigma_{\max} - p\right), \quad B = \frac{\left(a\lg(\Delta\varepsilon_c)+b\right)^2}{E\ln(10)}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\dot{w}$ есть скорость диссипации плотности энергии за счёт ползучести, t — время, изменяющееся в течение одного цикла от 0 до Δt, $\Delta\varepsilon_c$ — размах деформаций ползучести за цикл, $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение цикла, p — среднее гидростатическое давление в цикле, E — модуль Юнга, зависящий от накопленной повреждённости, w_{crit} — критическая плотность энергии деформаций ползучести, при которой происходит разрушение, зависящая от характеристик цикла [68], a, b — материальные параметры. Авторами [67] рассматривался случай наличия деформаций ползучести при выдержке на каждом цикле. Но уравнения (1.6) способны описывать дополнительное накопление повреждённости в условиях выдержки и при отсутствии макроскопических деформаций ползучести, т.е. при $\Delta\varepsilon_c = 0$.

После схематизации нагружения усталость можно рассматривать и с точки зрения роста усталостной трещины[8], записывая уравнение Пэриса [69]:

$$\frac{dl}{dN} = c(\Delta K(N))^m, \tag{1.7}$$

где $l(N)$ есть текущая длина трещины, c, m — материальные параметры, $\Delta K(N)$ — эффективный перепад коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины, который связывается с характеристиками схематизированного нагружения. При достижении трещиной критической длины l_{crit} происходит разрушение. Такой подход используется в [70] при конечноэлементном моделировании роста мультимодальной трещины, а коэффициенты интенсивности напряжений находятся с помощью M-интеграла [71].

В [72] приведены результаты усталостных испытаний нескольких сплавов на различных вариантах двухосного нагружения (одноосное нагружение + кручение), включая нагружения со сдвигом фаз. Проанализировано применение

[8]Этот подход можно комбинировать с классическим методом подсчёта циклов: на первом этапе, при достижении $D = D_0$, происходит формирование трещины длины l_0, которая потом растёт по закону (1.7).

ряда известных модификаций стандартного метода для описания этих экспериментальных данных и предложена модификация формулы Сайнса для учёта двух кривых Вёлера (одноосное нагружение и кручение) и применения для случая нагружения со сдвигом фаз.

Хотя существуют способы отдельно учесть некоторые из особенностей нагружения[9] в рамках стандартного метода, одновременный учёт нескольких из них затруднителен. Более удобно использовать модели, которые по произвольной истории изменения тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ в точке вычисляют накопленную повреждённость D. Такие модели называют эволюционными моделями усталостного разрушения и обычно записывают в виде:

$$\dot{D}(t) = F(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}); D(t)),$$

где F есть некоторый функционал, в аргументы которого при необходимости можно добавить другие параметры процесса, такие как температура или скорость деформации. При таком подходе не используется схематизация нагружения, необходимая в случае остальных перечисленных выше методов. Это избавляет от сложностей, связанных с неоднозначностью схематизации при непропорциональном многоосном нагружении, и сложностей, связанных с тем, что начало и конец одного цикла могут располагаться далеко друг от друга в истории нагружения, а значит, реализовываться при различной температуре и прочих параметрах нагружения.

Эволюционные модели также могут быть связанными и несвязанными. Связанные модели способны описывать деградацию механических свойств материала в ходе накопления повреждённости, но, как правило, привязаны к конкретной реологии, а также, при использовании МКЭ, требуют внедрения в пакет новой модели материала. Расчёт может занимать неприемлемое время ввиду сложности модели, а также необходимости моделировать циклическое нагружение вплоть до разрушения на протяжении 10^3—10^7 циклов[10]. Преимуществом несвязанных моделей является их применимость в режиме постпроцессинга, т. е. после того как механический расчёт завершён и найдены самые опасные точки детали. Это не налагает никаких ограничений на модель материала, используемую при механическом расчёте. Далее на основе истории изменения напряжений и деформаций в этих точках рассчитывается

[9] перечисленных в разделе 1.1.1

[10] Ввиду того что свойства материала изменяются от цикла к циклу.

усталостная прочность. Достаточно смоделировать одно повторение программы нагружения, а затем получать прирост параметра повреждённости ΔD на каждом повторении программы пока он не достигнет критического значения. Если прирост повреждённости не зависит от уже накопленной повреждённости[11], то $\Delta D = const$, а число повторений программы до разрушения $N_f = 1/\Delta D$.

Приведём два примера связанных эволюционных моделей. Первая из них — модель упруго-пластической повреждённой среды предложенная В.С. Бондарем [73]. Эволюционное уравнение для повреждённости выглядит так:

$$\dot{D} = \alpha D^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}\dot{\varepsilon}^{\text{н}}_{ij}}{W} - g_D D,$$

где α есть коэффициент, зависящий от текущего напряжённого состояния, g_D — параметр, отвечающий за залечивание повреждений и зависящий от температуры и среднего напряжения, a_{ij} и W — текущий центр поверхности текучести и плотность энергии разрушения, являющиеся параметрами процесса, изменяющимися во времени. Прирост повреждённости происходит только за счёт неупругих деформаций. Это означает, что модель применима только в случае малоцикловой усталости и не учитывает влияние циклов небольшой амплитуды при высоком среднем напряжении, которые присутствуют в полётных программах.

Второй пример: модель упруго-вязко-пластической повреждаемой среды Волкова – Игумнова – Коротких [74], разработанная для моделирования усталостных процессов в деталях атомных энергетических установок. Процесс накопления усталостных повреждений разбит на две стадии: на первой стадии не происходит деградации механических свойств материала, которая начинается только со второй стадии. Усталостная повреждённость D_y разбита на две части: соответствующие многоцикловой усталости (МнЦУ) D_e и малоцикловой усталости (МЦУ) D_p. Переход между стадиями происходит, когда энергия, затраченная на рост D_p, превысит критическое значение. Таким образом, прирост параметра повреждённости, влияющего на механические свойства материала, происходит за счёт усталости и ползучести:

$$\dot{D} = \lambda \dot{D}_y + \dot{D}_c,$$

[11] Для несвязанных моделей нет смысла иметь такую зависимость, а если она есть, то от неё можно избавиться заменой переменной.

где $\lambda = 0$ на первой стадии и $\lambda = 1$ на второй. Целиком уравнения накопления каждой из повреждённостей D_e, D_p, D_c здесь не приводятся ввиду громоздкости. Модель применима для материалов сложной реологии в широких пределах изменения тензора напряжений и температуры, но содержит большое число материальных констант и функций, требующих идентификации.

В качестве примера несвязанной эволюционной модели накопления повреждённости можно привести модель Оттосена [75]. В основе модели лежит понятие поверхности выносливости, существующей в пространстве напряжений и способной перемещаться с течением времени, подстраиваясь под нагружение. Повреждённость не накапливается, пока напряжённое состояние находится внутри поверхности выносливости. На основе этой модели построена модель повреждённости [6; 7], используемая в этой работе, её подробное описание приведено в главе 3.

1.1.4 Влияние частоты нагружения и наличия выдержек на усталостную прочность

В процессе эксплуатации детали самолетов, вертолетов, экскаваторов, ветрогенераторов, наземного транспорта испытывают нерегулярное циклическое нагружение. Важными параметрами цикла нагружения являются кратковременные пиковые нагрузки, выдержки в нагруженном состоянии и их доли в цикле. Если первые можно учесть в рамках обычного для усталости склерономного описания, то выдержки в нагруженном состоянии могут вызывать в металлических сплавах при высоких (а иногда и комнатных) температурах деформации ползучести и повреждаемость, и потому вовлекают в описание процесса время. Подобные реономные эффекты лежат и в основе зависимости усталостных свойств от частоты регулярного нагружения там, где эта зависимость наблюдается.

Эффект зависимости усталостной долговечности от частоты нагрузки встречается и исследован для большого числа различных сплавов при комнатной и повышенной температуре [76; 77]. Экспериментальные кривые усталости, полученные при испытаниях на различных частотах, отличаются друг от друга; также отличаются и пределы выносливости. Зачастую эта зависимость немоно-

тонна: при повышении частоты усталостная долговечность (в циклах) сначала увеличивается, а потом падает [76; 78]. Величина эффекта варьируется для разных сплавов и температур и может достигать двух порядков, наиболее он выражен для области низких амплитуд нагрузки [79]. Эффект зависит и от коэффициента асимметрии цикла $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$. Так, в [80] для $\alpha - \beta$ титанового сплава Ti-6Al-4V изучалось повышение предела выносливости с увеличением частоты испытаний при различных R, и определено что эффект снижается с повышением R. При этом, как показано в той же статье, деформации ползучести растут с повышением R, и при достаточно высоком R (0.8 для этого материала) механизм разрушения может меняться от стандартной усталостной трещины на вязкое разрушение с возникновением и развитием пор.

В последние годы интерес к эффекту возрос в контексте сверхмногоцикловой усталости [81;82]. Испытания на базе порядка 10^9 и более циклов проводятся при высоких частотах (около 20 кГц), и возникает вопрос о сопоставимости результатов ускоренных испытаний и стандартных испытаний на усталость (с частотой 10-100 Гц), а также применимости результатов для оценки времени жизни в случаях, когда база $10^9 - 10^{11}$ циклов достигается за годы эксплуатации. В частности, прояснение данных вопросов позволило бы определить, в каких случаях и с какими поправками можно использовать данные ускоренных высокочастотных (значительно более быстрых и дешёвых) испытаний для оценки усталостной долговечности. В [83] проведены испытания на многоцикловую усталость $\alpha - \beta$ титанового сплава Ti-6Al-7Nb и ряда коммерчески чистых металлов при 100 Гц и 20 кГц. Для некоторых материалов эффект частоты почти отсутствовал, тогда как для других он был значителен. В [84] наличие эффекта частоты связывается с типом разрушения. При изучении титанового сплава Ti-6Al-4V в сверхмногоцикловом режиме при разных частотах, обнаружено, что в случаях подповерхностного разрушения увеличение частоты увеличивало время жизни, а для поверхностного[12] разрушения заметного эффекта не было. Таким образом, эффект влияния частоты нагружения на усталостную долговечность зависит от материала, температуры, типа разрушения, коэффициента асимметрии и базы испытаний.

Чтобы объяснить влияние частоты испытаний на усталостную долговечность, некоторые авторы обращаются к чувствительности металлов к скорости

[12]Здесь и далее поверхностным разрушением будет называться случай зарождения усталостной трещины на поверхности образца или детали.

деформации [77], что выражается в зависимости циклической $\sigma - \varepsilon$ диаграммы от скорости нагружения. Для определения физических механизмов эффекта авторы рассматривают разные стадии разрушения. В [85] на примере низкоуглеродистой стали определено, что зона пластической деформации в вершине распространяющейся трещины намного меньше при высокой частоте испытаний (20 кГц), чем при низкой (10 Гц). Это снижает зону повреждённого материала и затормаживает рост трещины. В [79] изучалось развитие дислокационных структур в ходе усталостного разрушения низкоуглеродистой стали. При низких частотах $0.2 - 140$ Гц формировались более крупные и упорядоченные структуры, чем при высокой частоте 20 кГц. Крупные дислокационные структуры, в свою очередь, упрощают формирование трещин. Это можно объяснить тем, что при высокой частоте дислокации смещаются на меньшие расстояния за цикл нагрузки по сравнению с низкой. К такому же выводу пришли авторы [86], изучая влияние частоты на усталостную долговечность подшипниковой стали.

Наличие выдержек в нагруженном состоянии (особенно при максимальной нагрузке) в цикле приводит к снижению усталостной долговечности, достигающему трёх порядков [18–20]. Этот феномен, называемый в англоязычной литературе dwell fatigue, далее будем называть «усталостью с выдержками». Отличие данного феномена от накопления повреждений в ходе циклической ползучести, состоит, во-первых, в том, что он наблюдается при комнатной, или близкой к ней, температуре, а во-вторых, отсутствует значительная макроскопическая необратимая деформация. На сегодняшний момент, когда в литературе говорят о dwell fatigue, речь идёт исключительно о титановых сплавах. На усталость с выдержками впервые обратили внимание ещё во второй половине 1970-х годов, так как она приводила к непредвиденному разрушению элементов газотурбинных двигателей [16; 21]. Однако и на сегодняшний день она приводит к авариям. Так, в 2017 году произошло крушение самолёта в результате разрушения детали авиадвигателя из титанового сплава Ti-6Al-4V [87].

Эффект усталости с выдержками особенно выражен для титановых сплавов α фазы или наличии небольшой доли β фазы, например, Ti-6242, IMI685, IMI829, IMI834, но он заметен и для сплавов смешанной $\alpha - \beta$ фазы, таких как Ti-6Al-4V или Ti-17 [87] (доля фаз в сплавах может меняться в зависимости от термической и механической обработки). Эффект наблюдается в режиме малоцикловой усталости, т.е. при высоких уровнях напряжений, и практически

исчезает при понижении амплитуды нагрузки [20; 88]. С увеличением времени выдержки, количество циклов до разрушения сначала падает, а затем становится постоянным на рубеже десятков секунд [88–90].

Интересна связь эффекта усталости с выдержками с температурой. Снижение усталостной долговечности максимально при температуре 80-120°C [91; 92] и исчезает при температуре около 200°C [87;91;93]. Это связывают со снижением пластической анизотропии α–фазы титана вблизи этой температуры [94]. Дополнительная выдержка при повышенной температуре и пониженном, по сравнению с пиком, напряжении может благоприятно влиять на усталостные свойства [20; 23], этот эффект называют thermal alleviation.

Физический механизм эффекта усталости с выдержками связан с высокой анизотропией кристаллической решётки α фазы титана: модуль Юнга варьируется в пределах 100-145 ГПа [95], а усилия начала деформации вдоль различных систем скольжения различаются до трёх раз [94]. Многие авторы принимают следующий механизм dwell fatigue [19; 20; 92]. Рассматривается граница между зонами с большой разницей ориентации кристаллической решётки. Причём, в одной из этих зон системы скольжения благоприятно расположены по отношению к напряжённому состоянию («мягкая» зона), а в другой — неблагоприятно («твёрдая» зона), т.е. когда максимальное растягивающее главное напряжение перпендикулярно базисной плоскости. В ходе выдержки дислокации зарождаются в «мягкой» зоне и выходят на границу «твёрдой» зоны, релаксируя напряжения в «мягкой» зоне и перенося их на «твёрдую», кроме того, создавая в «твёрдой» зоне концентраторы напряжений. В результате, под высокой нагрузкой в «твёрдой» зоне формируются фасеточные трещины лежащие приблизительно в базисной плоскости. Именно из-за того что «твёрдую» зёрна держат нагрузку пока в «мягкой» зоне происходят деформации ползучести, в ходе выдержек не заметен значительный прирост неупругих деформаций (в отличие от случаев классической циклической ползучести). Чем больше доля «твёрдой» зоны для конкретного направления нагрузки, тем сильнее эффект. На практике наблюдается, что наличие вытянутых областей α фазы увеличивает эффект. Так, в [88] были проведены эксперименты с образцами из Timetal 834, подвергнутыми двум типам термической обработки. Для обработки первого типа наблюдались крупные зоны одинаковой ориентации, имеющие примерно одинаковый размер вдоль различных направлений, и эффект был небольшой. Для второго типа обработки наблюдались крупные зоны одинаковой ориен-

тации, вытянутые вдоль направления приложения нагрузки, сопровождаемые снижением усталостной долговечности на 1–2 порядка вплоть до времени жизни 10^4 циклов, после чего эффект исчезает. Таким образом экспериментально выяснено, что наличие вытянутых кластеров α фазы негативно сказывается на времени жизни, а укрупнение зёрен и создание «переплетённой» структуры длинных зёрен α фазы в β фазе (basket weave structure) сказывается на времени жизни положительно.

Авторы [96] предлагают эволюционную модель накопления повреждённости с учётом выдержек:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пуст}}}{dt} = \alpha\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} - \gamma\frac{dF\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пуст}}, \boldsymbol{\sigma}, \delta\right)}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пуст}}}$$

где тензорная величина $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пуст}}$ служит в качестве параметра повреждённости — деформации за счёт возникновения и роста пустот; $F\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пуст}}, \boldsymbol{\sigma}, \delta\right)$ — свободная энергия материала с дефектами; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; δ — структурно-масштабный параметр, отвечающий за благоприятность структуры материала к росту дефектов и изменяющийся с накоплением повреждённости, для него тоже записывается эволюционное уравнение; α и γ — материальные параметры. Первое слагаемое (склерономное) описывает возникновение и рост пустот за счёт локализации пластических деформаций по механизму полос сдвига, а второе (реономное) отвечает за возникновение, рост и объединение пустот за счёт диссипации энергии структуры материала. В ходе роста параметра δ наблюдаются разные стадии разрушения со своей динамикой.

Накопление повреждений в ходе циклической ползучести тоже может приводить к зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и наличия выдержек [97; 98]. Циклическая ползучесть сопровождается макроскопическими деформациями и обычно наблюдается при повышенных температурах. Физические механизмы ползучести меняются в зависимости от материала и температуры [99]. Низкие напряжения, высокая температура и долгие выдержки (или низкая скорость деформации) благоприятствуют механизму диффузионной ползучести Набарро–Херринга [100;101], при которой диффузия вакансий и атомов происходит внутри зёрен, а также механизму диффузионной ползучести Кобла [102], при которой вакансии и атомы движутся вдоль границ зёрен. Высокие напряжения и высокая скорость деформации способствуют дислокационному механизму ползучести, связываемому со степенной

ползучестью, при которой дислокации, кроме движения в плоскости скольжения (характерный механизм пластической деформации), движутся за счёт диффузии атомов в ортогональном направлении (переползание) [103]. Эти чувствительные к времени механизмы действуют дополнительно к стандартным механизмам усталостного разрушения и ускоряют возникновение и развитие очагов усталостного разрушения.

В расчётах на усталостную долговечность влияние частоты и выдержек присутствует почти исключительно в контексте ползучести при повышенных температурах. Так, авторы работ [104;105] линейно складывают склерономную повреждённость и повреждённость за счет ползучести. Однако в расчётах на усталость при комнатной температуре редко встречается явный учёт частоты и выдержек. Учёт частоты ω можно ввести добавлением множителя ω^k в формулу Мэнсона предложенным Коффином Л. [106]:

$$\Delta\varepsilon^p = a\left(N\omega^k\right)^b,$$

В отдельных исследованиях влияния частоты на усталостную долговечность предлагаются способы его учета в расчетах. В [77] авторы связывают эффект частоты с чувствительностью деформационной диаграммы к скорости деформации. Они рассматривают соотношение Джонсона–Кука для предела текучести и предлагают считать, что количество циклов до разрушения зависит только от размаха пластической деформации. Тогда множитель, содержащий скорость деформации, увеличивает напряжение при постоянном размахе пластической деформации, что приводит к вертикальному смещению модельной кривой усталости вверх при увеличении частоты испытаний. Похожего подхода придерживаются и авторы [85] при учете эффекта частоты для низкоуглеродистой стали. Кривые усталости для частот $0.2 - 140$ Гц почти совпадают, если нормировать ординату к пределу текучести, зависящему от скорости деформации. Однако, кривая усталости для 20 кГц не приводится к остальным такой нормировкой, что может свидетельствовать о смене механизма накопления повреждений. Для случая усталости при повышенных температурах в [106] предлагается использовать метод разделения размаха или модель четырёх видов повреждённости. Первый заключается в разделении размаха неупругой деформации за цикл нагружения на четыре части

$$\Delta p = \Delta p_{pp} + \Delta p_{cc} + \Delta p_{pc} + \Delta p_{cp},$$

где Δp_{pp} есть деформация без выдержек, Δp_{cc} — деформация за счёт выдержек и при растяжении и при сжатии, Δp_{pc} — за счёт выдержки в полуцикле сжатия, Δp_{cp} — за счёт выдержки в полуцикле растяжения. Вклады этих частей в общую повреждённость линейно складываются и определяются по четырём кривым Вёлера в которых соответствующие части размаха деформации изолированы. В рамках модели четырёх видов повреждённости параметр повреждённости разделяется на четыре части

$$\omega = \omega_p^{\text{ц}} + \omega_c^{\text{ц}} + \omega_p^{\text{н}} + \omega_c^{\text{н}},$$

где $\omega_p^{\text{ц}}$ отвечает за циклическую пластичность, $\omega_c^{\text{ц}}$ — за циклическую ползучесть, $\omega_p^{\text{н}}$ — за накопленную пластическую деформацию, $\omega_c^{\text{н}}$ — за накопленную деформацию ползучести. Эти два метода применимы для нерегулярного нагружения при наличии выдержек.

1.2 Остаточные напряжения в контексте усталости

1.2.1 Реконструкция остаточных напряжений

Поверхностный слой тангенциальных сжимающих напряжений в металлических изделиях значительно повышает их характеристики по отношению к усталостному разрушению, трещиностойкости, коррозионному растрескиванию и износу, что особенно важно для авиационных двигателей и турбин. Для его наведения используют различные способы обработки, создающие в тонком приповерхностном слое изделия растягивающие собственные деформации[13] в касательной плоскости к обрабатываемой поверхности (обработку дробью, ультразвуком, лазерными импульсами, кавитационными микровзрывами, ионно-плазменным имплантированием, малопластическим выглаживанием и т.п.). Созданное поле собственных деформаций, будучи несовместным, порождает в упругом теле поле самоуравновешенных остаточных напряжений.

[13]Термин «собственные деформации», введенный впервые T.Mura, широко используется в технологических приложениях сварки [107] и поверхностной обработки [108].

Наиболее важной составляющей этого поля оказывается распределение тангенциальных сжимающих напряжений вблизи обработанной поверхности. Таким образом, экспериментальная реконструкция распределения остаточных напряжений в приповерхностном слое материала является важной подзадачей для оценки усталостной прочности поверхностно обработанной детали.

Методы экспериментальной реконструкции распределения остаточных напряжений имеют длинную историю. Популярные до сих пор разрушающие методы реконструкции в образцах с геометрией полоски, трубы или кольца берут начало в работах Давиденкова Н.Н. [109; 110], которые были развиты Биргером И.А. [111] и позднее Ивановым С.И. [112]. Эти образцы могут быть обработаны отдельно или вырезаны из обработанной детали, также практикуется использование стандартной пластины Ольмена (Almen strip) в качестве образца-свидетеля[14] [113; 114]. С образцов последовательного удаляются слои материала (содержащие собственные деформации) и измеряется изменение геометрии. Удаление может производиться механическим или, более щадящим, электрохимическим способом [115; 116]. В конечном итоге, по зависимости изменения геометрии от толщины слоя удалённого материала, с использованием явных формул восстанавливается поле остаточных напряжений.

Более универсальным способом определения остаточных напряжений является метод сверления отверстий [117]. Он заключается в измерении деформаций в нескольких точках на поверхности образца в ходе сверления маленького[15] отверстия. Измерения могут проводиться специальной розеткой, прикрепляемой вокруг отверстия или методом корреляции изображений. Это изменение упругих деформаций происходит в результате исчезновения остаточных напряжений на стенке отверстия. По зависимости деформаций от глубины отверстия, приближённо решая обратную задачу [117], получают распределение тангенциальных компонент остаточных напряжений по глубине. В отличие от методов типа Давиденкова, этот метод позволяет определить остаточные напряжения сразу в обработанной детали, однако присутствуют геометрические ограничения: не всегда возможно прикрепить аппаратуру для сверления и измерения деформаций к интересующей точке детали. Можно использовать другую геометрию удаляемого объёма материала. В [118] рассматривается вертикаль-

[14] Образец свидетель обрабатывается вместе с деталью

[15] Для точных измерений используется диаметр отверстия 0.5-2мм, но в некоторых случаях диаметр может достигать 5мм.

ный дисковый разрез. В [119] на поверхности создаётся круговая канавка, и методом корреляции изображений замеряются деформации, происходящие на поверхности островка материала. В этой работе исследовались остаточные напряжения на масштабном уровне зерна, для чего канавка шириной 1 мкм и диаметром от 2 до 10 мкм вытравливалась сфокусированным ионным пучком.

Существуют и неразрушающие методы контроля остаточных напряжений. Они основаны на дифракции рентгеновского [120], нейтронного или синхротронного [121;122] излучения на кристаллической решётке. Измеряется среднее расстояние между атомами в решётке, с помощью которого, при сравнении с ненапряжённым материалом, вычисляют упругие деформации, связанные с остаточными напряжениями законом Гука. Лабораторные рентген дифрактометры по типу Xstress 3000 позволяют измерить напряжения только на поверхности образца или детали. В комбинации с послойным удалением материала это позволяет получать распределение остаточных напряжений по глубине [120]. Мощные установки нейтронного или синхротронного излучения позволяют получать пространственные распределения остаточных напряжений, не разрушая материал, но есть сильные ограничения на размер образца, кроме того, таких установок мало[16], и их использование затратно.

Распределение собственных деформаций вместе с остаточными напряжениями можно получить и с помощью прямого моделирования технологического процесса обработки. Это было успешно проделано для дробеструйной обработки [123–128], лазерной нагартовки [129;130], обработки кавитирующими пузырьками [131] и ультразвуковой обработки [132; 133].

1.2.2 Способы внесения остаточных напряжений в расчёт

Описанные в предыдущем подразделе методы, кроме прямого моделирования, позволяют получить распределение остаточных напряжений в образце или небольшой области детали. Однако, современные инженерные подходы часто включают в себя конечно-элементное моделирование деталей и возникает задача внедрения остаточных напряжений в расчёт. Для этого можно использовать

[16]Установок с достаточным разрешением для получения профиля остаточных напряжений толщиной меньше миллиметра в мире единицы

прямое моделирование техпроцесса, но это отдельная сложная задача, полезная для исследования закономерностей формирования слоя остаточных напряжений и выбора рациональных режимов, но для внесения остаточных напряжений в численную модель расчёта долговечности изделия оно выглядит избыточным средством. Поэтому обратимся к другим методам. Нельзя напрямую переносить поля напряжений, полученные при исследовании образцов простой геометрии, в деталь или просто и однозначно восстановить остаточные напряжения во всей детали, если они известны в небольшой области, потому что поле остаточных напряжений должно удовлетворять уравнению равновесия. Вместо этого удобно задавать распределение по глубине приповерхностного слоя собственных деформаций, являющихся источником остаточных напряжений в упругом теле. В отличие от поля остаточных напряжений, слой собственных деформаций вблизи свободной границы не изменяется при вырезке образца из обработанного изделия, не должен удовлетворять каким-либо полевым уравнениям и потому предоставляет удобный способ введения остаточных напряжений в численную модель [128; 129; 134]. Возникает проблема реконструкции распределения собственных деформаций. Все известные варианты ее решения сводятся к некорректным задачам. Популярным является следующий вариант [134–138]. Пусть имеется экспериментально измеренное поле остаточных напряжений. Тогда распределение пластических деформаций параметризуется набором констант, и рассматривается возникающее модельное поле остаточных напряжений. Набор констант определяется из условия наибольшего соответствия модельного поля экспериментальному. В [139] распределение собственных деформаций предлагается реконструировать по известному распределению остаточных напряжений методом последовательных приближений. Можно параметризовать и поле напряжений, удовлетворяя уравнению равновесия приближённо [140]. Встречается вариант реконструкции профиля собственных деформаций на основе аналитического, полуаналитического или численного решения задачи о распределении пластических деформаций в упруго-пластическом полупространстве, вызванном ударом одного шарика [126; 128; 141–144].

В данной работе автором будут предложены явные точные формулы реконструкции распределения собственных деформаций в приповерхностном слое материала. Они позволяют напрямую, без решения дополнительных задач, получать профиль собственных деформаций по данным экспериментов типа Давиденкова для образцов типа колец или полосок, либо по экспери-

ментально полученному профилю остаточных напряжений (например методом рентген-дифрактометрии в комбинации с травлением или методом сверления отверстий).

1.2.3 Оценка усталостной прочности при наличии остаточных напряжений

Исследованию влияния поверхностной обработки на усталостную прочность посвящен ряд расчётно-экспериментальных работ, например [57;145;146]. В некоторых работах предлагаются методы оценки влияния остаточных напряжений на усталостную прочность. Обычно это модификации стандартного метода подсчёта циклов или модели Лемэтра – Шабоша, описанные выше в разделе 1.1.3. По-видимому, из-за неуниверсальности и разрозненности предлагаемых методик, ни одна из них не является повсеместно внедренной в практику расчетов на усталость в конструкторских бюро. В [147] влияние остаточных напряжений на усталостную прочность предлагается рассматривать в контексте предела выносливости.

Для учета поверхностных остаточных напряжений в численной модели предлагается подход, основанный на расчетно-экспериментальной реконструкции приповерхностного профиля собственных деформаций, несовместная часть которых порождает остаточные напряжения, без моделирования технологического процесса поверхностной обработки детали. Для этого можно использовать точные решения ряда обратных задач для полосы с односторонней или двухсторонней обработкой, полученные автором [2;11;12]. Этот реконструированный профиль приповерхностных собственных деформаций внедряется в численную модель и дает составляющую поля напряжений, не зависящую от циклов силового и температурного воздействий. Детальное распределение по глубине остаточных напряжений можно вводить с помощью поверхностных конечных элементов, использование нескольких слоев которых позволяет задать профиль. Единственной обнаруженной работой, в которой учитывается детальный профиль остаточных напряжений, является [57].

Далее для оценки усталостной прочности необходимо применять модель усталости. Из моделей и подходов, описанных в разделе 1.1.3, для случая на-

грузки поверхностно обработанных деталей авиадвигателя в ходе полётных циклов[17], применимы модели эволюционного типа. Такие модели позволяют по известной истории изменения тензора напряжений в точке определить накопленную повреждённость. В данной работе выбрана несвязанная модель, так как она будет применяться для случаев отсутствия макроскопических пластических деформаций, а при усталости в таком режиме механические свойства материала начинают заметно меняться только под конец времени жизни, а значит учёт подобных изменений слабо изменит оценку. Кроме того, несвязанность модели позволяет расчитывать время жизни независимо от конечно-элементного расчёта напряжений, упомянутого в предыдущем абзаце (т.е. в режиме постпроцессинга). В таком случае не требуется создание новой модели материала внутри МКЭ пакета.

Важным вопросом является влияние поверхностной обработки изделия на усталостные свойства материала (помимо наличия остаточных напряжений) при расчете его долговечности. Один из подходов предполагает изучение усталостных свойств образцов с аналогичной поверхностной обработкой, а также без нее. Наклеп при поверхностной обработке конструкции вызывает деформационное упрочнение и сжимающие тангенциальные остаточные напряжения в приповерхностном слое, которые перемещают место зарождения усталостных трещин с поверхности вглубь, под этот слой. Этот подход может быть реализован при выполнении систематических исследований усталостных испытаний образцов из титановых сплавов с поверхностным упрочнением лазерной проковкой (чем занимается, например, группа О.А. Плехова в ИМСС УрО РАН). Другой подход предполагает использование данных усталостных испытаний необработанных образцов, в которых спровоцировано зарождение трещин под поверхностью (сверхмногоцикловая усталость, контактная усталость). В этом случае требуется учет остаточных напряжений и изменения свойств материала (которые можно связать с микротвердостью) в тонком слое материала, вызванных наклепом. В данной работе будет использован этот подход.

[17] особенности такой нагрузки описаны в разделе 1.1.1

1.3 Выводы по главе 1

Ряд ответственных деталей авиадвигателя при эксплуатации подвержены циклическим механическим и температурным нагрузкам, которые сопровождаются нерегулярностью, многоосностью, несинфазностью, переменной частотой и выдержками, что необходимо учитывать при оценке усталостной долговечности.

Существуют стандартные методы оценки усталостной долговечности, не способные сразу учесть все эти особенности, а также сложные связанные модели накопления усталостной повреждённости, которые способны учесть весь этот комплекс особенностей, но сложны для проведения численных расчётов и идентификации. Отмечается недостаток разработанности промежуточного класса несвязанных моделей, более простых для расчётов и идентификации, но способных описать перечисленные особенности нагружения.

Поверхностные сжимающие остаточные напряжения, наводимые для повышения усталостной прочности, вносят в конечноэлементный расчёт с помощью распределения собственных деформаций, которое получают либо прямым моделированием технологического процесса поверхностной обработки, либо из данных экспериментального исследования обработанных образцов, для чего численно решают обратную задачу. Прямое моделирование процесса является отдельной сложной задачей, избыточной для оценки усталостной прочности, но решение обратной задачи при обработке экспериментальных данных также является сложной для инженера конструкторской организации.

Тема учёта остаточных напряжений при оценке усталостной прочности деталей недостаточно разработана.

Для разработки теоретических основ методики расчета усталостной долговечности ответственных деталей машин с учетом поверхностной обработки при их нерегулярном нагружении необходимо решить следующие задачи:

– Упростить процедуру решения обратной задачи реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций по глубине детали, подвергнутой поверхностной обработке, с плоской или цилиндрической поверхностью по данным разрушающего контроля остаточных напряжений, получив явные точные выражения для искомых распределений.

– Построить эволюционную модель накопления усталостной повреждённости для произвольной нерегулярной истории циклического нагружения с учетом асимметрии, многоосности и непропорциональности, частоты нагружения и выдержек, применимую в режиме постпроцессинга, т.е. после и независимо от конечноэлементного моделирования нагружения детали. Выполнить идентификацию и верификацию модели.
– Разработать метод оценки усталостной прочности детали авиадвигателя на полётном цикле нагружения с учётом остаточных напряжений и апробировать его на нескольких задачах.

Материал этой главы опубликован в обзорных частях статей [2; 7; 9] и учебном пособии [148].

ГЛАВА 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ РАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

В этой главе решается поставленная во введении задача упрощения процедуры решения обратной задачи реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций по глубине детали, подвергнутой поверхностной обработке, с плоской или цилиндрической поверхностью по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Такие распределения удобно использовать для введения поля остаточных напряжений в деталь при конечноэлементном расчёте. В рамках решения задачи будут выведены точные формулы реконструкции распределения собственных деформаций в деталях плоской и цилиндрической геометрии. В качестве исходных данных рассматриваются

(a) зависимость стрелы прогиба полоски либо радиуса разрезанного кольца от толщины снятого слоя материала.

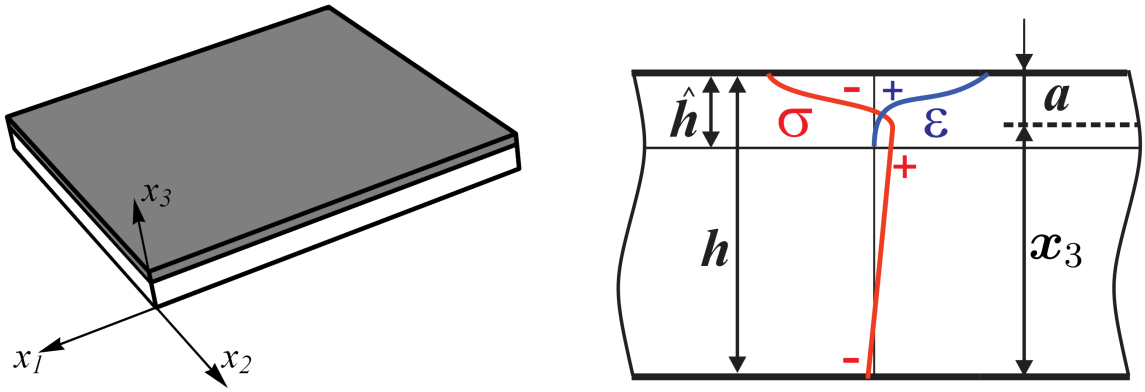
(b) зависимость главной тангенциальной компоненты напряжений на поверхности полоски от толщины снятого слоя материала.

(c) распределение тангенциальных компонент напряжений в приповерхностном слое.

Здесь (a) есть исходные данные, получаемые методом полосок или методом Давиденкова, (b) — исходные данные, получаемые рентгеновской дифрактометрией, (c) — профиль остаточных напряжений, реконструированный по данным (a) или (b), опубликованный либо известный по протоколам лабораторного исследования. Ниже будут даны явные точные решения данных задач пространственной теории упругости в рамках гипотезы об однородности поверхностной обработки. При этом рассмотрена возможная анизотропия обработки, для учёта которой предполагается вырезание двух образцов с поверхности детали.

2.1 Реконструкция полей в образце плоской геометрии

2.1.1 Задача о пластине со слоем собственных деформаций



а) б)

Рисунок 2.1 — Пластина (серым цветом обозначен слой собственных деформаций) (а) и её сечение плоскостью $x_2 = \text{const}$ (б).

Рассмотрим задачу о достаточно большой (или достаточно тонкой) пластине у которой линейные размеры l много больше её толщины h со слоем собственных деформаций. Напряженно–деформированное состояние пластины подчиняется полевым уравнениям: закону Гука, уравнению равновесия и уравнению совместности:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{sp}\,(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right) \quad \text{или} \quad \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — тензор собственных деформаций, $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений, $\mathrm{sp}(\cdot)$ — след тензора, λ, μ — коэффициенты Ламе. Пластина свободна от внешних усилий и имеет слой собственных деформаций вида

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} f(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & g(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -f(x_3) - g(x_3) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

однородный в плоскости пластины. Компоненты (2.2) записаны в декартовой системе координат, ось x_3 ортогональна плоскости пластины ($x_3 = 0$ на нижней стороне пластины, рис.2.1), оси x_1, x_2 расположены в плоскости пластины. Компонента ε^*_{33} взята такой, чтобы отсутствовали объёмные собственные деформации, что является часто принимаемой гипотезой пластичности. Однако, ε^*_{33} можно взять произвольной функцией x_3, и это не изменит напряжённого состояния. Компоненты ε^*_{13} и ε^*_{23} взяты нулевыми, так как их наличие также не изменяет распределение остаточных напряжений. Покажем это. Рассмотрим случай собственных деформаций вида

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}(x_3) \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}(x_3) \\ \varepsilon_{13}(x_3) & \varepsilon_{23}(x_3) & \varepsilon_{33}(x_3) \end{pmatrix}.$$

Подставим такой тензор в уравнение совместности деформаций (2.1) и убедимся, что оно тождественно выполняется. Совместность поля собственных деформаций влечет за собой отсутствие остаточных напряжений. Так как уравнения (2.1) линейны, компоненты ε^*_{13} и ε^*_{23} можно исключить из рассмотрения, а ε^*_{33} принять произвольной функцией x_3. Это и требовалось показать. Без потери общности, будем считать, что собственные деформации обращаются в 0 на нижней стороне пластины $x_3 = 0$. Если же $f(0) = f_0 \neq 0$, $g(0) = g_0 \neq 0$, то, так как наложение однородных собственных деформаций не приводят к изменению остаточных напряжений, эту часть деформаций можно исключить: $f^{new}(x_3) = f(x_3) - f_0$, $g^{new}(x_3) = g(x_3) - g_0$. Так как пластина достаточно большая вдоль координат x_1 и x_2, пренебрежём краевыми эффектами и будем считать напряженно-деформированное состояние зависящим только от координаты x_3. Так как задача инвариантна при отражении относительно плоскостей $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$,

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$

и матрицы компонент полных деформаций и напряжений примут вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_3) \end{pmatrix}, \; \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_3) \end{pmatrix}.$$

Далее, из уравнения равновесия

$$\sigma'_{33}(x_3) = 0,$$

граничных условий на верхней и нижней сторонах пластины

$$\sigma_{33}(0) = 0, \quad \sigma_{33}(h) = 0$$

и совместности деформаций

$$\varepsilon''_{11}(x_3) = \varepsilon''_{22}(x_3) = 0$$

можно получить

$$\begin{gathered} \sigma_{33}(x_3) = 0, \\ \varepsilon_{11}(x_3) = c_1 x_3 + c_2, \;\; \varepsilon_{22}(x_3) = c_3 x_3 + c_4. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из закона Гука (2.1), записанного для $\sigma_{33} = 0$, получим

$$\varepsilon_{33}(x_3) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(c_1 + c_3)x_3 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(f(x_3) + g(x_3)\right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(c_2 + c_4). \tag{2.4}$$

Далее, записывая закон Гука для σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} и используя (2.4), получим выражения для остаточных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_3) &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(c_2 + \nu c_4 + \left(c_1 + \nu c_3\right) x_3 - f(x_3) - \nu g(x_3)\right), \\ \sigma_{22}(x_3) &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(c_4 + \nu c_2 + \left(c_3 + \nu c_1\right) x_3 - g(x_3) - \nu f(x_3)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где коэффициенты Ламе λ, μ выражены через модуль Юнга и коэффициент Пуассона E, ν. Остаточные напряжения имеют линейную зависимость от координаты x_3 в той части пластинки, где отсутствуют собственные деформации. Определим константы c_i в (2.3), (2.5). Это можно сделать используя принцип минимума упругой энергии [149]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^h \sigma_{ij}\varepsilon^e_{ij} dz \to \min \;\Rightarrow\; \frac{\partial U}{\partial c_i} = 0,\; i = 1..6,$$

$$E^y = \frac{1}{2}\int_0^h \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dx_3 = \frac{1}{2}\int_0^h \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^*_{ij}) dx_3 \to min \;\Rightarrow\; \frac{\partial E^y}{\partial c_i} = 0,\; i = 1..4.$$

Это эквивалентно отсутствию усилий и моментов в сечениях, ортогональных плоскости пластинки:

$$F_1 = \int_0^h \sigma_{11}(x_3)dx_3 = 0, \quad M_1 = \int_0^h \sigma_{11}(x_3)x_3dx_3 = 0,$$
$$F_2 = \int_0^h \sigma_{22}(x_3)dx_3 = 0, \quad M_2 = \int_0^h \sigma_{22}(x_3)x_3dx_3 = 0.$$

В итоге константы равны

$$c_1 = \frac{12}{h^3}\int_0^h x_3 f(x_3)dx_3 - \frac{6}{h^2}\int_0^h f(x_3)dx_3, \quad c_2 = -\frac{6}{h^2}\int_0^h x_3 f(x_3)dx_3 + \frac{4}{h}\int_0^h f(x_3)dx_3,$$
$$c_3 = \frac{12}{h^3}\int_0^h x_3 g(x_3)dx_3 - \frac{6}{h^2}\int_0^h g(x_3)dx_3, \quad c_4 = -\frac{6}{h^2}\int_0^h x_3 g(x_3)dx_3 + \frac{4}{h}\int_0^h g(x_3)dx_3. \tag{2.6}$$

Чтобы выяснить прогиб пластинки необходимо найти вертикальные перемещения u_3 на нижней стороне пластинки $x_3 = 0$. Сделаем это известным методом, последовательно интегрируя величины вдоль координатных осей

$$u_{3,1}(x_1,0,0) = \int_0^{x_1} 2\varepsilon_{31,1}(s,0,0) - \varepsilon_{11,3}(s,0,0)ds = -c_1x_1,$$
$$u_{3,2}(x_1,x_2,0) = \int_0^{x_1} \varepsilon_{32,1}(s,0,0) + \varepsilon_{31,2}(s,0,0) - \varepsilon_{21,3}(s,0,0)ds +$$
$$+ \int_0^{x_2} 2\varepsilon_{32,2}(x_1,s,0) - \varepsilon_{22,3}(x_1,s,0)ds = -c_3x_2,$$
$$u_3(x_1,x_2,0) = \int_0^{x_1} u_{3,1}(s,0,0)ds + \int_0^{x_2} u_{3,2}(x_1,s,0)ds = -\frac{c_1}{2}x_1^2 - \frac{c_3}{2}y_1^2. \tag{2.7}$$

Стрела прогиба $w = -u_3$ вдоль координаты x_1 зависит только от $f(x_3)$, а стрела прогиба вдоль координаты x_2 — только от $g(x_3)$:

$$w_1 = -u_3(L/2,0,0) = \frac{3}{4}L^2\left(\frac{2}{h^3}\int_0^h x_3 f(x_3)dx_3 - \frac{1}{h^2}\int_0^h f(x_3)dx_3\right),$$
$$w_2 = -u_3(0,L/2,0) = \frac{3}{4}L^2\left(\frac{2}{h^3}\int_0^h x_3 g(x_3)dx_3 - \frac{1}{h^2}\int_0^h g(x_3)dx_3\right), \tag{2.8}$$

где L — длина отрезка, на котором замеряется стрела прогиба. Если слой собственных деформаций изотропен (такой слой, например, получается при дробеструйной и многих других типах обработки поверхности), то есть $f(x_3) =$

$g(x_3)$, остаточные напряжения (2.5) будут иметь вид

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \left(c_1 x_3 + c_2 - f(x_3)\right) = \frac{E}{1-\nu} \left(c_1 x_3 + c_2 - f(x_3)\right), \quad (2.9)$$

выражения для констант c_1, c_2 даны в (2.6).

Так как пластина свободна от внешних усилий, профиль остаточных напряжений всегда будет самоуравновешенным и имеющим нулевой момент. Значит, если собственные деформации сконцентрированы в приповерхностном слое (и они положительны), то распределение остаточных напряжений по глубине будет состоять из трёх слоёв: сжимающих-растягивающих-сжимающих. Таким образом, и с обработанной, и с необработатанной сторон пластинки будут сжимающие остаточные напряжения, а внутри пластинки — растягивающие.

Проанализируем характеристики профиля остаточных напряжений в зависимости от толщины слоя собственных деформаций. Рассмотрим четыре профиля собственных деформаций одинаковой амплитуды и различной тол-

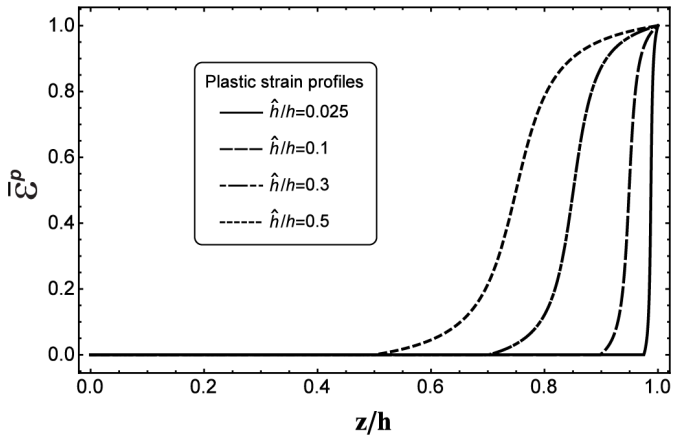


Рисунок 2.2 — Профили собственных деформаций, отнесённые к $\varepsilon_1^*(h)$.

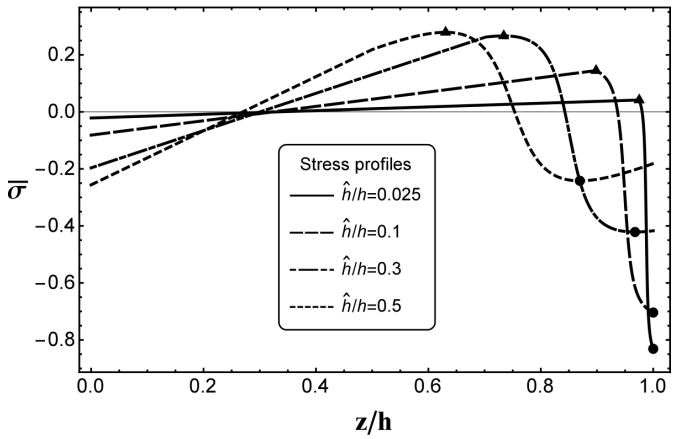


Рисунок 2.3 — Профили остаточных напряжений, отнесённые к $\varepsilon_1^*(h)E/(1-\nu)$, и созданные собственными деформациями рис.2.2.

щины (рис.2.2). Им соответствуют четыре профиля остаточных напряжений рис.2.3.

С увеличением толщины слоя собственных деформаций, увеличивается и толщина слоя сжимающих остаточных напряжений, однако модуль этих напряжений снижается, а максимальное значение растягивающих напряжений увеличивается. Рис.2.4 показывает, как ведет себя отношение максимальных растягивающих напряжений σ_+ к максимальным сжимающим напряжениям σ_- в зависимости от толщины слоя собственных деформаций. Это отношение может даже превышать единицу. Результат помогает понять невозможность одновременной минимизации нежелательных растягивающих напряжений и увеличения глубины их залегания.

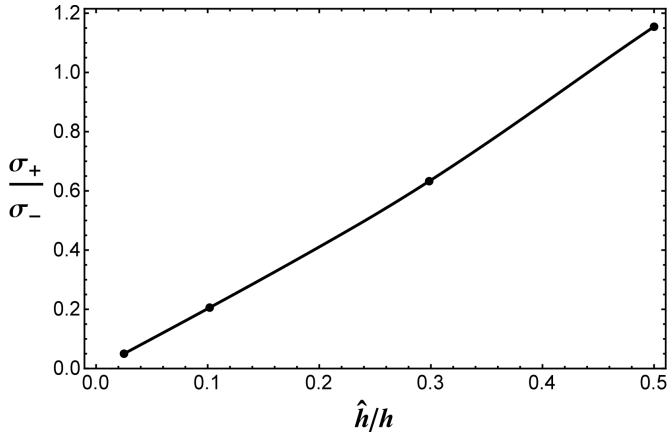


Рисунок 2.4 — Зависимость отношения максимальных растягивающих напряжений к максимальным сжимающим от толщины слоя собственных деформаций (точки соответствуют слоям приведённым на рис.2.2 и рис.2.3).

2.1.2 Метод полосок

Метод полосок хорошо подходит для нахождения распределения собственных деформаций в тонком приповерхностном слое обработанных деталей и образцов. Типичные виды обработки включают в себя обработку дробью, ультразвуком, лазерными импульсами, кавитационными микровзрывами, ионно-плазменным имплантированием, малопластическим выглаживанием, проковку и т.п. Такие виды обработки, как правило, вносят в деталь растягивающие

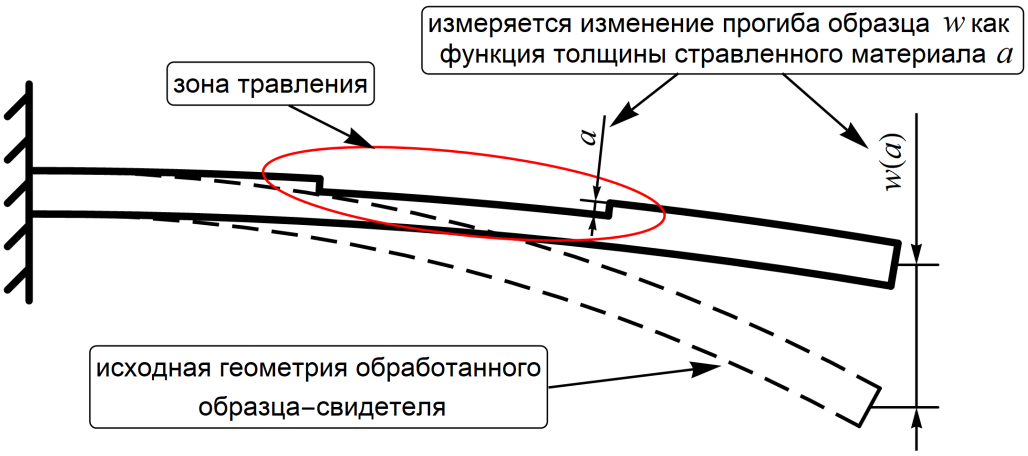


Рисунок 2.5 — Метод полосок.

собственные деформации в касательной плоскости к обрабатываемой поверхности. В рамках метода с поверхности детали вырезается полоска. Прогибы полоски конечной ширины и пластинки при идентичных профилях собственных деформаций совпадают[18], что доказывается в приложении А. Это означает, что формулы (2.8), полученные в предыдущем подразделе для достаточно большой пластинки, будут применимы и для полоски. Затем с обработанной поверхности полоски последовательно стравливаются слои материала и измеряется изменение её прогиба [111], что схематически изображено[19] на рис.2.5.

Пусть a — толщина стравленного слоя, тогда (2.8) примет вид

$$w(a) = \frac{3}{4}L^2\left(\frac{2}{(h-a)^3}\int\limits_0^{h-a} x_3 f(x_3)dx_3 - \frac{1}{(h-a)^2}\int\limits_0^{h-a} f(x_3)dx_3\right). \qquad (2.10)$$

Нам необходимо обратить (2.10). Сделаем замену $h-a=z$, домножим (2.10) на z^3 и продифференцируем по z дважды и получим $\left(3z^2\hat{w}(z)+z^3\hat{w}'(z)\right)' = \frac{3}{4}L^2 z f'(z)$, где $\hat{w}(z) = w(h-z)$, откуда

$$f(z) = \frac{4}{3L^2}\int\limits_0^z z^{-1}\left(3s^2\hat{w}(s)+s^3\hat{w}'(s)\right)'ds = \frac{4}{3L^2}\left(z^2\hat{w}'(z)+4z\hat{w}(z)+2\int\limits_0^z \hat{w}(s)ds\right)$$

[18]Хотя прогибы совпадают, распределения остаточных напряжений в полоске и в пластинке будут разными.

[19]На рисунке изображён часто реализуемый на практике случай, когда материал снимается только с части поверхности. В этом случае в измеряемый прогиб $w(a)$ необходимо вносить поправки, например, считая, что незатрагиваемые участки полоски не деформируются.

и окончательно

$$f(h-a) = \frac{4}{3L^2}\left(-(h-a)^2 w'(a) + 4(h-a)w(a) + 2\int\limits_a^h w(s)ds\right). \qquad (2.11)$$

Проанализируем формулу (2.11). Будем считать известной из эксперимента функцию $w(a)$, $0 \leqslant a \leqslant a_{max}$. В формулу (2.11) входит интеграл $\int\limits_a^h w(s)ds$, поэтому для того чтобы определить $f(x_3)$, необходимо чтобы максимальная глубина стравливания a_{max} была больше толщины слоя собственных деформаций, то есть $f(x_3) = 0$ при $x_3 \leqslant h - a_{max}$, тогда из (2.8) следует $w(a) = 0$, $a \geqslant a_{max}$, и можно определить $f(x_3)$ по всей толщине пластины. Недостатком формулы (2.11) является присутствие в ней производной $w'(a)$, которая определяется из экспериментальных данных с более низкой точностью.

Таким образом, для определения распределения собственных деформаций в поверхностно обработанной детали, если обработка была изотропной (например дробеструйная обработка), необходимо:

1. Вырезать из нее плоскую полоску постоянной толщины (причём ширина полоски не важна).
2. С помощью эксперимента удаляя слои материала, построить зависимость прогиба от толщины стравленного слоя $w(a)$.
3. По формуле(2.11) найти функцию $f(x_3)$.
4. Распределение собственных деформаций будет иметь вид (2.2), при этом $g(x_3) = f(x_3)$.

Если же поверхностная обработка была анизотропной (например обкатка роликом), то нужно:

1. Вырезать две полоски вдоль направлений симметрии обработки (для обкатки роликом это будут направления соответственно вдоль и поперек направления прокатки). Эти направления в формулах соответствуют направлениям x_1 и x_2.
2. С помощью эксперимента, удаляя слои материала, построить зависимость прогибов от толщин стравленного слоя $w(a)$ для обоих образцов.
3. Для первого образца, по формуле (2.11) найти $f(x_3)$.
4. Для второго образца, по той же формуле (2.11) (заменив в ней f на g), найти $g(x_3)$.
5. Распределение собственных деформаций будет иметь вид (2.2).

Остаточные напряжения можно найти по формулам (2.5) в случае детали, похожей на пластину или достаточно широкую полоску. Чтобы получить явные формулы для остаточных напряжений через прогибы, необходимо в формулах (2.5) подставить выражения для $f(x_3)$ и $g(x_3)$ из (2.11):

$$\sigma_{11}(x_3) = \frac{4(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}S_1(x_3) + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}S_2(x_3) = \frac{S_1(x_3)+\nu S_2(x_3)}{1-\nu^2},$$
$$\sigma_{22}(x_3) = \frac{4(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}S_2(x_3) + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}S_1(x_3) = \frac{S_2(x_3)+\nu S_1(x_3)}{1-\nu^2},$$
$$S_1(h-a) = \frac{4E}{3L^2}\Bigg((h-a)^2 w_1'(a) - 4(h-a)\left(w_1(a)-w_1(0)\right) + \\ + 2\int_0^a \left(w_1(s)-w_1(0)\right)ds\Bigg), \qquad (2.12)$$
$$S_2(h-a) = \frac{4E}{3L^2}\Bigg((h-a)^2 w_2'(a) - 4(h-a)\left(w_2(a)-w_2(0)\right) + \\ + 2\int_0^a \left(w_2(s)-w_2(0)\right)ds\Bigg),$$

где $w_1(a)$ и $w_2(a)$ — зависимости прогибов (в направлениях x_1 и x_2 соответственно) от толщины снятого слоя, то есть в конечных пластинках-образцах, вырезанных из большой пластины вдоль соответствующих направлений.Выражения для σ_{11} и σ_{22} в (2.12) совпадают с приведенными И.А. Биргером в статье [150], полученными из других соображений. Кроме того выражения для S_1,S_2 в (2.12) совпадают с известной формулой для экспериментального определения остаточных напряжений [111]:

$$\sigma_{11}(a) = \frac{4E}{3L^2}\left((h-a)^2\tilde{w}'(a) - 4(h-a)\tilde{w}(a) + 2\int_0^a \tilde{w}(s)ds\right), \qquad (2.13)$$

где $\tilde{w}(a) = w(0) - w(a)$ — изменение стрелы прогиба. Формула (2.13) была получена с использованием гипотезы $\sigma_{22}(a) \equiv 0$, что не выполняется для конечных пластинок и полосок. Стоит отметить что величины $S_1(x_3)$ и $S_2(x_3)$ не являются ни напряжениями, присутствующими в исходной большой пластине, ни напряжениями, присутствующими в вырезанных из нее конечных пластинках-образцах для экспериментального исследования.

Если обработанная деталь имеет сложную геометрию, то остаточные напряжения можно найти численно, внося в расчет известный слой собственных деформаций. В пакете ANSYS это можно сделать, например, с помощью задания неоднородного поля коэффициентов линейного температурного расширения по толщине приповерхностного слоя, разбитого на поверхностные конечные элементы.

2.1.3 Пример применения метода полосок

Стандартная пластина Ольмена размерами 100x19x1.3 мм, изготовленная из пружинной стали 65Г и закаленная до твердости HRC 51, консольно закрепленная на одном конце и свободно опертая на другом, была обработана на АО «ОДК–Пермские моторы» с одной стороны в течение 45 секунд на пневмодробеструйной установке микрошариками из быстрорежущих сталей фракции 0.16-0.20. Обработанные пластины приобрели изогнутую форму с выпуклостью навстречу воздействию. Средняя часть каждой из этих пластин была разрезана вдоль длинной стороны на три полоски шириной 5.9 мм, которые были разрезаны поперек для трех различных установок.

На установке АПООН [115] АО «ОДК–Пермские моторы» при непрерывном электрохимическом травлении обработанной поверхности для образца-полоски длиной 54 мм была определена непрерывная зависимость

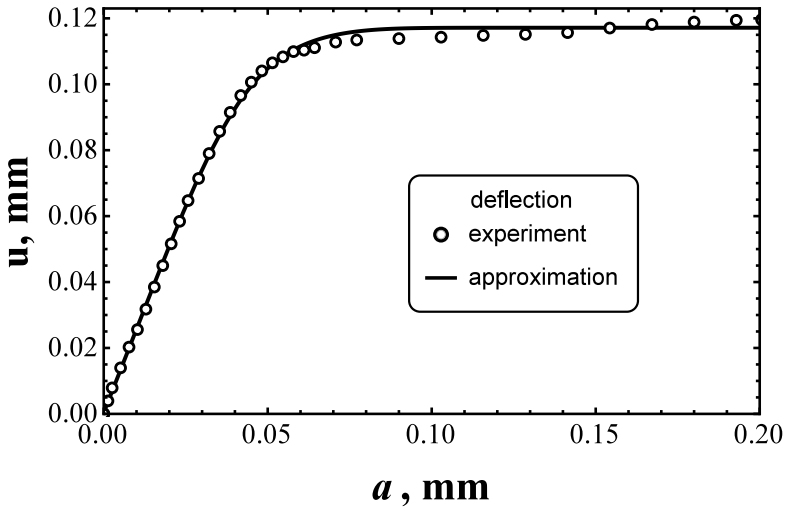


Рисунок 2.6 — Зависимость изменения прогиба полоски от толщины стравленного слоя (эксперимент).

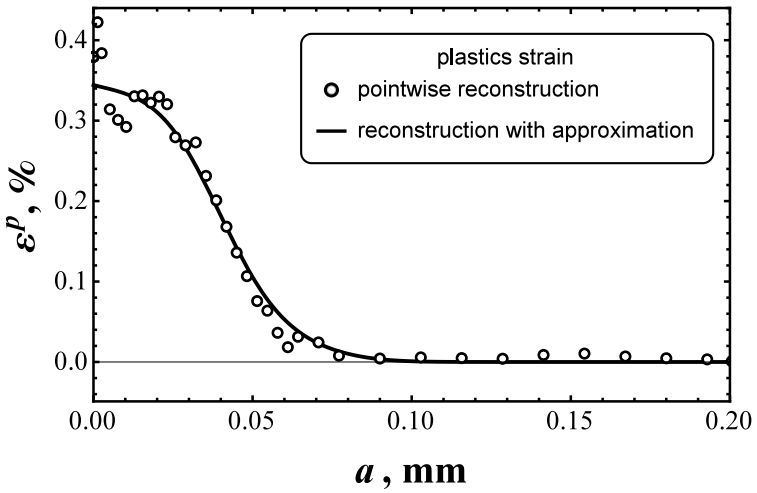


Рисунок 2.7 — Собственные деформации $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^*$ в приповерхностном слое, реконструированные по экспериментальным данным рис.2.6.

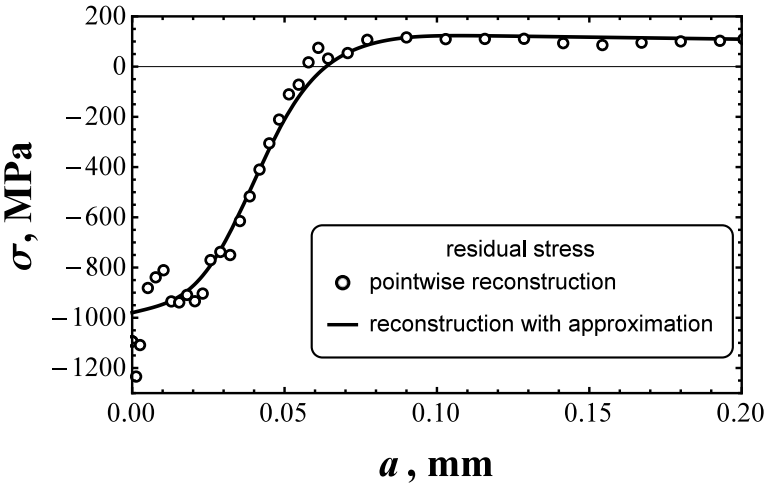


Рисунок 2.8 — Остаточные напряжения в приповерхностном слое, реконструированные по экспериментальным данным рис.2.6.

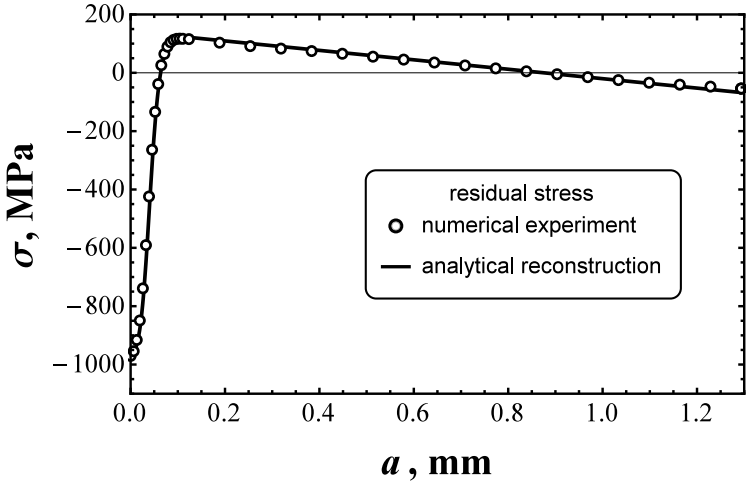


Рисунок 2.9 — Сравнение распределений остаточных напряжений по толщине полоски, полученных численно и по формулам (2.5),(2.6).

стрелы прогиба от глубины снятого слоя. Для предотвращения усиления вклада в результат погрешностей лабораторной установки, происходящего из-за присутствия производной в выражениях (2.11), (2.12), экспериментальные зависимости дискретизировались и сглаживались аппроксимацией

$$\tilde{u}(a) = \varkappa_1\big((1 + \operatorname{erf}(\varkappa_3(\varkappa_2 a - 1))) + \varkappa_2 a\,(1 - \operatorname{erf}(\varkappa_3(\varkappa_2 a - \varkappa_4)))\big), \qquad (2.14)$$

где erf — функция ошибок, а коэффициенты $\varkappa_i$ находились методом наименьших квадратов. На рис.2.6 приведена дискретизация и аппроксимация одной из экспериментальных зависимостей, а на рис.2.7 и рис.2.8 изображены результаты реконструкции профилей собственных деформаций и остаточных напряжений по гладкой и дискретной записям формул (2.11), (2.12). На рис.2.9 приведены результаты численного расчета остаточных напряжений, в качестве источников которых задавалась сглаженная версия реконструированного профиля собственных деформаций. Сопоставление этих результатов с реконструированным профилем остаточных напряжений подтверждает внутреннюю непротиворечивость формул (2.11), (2.12).

2.1.4 Метод рентгеновской дифракции

Рассмотрим другую методику измерения остаточных напряжений. На сегодняшний день популяреным методом измерения остаточных напряжений является метод рентгеновской дифракции. При этом на основе изменения

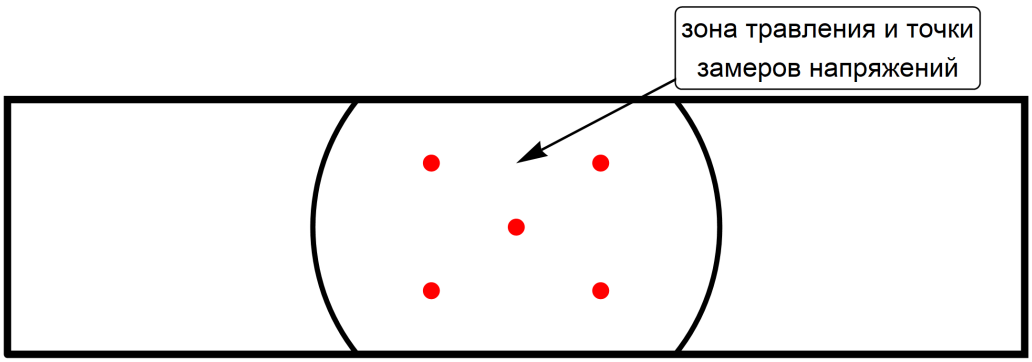


Рисунок 2.10 — Травление полоски и измерение напряжений рентгеноскопическим методом в 5ти точках, вид сверху.

среднего межатомного расстояния находятся напряжения либо упругие деформации на поверхности детали. Если необходимо получить распределение остаточных напряжений по глубине, то последовательно стравливают тонкие слои материала и измеряют напряжения на образовавшейся после стравливания поверхности (рис.2.10). Однако напряжения, измеряемые на поверхности после стравливания некоторого слоя материала, не совпадают с напряжениями, присутствовавшими в теле до стравливания слоя материала. Установим связь между этими двумя распределениями.

Пусть нам известны зависимости $\hat{\sigma}_{11}(a)$ и $\hat{\sigma}_{22}(a)$ — напряжений, измеренных на поверхности после стравливания слоя толщиной a. Нам необходимо найти зависимости $\sigma_{11}(h-a)$ и $\sigma_{22}(h-a)$ — напряжений, присутствовавших в пластине на глубине a до стравливания. Из (2.12) можно получить выражения для $\hat{\sigma}_{11}(a)$ и $\hat{\sigma}_{22}(a)$, учитывая только первое слагаемое в выражениях для S_1 и S_2, так как измеряется напряжение на поверхности пластины:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11}(a) &= \frac{4}{3}\frac{1}{L^2}\frac{E}{1-\nu^2}(h-a)^2\left(w_1'(a)+\nu w_2'(a)\right),\\ \hat{\sigma}_{22}(a) &= \frac{4}{3}\frac{1}{L^2}\frac{E}{1-\nu^2}(h-a)^2\left(w_2'(a)+\nu w_1'(a)\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Выразив из (2.15) $w_1'(a)$ и $w_2'(a)$, и подставив их в (2.12), получим выражения

$$\sigma_{11}(h-a) = \hat{\sigma}_{11}(a) - 4(h-a)\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{11}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a\int\limits_0^s \frac{\hat{\sigma}_{11}(t)}{(h-t)^2}dtds,$$

$$\sigma_{22}(h-a) = \hat{\sigma}_{22}(a) - 4(h-a)\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{22}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a\int\limits_0^s \frac{\hat{\sigma}_{22}(t)}{(h-t)^2}dtds,$$

которые можно привести к виду

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(h-a) &= \hat{\sigma}_{11}(a) - 6(h-a)\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{11}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{11}(s)}{(h-s)}ds,\\ \sigma_{22}(h-a) &= \hat{\sigma}_{22}(a) - 6(h-a)\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{22}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}_{22}(s)}{(h-s)}ds.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Формулы (2.16) позволяют восстановить распределение остаточных напряжений $\sigma_{11}(h-a)$ и $\sigma_{22}(h-a)$ по глубине пластины зная зависимости напряжений $\hat{\sigma}_{11}(a)$ и $\hat{\sigma}_{22}(a)$, измеренных на поверхности, от толщины a удаленного слоя материала. Стоит отметить, что компоненты напряжений восстанавливаются независимо друг от друга.

Если вместо напряжений $\hat{\sigma}_{11}(a)$, $\hat{\sigma}_{22}(a)$ на поверхности измеряются упругие деформации $\varepsilon^e_{11}(a)$, $\varepsilon^e_{22}(a)$, формулу (2.16) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(h-a) &= \frac{E}{1-\nu^2}(E_1(a)+\nu E_2(a)),\\
\sigma_{22}(h-a) &= \frac{E}{1-\nu^2}(E_2(a)+\nu E_1(a)),\\
E_1(a) &= \varepsilon^e_{11}(a) - 6(h-a)\int\limits_0^a \frac{\varepsilon^e_{11}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a \frac{\varepsilon^e_{11}(s)}{(h-s)}ds,\\
E_2(a) &= \varepsilon^e_{22}(a) - 6(h-a)\int\limits_0^a \frac{\varepsilon^e_{22}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a \frac{\varepsilon^e_{22}(s)}{(h-s)}ds,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Формулы (2.16) и (2.17) выведены для пластины или полоски достаточной ширины. Конечноэлементное моделирование показало, что напряжения посередине полоски (сечение $x_2 = 0$ на рис.2.11) неотличимы от напряжений, возникающих в пластине (при идентичных распределениях собственных деформаций по глубине), когда ширина полоски превышает её толщину в шесть раз и более.

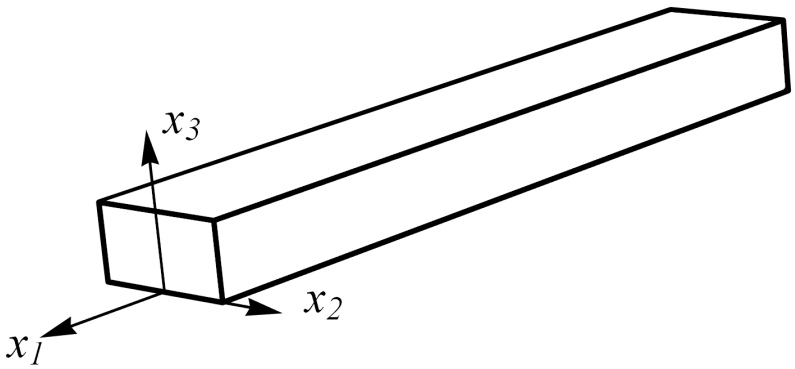


Рисунок 2.11 — Схематическое изображение образца–полоски.

При экспериментальном получении зависимостей $\hat{\sigma}_{11}(a)$, $\hat{\sigma}_{22}(a)$ или $\varepsilon^e_{11}(a)$, $\varepsilon^e_{22}(a)$ не обязательно удалять слои материала по всей поверхности полоски,

достаточно удалить достаточно длинную (по сравнению с толщиной пластины) полосу материала, проходящую через всю ширину рис.2.10

В изотропном случае (2.16) совпадает с известной формулой [120], полученной из других соображений:

$$\sigma(h-a) = \hat{\sigma}(a) - 6(h-a)\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}(s)}{(h-s)^2}ds + 2\int\limits_0^a \frac{\hat{\sigma}(s)}{h-s}ds$$

2.1.5 Определение собственных деформаций по полю напряжений

В предыдущем разделе было показано, как определить поле остаточных напряжений рентгеноскопическим методом. Однако, может быть интересно и распределение собственных деформаций, например, для использования в конечноэлементном моделировании детали сложной формы. Поэтому, рассмотрим следующую задачу.

Пусть нам известно распределения остаточных напряжений по глубине в пластине или полоске: $\sigma_{11}(x_3)$ и $\sigma_{22}(x_3)$, $x_3 \in [\hat{h},h]$. При этом полагается, что максимальная глубина $h - \hat{h}$ больше толщины слоя собственных деформаций, то есть

$$f(x_3) = 0, \quad g(x_3) = 0 \ \text{ при } \ x_3 < \hat{h}. \tag{2.18}$$

Нам необходимо найти распределения собственных деформаций $f(x_3)$ и $g(x_3)$. Перегруппируем выражения (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_3) &= -\frac{1}{E}\bar{\sigma}_1(x_3) + c_1x_3 + c_2, \\ g(x_3) &= -\frac{1}{E}\bar{\sigma}_2(x_3) + c_3x_3 + c_4, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $\bar{\sigma}_1(x_3) = \sigma_{11}(x_3) - \nu\sigma_{22}(x_3)$, $\bar{\sigma}_2(x_3) = \sigma_{22}(x_3) - \nu\sigma_{11}(x_3)$. Осталось определить константы c_1–c_4.

Проинтегрируем (2.19) и произведение x_3 на (2.19) по x_3:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\hat{h}}^{h} f(x_3)dx_3 &= \frac{1}{E}\int\limits_{\hat{h}}^{h} \bar{\sigma}_1(x_3)dx_3 + \tfrac{1}{2}\left(h^2-\hat{h}^2\right)c_1 + \left(h-\hat{h}\right)c_2,\\
\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3 f(x_3)dx_3 &= \frac{1}{E}\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3\bar{\sigma}_1(x_3)dx_3 + \tfrac{1}{3}\left(h^3-\hat{h}^3\right)c_1 + \tfrac{1}{2}\left(h^2-\hat{h}^2\right)c_2.\\
\int\limits_{\hat{h}}^{h} g(x_3)dx_3 &= \frac{1}{E}\int\limits_{\hat{h}}^{h} \bar{\sigma}_2(x_3)dx_3 + \tfrac{1}{2}\left(h^2-\hat{h}^2\right)c_3 + \left(h-\hat{h}\right)c_4,\\
\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3 g(x_3)dx_3 &= \frac{1}{E}\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3\bar{\sigma}_2(x_3)dx_3 + \tfrac{1}{3}\left(h^3-\hat{h}^3\right)c_3 + \tfrac{1}{2}\left(h^2-\hat{h}^2\right)c_4.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Выражения для констант (2.6) удобно переписать так:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{6}{h}\hat{c}_1 + \frac{12}{h}\hat{c}_2, & c_2 &= 4\hat{c}_1 - 6\hat{c}_2,\\
c_3 &= -\frac{6}{h}\hat{c}_3 + \frac{12}{h}\hat{c}_4, & c_4 &= 4\hat{c}_3 - 6\hat{c}_4,\\
\hat{c}_1 &= \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x_3)dx_3, & \hat{c}_2 &= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h x_3 f(x_3)dx_3,\\
\hat{c}_3 &= \frac{1}{h}\int\limits_0^h g(x_3)dx_3, & \hat{c}_4 &= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h x_3 g(x_3)dx_3.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Тогда, учитывая

$$\int\limits_{\hat{h}}^{h} f(x_3)dx_3 = \int\limits_{0}^{h} f(x_3)dx_3 = h\hat{c}_1,$$
$$\int\limits_{\hat{h}}^{h} g(x_3)dx_3 = \int\limits_{0}^{h} g(x_3)dx_3 = h\hat{c}_3,$$
$$\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3 f(x_3)dx_3 = \int\limits_{0}^{h} x_3 f(x_3)dx_3 = h^2\hat{c}_2,$$
$$\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3 g(x_3)dx_3 = \int\limits_{0}^{h} x_3 g(x_3)dx_3 = h^2\hat{c}_4$$

(что является следствием (2.18)), выразим из (2.21), (2.20) $\hat{c}_1$–$\hat{c}_4$:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \frac{3h-4\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_1(x_3)}{E}dx_3 - \frac{6\left(h-\hat{h}\right)}{\hat{h}^3}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{x_3\bar{\sigma}_1(x_3)}{E}dx_3,\\
\hat{c}_2 &= \frac{2\left(h-\hat{h}\right)}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_1(x_3)}{E}dx_3 - \frac{4h-3\hat{h}}{\hat{h}^3}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{x_3\bar{\sigma}_1(x_3)}{E}dx_3,\\
\hat{c}_3 &= \frac{3h-4\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_2(x_3)}{E}dx_3 - \frac{6\left(h-\hat{h}\right)}{\hat{h}^3}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{x_3\bar{\sigma}_2(x_3)}{E}dx_3,\\
\hat{c}_4 &= \frac{2\left(h-\hat{h}\right)}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_2(x_3)}{E}dx_3 - \frac{4h-3\hat{h}}{\hat{h}^3}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{x_3\bar{\sigma}_2(x_3)}{E}dx_3.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Вместо (2.22), можно получить альтернативные выражения для $\hat{c}_1$–$\hat{c}_4$. Для этого, вместо второго и четвёртого уравнений (2.20), можно использовать уравнения

$$c_1\hat{h} + c_2 = \bar{\sigma}_1(\hat{h})/E, \quad c_3\hat{h} + c_4 = \bar{\sigma}_2(\hat{h})/E,$$

которые являются следствием (2.18) и (2.19). В итоге, имеем

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \frac{h-\hat{h}}{\hat{h}}\frac{\bar{\sigma}_1(\hat{h})}{E} - \frac{h-2\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_1(x_3)}{E}dx_3,\\
\hat{c}_2 &= \frac{4h-3\hat{h}}{\hat{h}}\frac{\bar{\sigma}_1(\hat{h})}{6E} - \frac{-2h+3\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_1(x_3)}{3E}dx_3,\\
\hat{c}_3 &= \frac{h-\hat{h}}{\hat{h}}\frac{\bar{\sigma}_2(\hat{h})}{E} - \frac{h-2\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_2(x_3)}{E}dx_3,\\
\hat{c}_4 &= \frac{4h-3\hat{h}}{\hat{h}}\frac{\bar{\sigma}_2(\hat{h})}{6E} - \frac{-2h+3\hat{h}}{\hat{h}^2}\int\limits_{\hat{h}}^{h}\frac{\bar{\sigma}_2(x_3)}{3E}dx_3.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Таким образом, последовательное применение формул (2.22) (или (2.23)), (2.21), (2.19) позволяет реконструировать распределение собственных деформаций $f(x_3)$, $g(x_3)$ по известным распределениям напряжений $\sigma_{11}(x_3)$ и $\sigma_{22}(x_3)$, $x_3 \in [\hat{h},h]$. На практике использовать (2.22) удобнее, чем (2.23), так как значения интегральных выражений $\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3\bar{\sigma}_1(x_3)dx_3$, $\int\limits_{\hat{h}}^{h} x_3\bar{\sigma}_2(x_3)dx_3$, как правило, известны с более высокой точностью, чем значения $\bar{\sigma}_1(\hat{h})$, $\bar{\sigma}_2(\hat{h})$.

2.1.6 Пример применения метода рентгеновской дифракции

Те же образцы–полоски, вырезанные из обработанной дробью пластинки, описанные в разделе 2.1.3, исследовались с помощью рентгеноскопического метода. С обработанной стороны полоски последовательно стравливались слои материала и измерялось напряжение на поверхности с помощью рентгеновского дифрактометра XStress 3000. Измерения напряжений проводились в пяти точках области травления и результат осреднялся. Зависимость измеренных напряжений от толщины стравленного слоя приведена на рис.2.12, где доверительные интервалы соответствуют вероятности 0.95 нормального распределения. Распределение остаточных напряжений (которые были в материале до травления) реконструированы по формуле (2.16) и приведены на рис.2.12,

при этом, вследствие изотропности обработки, предполагалось $\hat{\sigma}_{11}(a) = \hat{\sigma}_{22}(a)$ и $\sigma_{11}(x_3) = \sigma_{22}(x_3)$. Используя это распределение, искомое поле собственных деформаций найдено по формулам (2.22),(2.21),(2.19) и приведено на рис.2.13.

2.2 Задача о двусторонне обработанной пластинке

2.2.1 Решение задачи

Некоторые детали, такие как лопатки авиадвигателя, подвергают поверхностной обработке с двух сторон. Поэтому рассмотрим задачу о реконструкции полей собственных деформаций и остаточных напряжений в двусторонне обработанной пластине методом полосок. Эта пластина может быть образцом-свидетелем либо образцом, вырезанным из обработанной детали.

Для простоты рассмотрим случай изотропной обработки, тогда поле собственных деформаций имеет вид

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} \overset{2}{f}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \overset{2}{f}(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -2\overset{2}{f}(x_3) \end{pmatrix}.$$

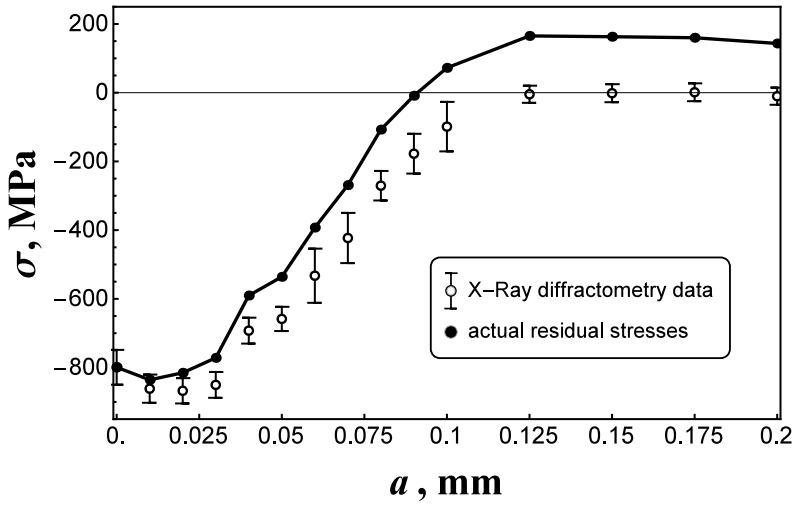


Рисунок 2.12 — Зависимость напряжения на поверхности от толщины стравленного слоя и реконструированное распределение остаточных напряжений по толщине.

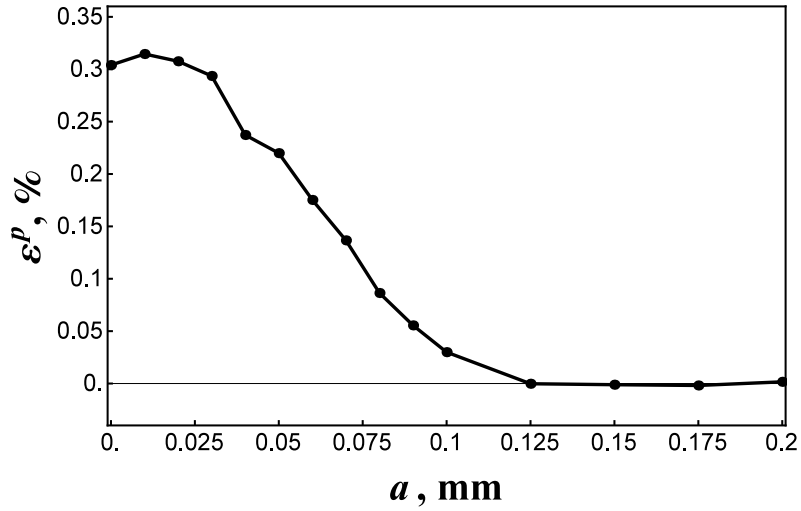


Рисунок 2.13 — Распределение собственных деформаций по толщине пластины, реконструированное по данным рис.2.12.

Представим симметричное распределение собственных деформаций по толщине пластины в виде

$$\overset{2}{f}(x_3) = f(x_3) + \overset{-1}{f}(x_3),$$

где $f(x_3)$ есть верхняя половина распределения, $f(x_3) \equiv 0$, $x_3 \leqslant z_0$, $\overset{-1}{f}(x_3) = f(h - x_3)$ — нижняя половина распределения, рис.2.14.

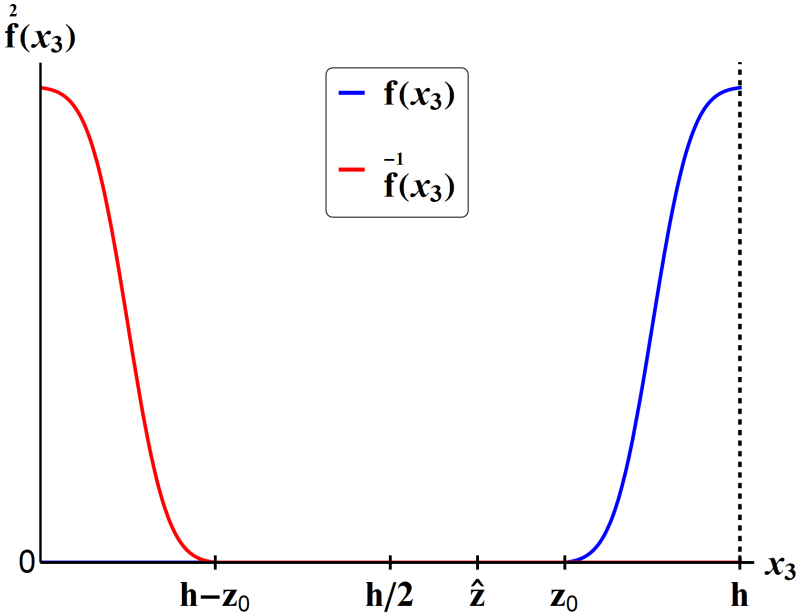


Рисунок 2.14 — Распределение собственных деформаций по толщине двусторонне обработанной пластины.

Пусть с верхней стороны пластины стравлен слой толщины $a = h - z$. Вследствие линейности задачи прогиб будет равен:

$$\hat{w}(z) = \overset{1}{\hat{w}}(z) + \overset{-1}{\hat{w}}(z), \tag{2.24}$$

где $\overset{1}{\hat{w}}(z)$ есть прогиб, вызванный полем $f(x_3)$, а $\overset{-1}{\hat{w}}(z)$ — полем $\overset{-1}{f}(x_3)$. Прогиб $\overset{1}{\hat{w}}(z)$ определяется по формуле (2.10). Легко проверить, что при перенесении слоя собственных деформаций на противоположную сторону, прогиб остаётся тем же по величине и меняет знак, поэтому $\overset{-1}{\hat{w}}(z)$, с учётом изменения толщины, запишется как

$$\overset{-1}{\hat{w}}(z) = -\frac{3}{4}L^2 \left(\frac{2}{z^3} \int\limits_{z_0}^{h} (x_3 - (h - z))\, f(x_3) dx_3 - \frac{1}{z^2} \int\limits_{z_0}^{h} f(x_3) dx_3 \right).$$

В итоге имеем выражение для прогиба

$$\begin{gathered} \hat{w}(z) = \frac{3}{4}L^2 \left(\frac{2}{z^3} \int\limits_{z_0}^{z} x_3 f(x_3) dx_3 - \frac{1}{z^2} \int\limits_{z_0}^{z} f(x_3) dx_3 \right) - \\ \frac{3}{4}L^2 \left(\frac{2}{z^3} \int\limits_{z_0}^{h} (x_3 - (h - z))\, f(x_3) dx_3 - \frac{1}{z^2} \int\limits_{z_0}^{h} f(x_3) dx_3 \right). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Так же, как и ранее, домножим это выражение на z^3 и дважды продифференцируем по z:

$$f'(z) = \frac{4}{3} L^{-2} z^{-1} \left(3z^2 \hat{w}(z) + z^3 \hat{w}'(z) \right)'. \tag{2.26}$$

Будем считать, что травление проведено до величины $x_3 = \hat{z} > z_0$ на глубину, большую толщины слоя собственных деформаций (рис.2.14). Чтобы получить распределение собственных деформаций $f(z)$, необходимо проинтегрировать (2.26) по z начиная с $\hat{z}$:

$$f(z) = \frac{4}{3} L^{-2} \left(z^2 \hat{w}'(z) + 4z\hat{w}(z) + 2 \int\limits_{\hat{z}}^{z} \hat{w}(s) ds \right) - \frac{4}{3} L^{-2} \left(\hat{z}^2 \hat{w}'(\hat{z}) + 4\hat{z}\hat{w}(\hat{z}) \right). \tag{2.27}$$

В области $z \in [\hat{z},z_0]$ отсутствуют собственные деформации, а значит, по формуле (2.25), в этой области

$$\hat{w}(z) = \overset{-1}{\hat{w}}(z) = \frac{3}{4}L^2\left(\frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^2}\right),$$
$$c_1 = 2\int_{z_0}^{h}(h - x_3)f(x_3)dx_3, \quad c_2 = -\int_{z_0}^{h} f(x_3)dx_3. \tag{2.28}$$

Момент травления, начиная с которого функция прогиба становится близкой к кривой вида (2.28), может служить критерием того, что стравлен весь слой собственных деформаций.

Таким образом, используя формулу (2.27) и критерий (2.28), можно восстановить распределение собственных деформаций по зависимости прогиба полоски от толщины стравленного слоя в случае двусторонней обработки. Проанализируем эту формулу. В силу симметрии в начале травления прогиб равен нулю. Значит, второе и третье слагаемые в первой скобке (2.27) близки к нулю при малых величинах глубины травления $a = h - z$, и значения собственных деформаций почти полностью определяются первым слагаемым, которое пропорционально производной функции прогиба. Именно в этой области значение собственных деформаций и остаточных напряжений наиболее интересно, однако производная экспериментально определённой функции прогиба имеет низкую точность. Поэтому при аппроксимации экспериментального массива прогибов непрерывной зависимостью необходимо соблюдать баланс между точностью и гладкостью аппроксимации.

Задачу можно свести к уже рассмотренной — случаю односторонней обработки. Для этого перепишем (2.24) в виде

$$\overset{1}{\hat{w}}(z) = \hat{w}(z) - \overset{-1}{\hat{w}}(z), \tag{2.29}$$

где $\overset{1}{\hat{w}}(z)$ есть функция прогибов соответствующая односторонней обработке, $\hat{w}(z)$ — экспериментальная зависимость прогибов, $\overset{-1}{\hat{w}}(z)$ имеет вид (2.28), рис.2.15. Чтобы получить $\overset{1}{\hat{w}}(z)$, необходимо иметь значения констант из (2.28). Для этого достаточно знать значения $\overset{-1}{\hat{w}}(z)$ в двух точках: $z = \hat{z}$ и $z = h$, одно значение $\overset{-1}{\hat{w}}(\hat{z}) = \hat{w}(\hat{z})$ нам известно, а второе можно с хорошей точностью оценить по формуле

$$\overset{-1}{\hat{w}}(h) \approx \frac{\hat{z}^2}{h^2}\overset{-1}{\hat{w}}(\hat{z}), \tag{2.30}$$

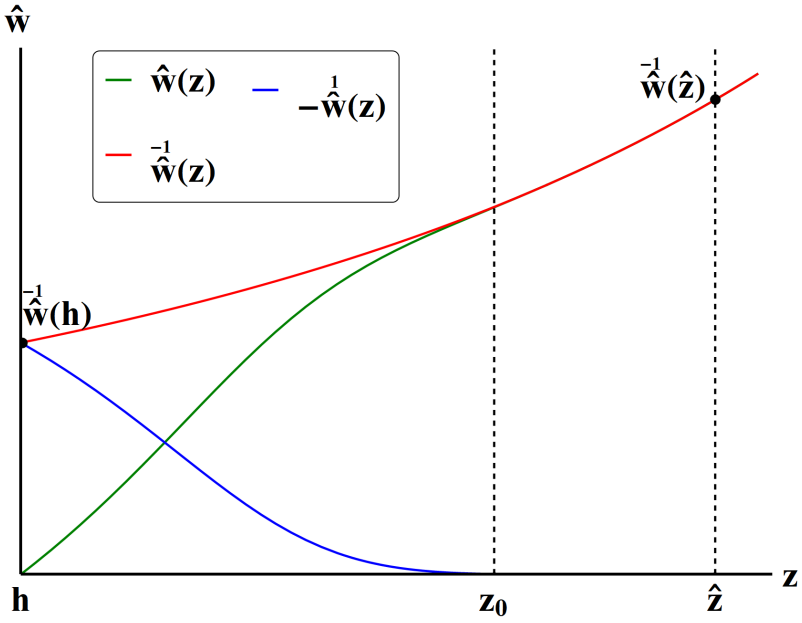


Рисунок 2.15 — Сведение к случаю односторонней обработки посредством разложения функции прогибов.

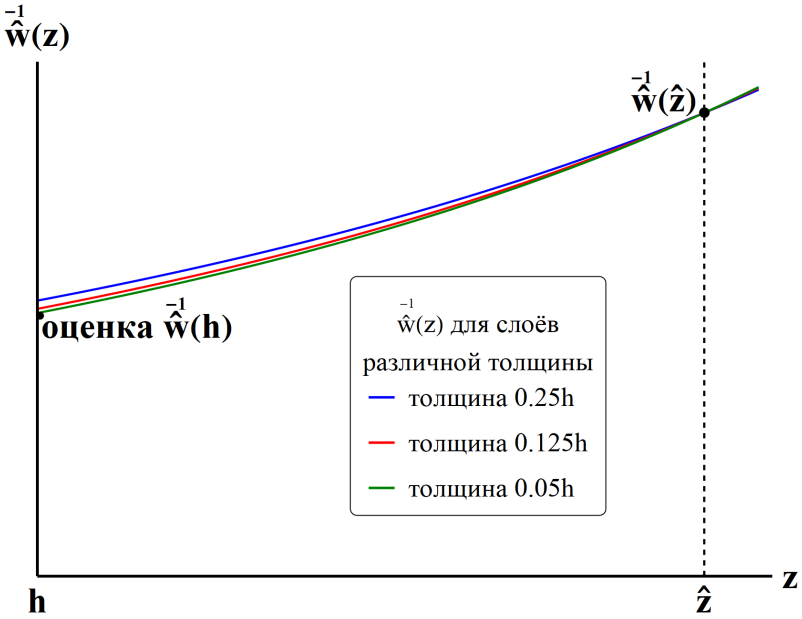


Рисунок 2.16 — Сравнение оценочной формулы (2.30) с действительными значениями для слоёв собственных деформаций различной толщины.

которая получена из предположения, что толщина слоя собственных деформаций мала по сравнению с толщиной пластинки, рис.2.16. Таким образом, получив зависимость $\overset{1}{\hat{w}}(z)$ по формулам (2.29) и (2.30), можно затем восстановить распределение собственных деформаций по формуле для односторонней

обработки (2.11):

$$f(z) = \frac{4}{3L^2}\left(z^2 \overset{1}{\hat{w}}'(z) + 4z\overset{1}{\hat{w}}(z) + 2\int_{\hat{z}}^{z} \overset{1}{\hat{w}}(s)ds \right), \qquad (2.31)$$

По результатам, описанным в этом разделе, получен патент на изобретение [12].

2.2.2 Пример реконструкции

В качестве примера получим распределение собственных деформаций и остаточных напряжений в образце-полоске из титанового сплава ВТ6, подвергнутой двусторонней лазерной обработке.

Экспериментальная зависимость прогиба $w(a)$ от толщины стравленного слоя a приведена на рис.2.17 (синяя линия). Здесь обозначения прогиба с крышками и без крышек связаны как $w(a) = \hat{w}(z)$, $a = h - z$. Далее, используя (2.30),

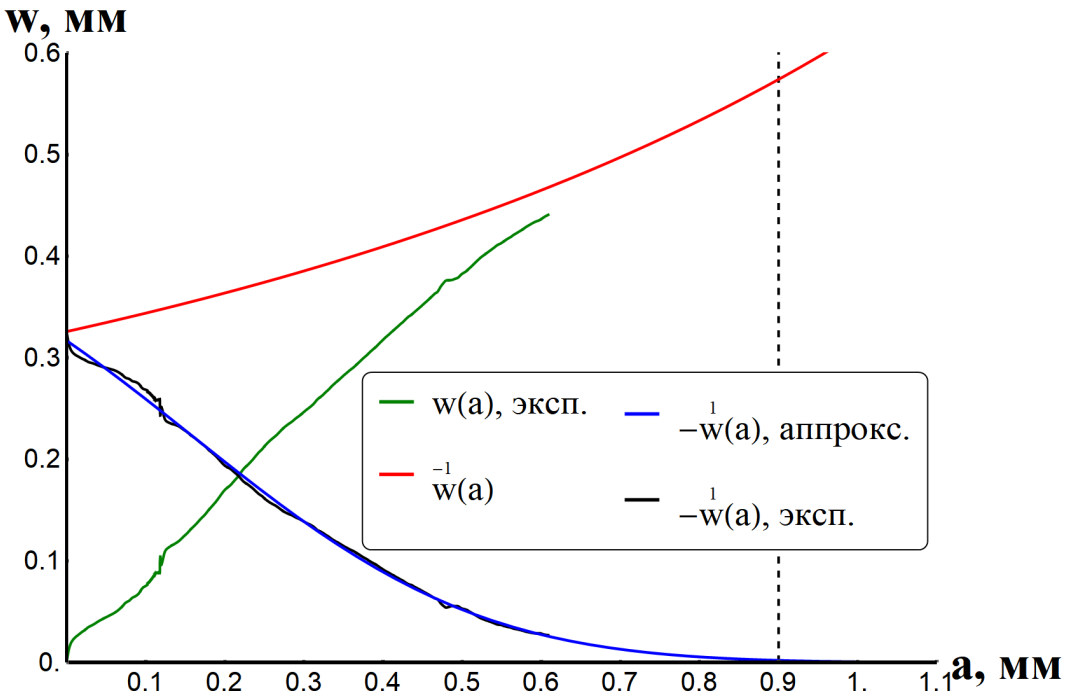


Рисунок 2.17 — Разложение экспериментальной зависимости прогиба от толщины стравленного слоя, сведение к случаю односторонней обработки и аппроксимация гладкой функцией.

строится $\overset{-1}{w}(a)$ (2.29) (красная линия). По формуле (2.29) получается прогиб, соответствующий односторонней обработке $\overset{1}{w}(a)$ (чёрная линия), эта зависимость аппроксимируется гладкой функцией (зелёная линия):

$$\overset{1}{w}(a) = c - k\,\mathrm{erf}\left(\frac{a}{d} + b\right), \tag{2.32}$$

где константы $c = 0.228$ мм, $k = 0.223$ мм, $d = 0.405$ мм, $b = -0.394$. Травление было проведено до глубины 0.61мм, на этой глубине чёрная линия экспериментальной зависимости не выходит на постоянное значение. Это свидетельствует о том что слой собственных деформаций не был дотравлен до конца. В соответствии с выбранной аппроксимацией, слой собственных деформаций исчезает на глубине примерно 0.9 мм.

На основе зависимости (2.32) по формуле (2.11) реконструируется распределение собственных деформаций рис.2.18, затем, по формулам (2.5) и (2.6) — распределение остаточных напряжений рис.2.19. При этом, исходя из симметрии задачи $f(x_3) = g(x_3) = \varepsilon^*(h - x_3)$, $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = c_4$.

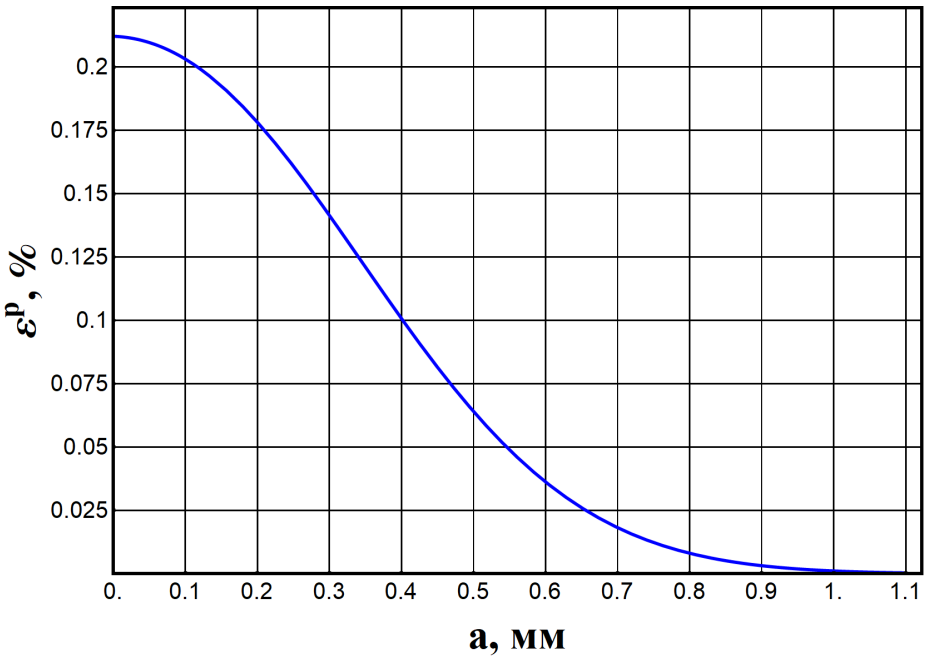


Рисунок 2.18 — Распределение тангенциальных собственных деформаций по глубине.

2.3 Об учёте кривизны полоски при применении метода полосок

2.3.1 Продольная кривизна

Рассмотрим полоску длины L и толщины h, вырезанную из трубы кривизной $\kappa = 1/R$ (R – внутренний радиус) по угловой координате, рис.2.20. Поставим вопрос: как должны соотноситься эти геометрические характеристики, чтобы кривизной можно было пренебречь и исследовать эту полоску экспериментальной техникой метода полосок?

Прогиб полоски при травлении тесно связан с моментом усилий, возникших в результате высвобождения остаточных напряжений при удалении материала. Поэтому, необходимо, чтобы искривлённая полоска реагировала на изгибающий момент примерно так же, как и прямая.

Сначала исследуем эффект толщины полоски (по сравнению с радиусом её кривизны), для этого воспользуемся точными формулами, полученными в приложении Г. Приложение момента к искривлённой полоске изменит её радиус кривизны. Это изменение задаётся точно выражением (Г.21) и приблизитель-

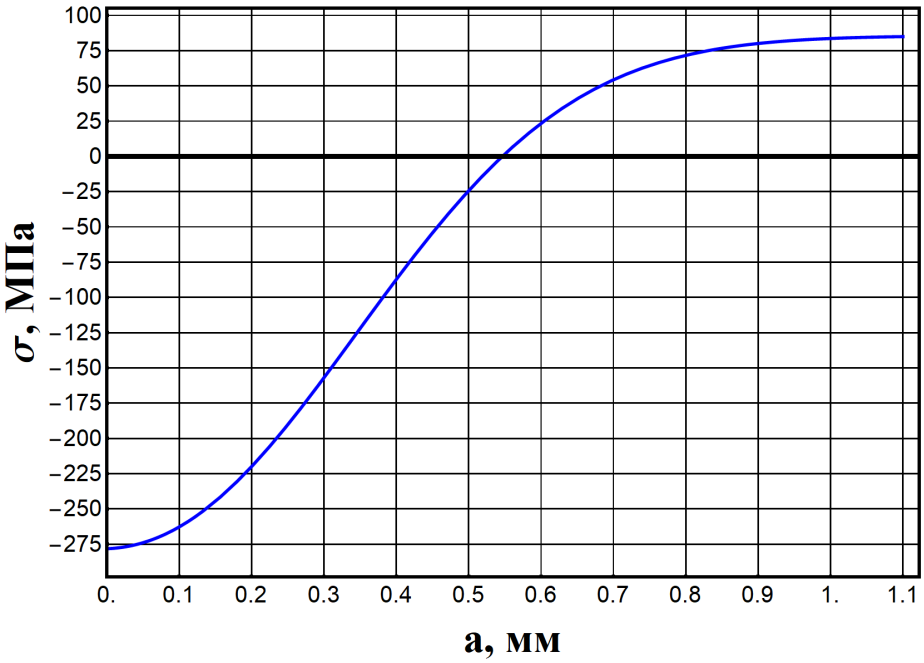


Рисунок 2.19 — Распределение тангенциальных остаточных напряжений по глубине.

но выражением (Г.22) (получено из формулы изгиба стержня малой кривизны [111]). Пока эти выражения отличаются слабо, можно пренебречь эффектом толщины искривлённой полоски. Отношение $\Delta R/\Delta R_{\text{тонк}}$ этих выражений в зависимости от параметра h/R приведено на рис.2.21. Даже когда толщина равна внутреннему радиусу, выражения отличаются всего на 4%, поэтому такое условие не должно сильно нас ограничивать. Тем не менее настолько толстую полоску нельзя использовать по другой причине: из-за влияния краевых эффектов вблизи торцов полоски (не важно, прямой или искривлённой), для исключения которых рекомендуется соблюдать $L > 5h$.

Теперь исследуем эффект влияния кривизны полоски на измеряемую стрелу прогиба. При приложении малого момента к искривлённой полоске её кривизна пропорционально изменится на малую величину[20] $\Delta\varkappa$, а вместе с ней изменится стрела прогиба — на величину Δw. Нас интересует связь между Δw и $\Delta\varkappa$, а именно зависимость этой связи от кривизны и длины полоски. Чтобы получить выражение для связи, рассмотрим полоску длины L и кривизны $\varkappa$ (рис.2.20). Выше было показано, что эффектом толщины полоски можно пренебречь, поэтому далее будем считать полоску тонкой. Такая полоска будет

[20]Эта ситуация соответствует удалению бесконечно тонкого слоя материала с полоски при реализации метода Давиденкова.

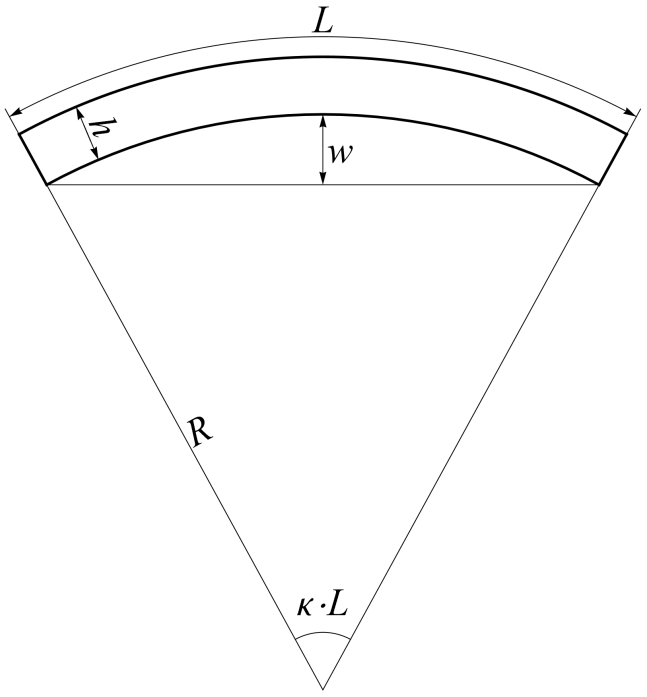


Рисунок 2.20 — Полоска, вырезанная из трубы в угловом направлении, вид сбоку.

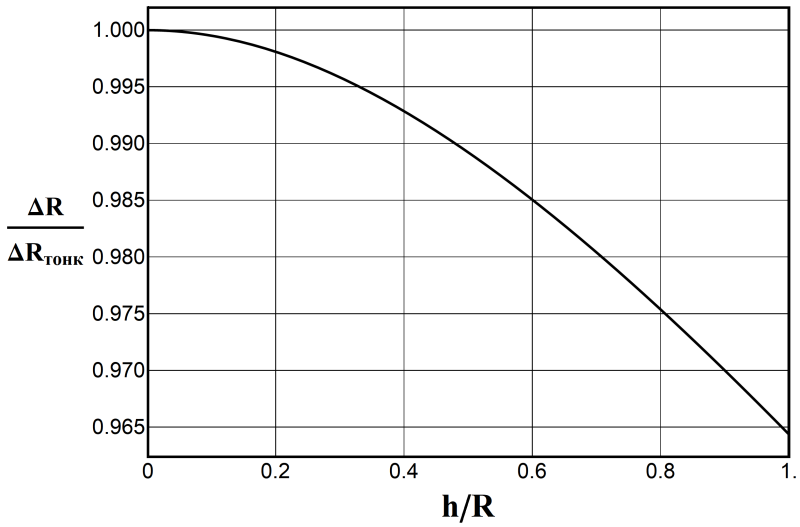


Рисунок 2.21 — Отношение правой части (Г.21) к правой части (Г.22) в зависимости от толщины.

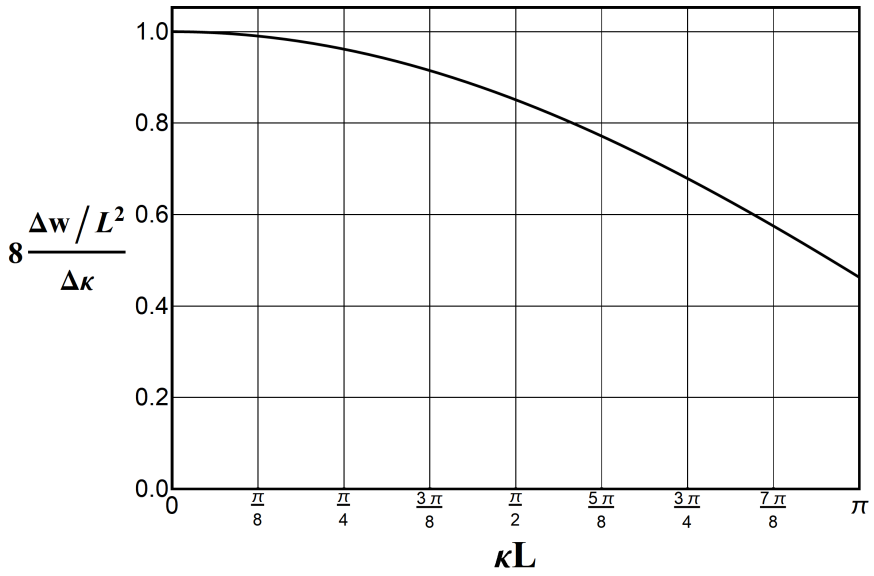


Рисунок 2.22 — Зависимость коэффициента чувствительности $\frac{(\Delta w)/L^2}{\Delta\kappa} \cdot 8$ от углового размера полоски.

иметь прогиб

$$w = \frac{1}{\kappa}\left(1 - \cos\left(\frac{\kappa L}{2}\right)\right). \tag{2.33}$$

Искомая связь между Δw и $\Delta\kappa$ задаётся производной от выражения (2.33) по κ:

$$\Delta w = \frac{1}{\kappa^2}\left(\cos\left(\frac{\kappa L}{2}\right) + \frac{\kappa L}{2}\sin\left(\frac{\kappa L}{2}\right) - 1\right)\Delta\kappa. \tag{2.34}$$

В случае прямой полоски ($\kappa = 0$) выражение (2.34) принимает вид $\Delta w = \frac{L^2}{8}\Delta\kappa$. С учётом масштабного фактора L^2 коэффициент пропорциональности между

изменением кривизны и изменением прогиба прямой пластинки равен 1/8. Для пластинки, уже имеющей кривизну $\varkappa$, этот коэффициент будет отличаться. Величину этого отличия отражает зависимость (2.34): если поделить[21] обе части выражения на L^2, то множитель перед $\Delta\varkappa$ в левой части будет функцией $\varkappa L$ — углового размера искривлённой полоски, этот угловой размер можно считать безразмерной мерой искривлённости полоски. Функция, иллюстрирующая отклонение исследуемого коэффициента пропорциональности для искривлённой полоски от 1/8 (т.е выражения $\frac{(\Delta w)/L^2}{\Delta\varkappa}\cdot 8$ как функции углового размера полоски $\varkappa L$), изображена на рис.2.22. Если функция близка к единице, то полоску можно считать прямой при анализе её прогиба в рамках метода Давиденкова. При угловом размере полоски $\varkappa L = 0.4$рад, $\frac{(\Delta w)/L^2}{\Delta\varkappa}\cdot 8 = 0.99$, а при $\varkappa L = 0.9$рад, $\frac{(\Delta w)/L^2}{\Delta\varkappa}\cdot 8 = 0.95$.

Таким образом, в контексте метода полосок (раздел 2.1.2) условия на продольную кривизну не обременительны, в широких пределах толщины и углового размера (т.е. $\varkappa L$) полоски продольной кривизной можно пренебречь.

2.3.2 Поперечная кривизна

Выше была рассмотрена полоска с продольной кривизной, теперь исследуем полоску имеющую поперечную кривизну. Типичным примером является полоска вырезанная вдоль образующей из трубы, поперечное сечение такой полоски имеет форму сектора кольца (рис.2.23).

[21] Учёт масштабного фактора.

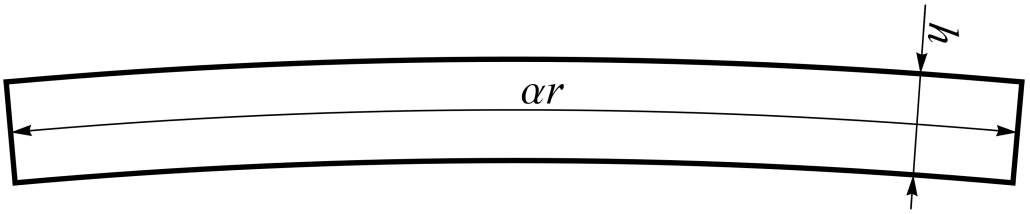


Рисунок 2.23 — Пример поперечного сечения полоски, вырезанной из трубы вдоль образующей. Для этого сечения $h/(\alpha r) = 0.1$, $\alpha = 0.178$ рад и $I_{xx}/I^0_{xx} = 1.05$, выражение (2.36).

Изменение стрелы прогиба при удалении материала с поверхности полоски в ходе реализации метода полосок зависит от жёсткости полоски на изгиб, которая пропорциональна осевому моменту инерции сечения $I_{xx} = \int_S (y - y_0)^2 dS$ (где y_0 есть координата центра масс сечения). Таким образом, поперечной кривизной полоски можно пренебречь если осевой момент инерции сечения I_{xx} слабо отличается от второго момента I^0_{xx} прямоугольного сечения той же площади. Сектор кольца толщиной h, среднего радиуса $r = (r_1 + r_2)/2$ и углового размера α имеет ту же площадь что и прямоугольник со сторонами αr и h. Выражения для осевых моментов имеют вид

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{1}{8} hr(h^2 + 4r^2)(\alpha + \sin\alpha) - \frac{h(h^2 + 12r^2)^2}{72r\alpha}(1 - \cos\alpha), \\ I^0_{xx} &= \tfrac{1}{12} h^3 \alpha r. \end{aligned} \tag{2.35}$$

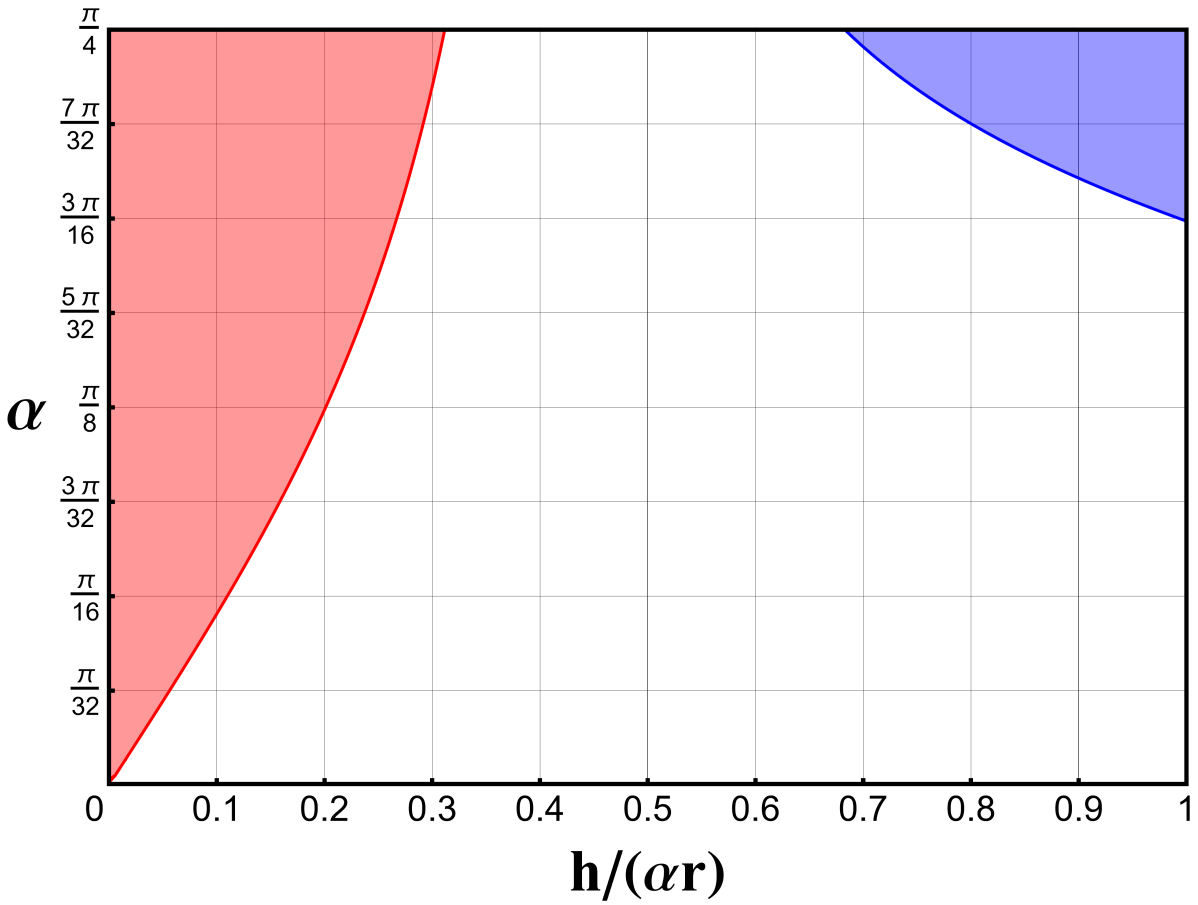


Рисунок 2.24 — Диаграмма параметров поперечно искривлённой полоски ($h/(\alpha r)$ — отношение толщины к длине среднего сечения и α — угловой размер), показывающая когда поперечной кривизной можно пренебречь. Белая область $0.95 < I_{xx}/I^0_{xx} < 1.05$ (отклонение менее 5%), красная область $I_{xx}/I^0_{xx} \geqslant 1.05$, синяя область $I_{xx}/I^0_{xx} \leqslant 0.95$.

Их отношение не зависит от масштабного фактора, поэтому вместо параметров h, α, r его удобно записать через два безразмерных параметра $\eta = h/(\alpha r)$ (отношение толщины к длине среднего сечения) и α (угловой размер):

$$\frac{I_{xx}}{I^0_{xx}} = \frac{9\alpha(4+\eta^2\alpha^2)(\alpha+\sin\alpha) - (12+\eta^2\alpha^2)(1-\cos\alpha)}{6\eta^2\alpha^4}. \qquad (2.36)$$

На рис.2.24 изображена область на плоскости безразмерных параметров сектора кольца в которой второй момент сечения отличается от второго момента прямоугольного сечения менее чем на 5%.

При реализации метода полосок (раздел 2.1.2), условия на поперечную кривизну полоски (особенно тонкой) намного более обременительны, чем на продольную кривизну. В качестве примера, на рис.2.23 изображено сечение, для которого $I_{xx}/I^0_{xx} = 1.05$, т.е для более тонкой полоски или полоски большего углового размера, отклонение будет более 5%. Однако, можно сделать поправку на жёсткость искривлённой полоски, для этого следует домножить измеренное изменение стрелы прогиба на правую часть (2.36). Следует учитывать, что эта поправка будет меняться в зависимости от толщины слоя материала удалённого с поверхности (будет уменьшаться толщина h).

2.4 Другие задачи реконструкции профиля собственных деформаций

На основе полученных выше результатов был решён ряд задач реконструкции профиля собственных деформаций, не имеющих прямого отношения к оценке усталостной прочности. Они приведены в приложениях Б, В, Г.

В приложении Б решена задача реконструкции профиля собственных деформаций по всей толщине бруса (а не в тонком слое, как в методе полосок, сверления отверстий или рентгеновской дифракции). Такие распределения собственных деформаций могут появляться, например, при аддитивном производстве деталей. Брус нарезается на тонкие полоски, у которых измеряются прогибы, затем по списку прогибов восстанавливается профиль собственных деформаций. Метод не применим для случая больших градиентов собственных деформаций в тонком приграничном слое, т.е. когда помимо ненулевого поля собственных деформаций в толще бруса, у границы присутствует тонкий слой

собственных деформаций большой амплитуды, созданный поверхностной обработкой. Такая задача решена в приложении В.

В приложении В решена задача реконструкции профиля собственных деформаций по всей толщине бруса, если имеются разнородные данные: последовательность прогибов тонких полосок, на которые был нарезан брус (как в абзаце выше), и распределения тангенциальных компонент остаточных напряжений в приповерхностном слое с одной или двух сторон бруса (полученные методом сверления отверстий, методом полосок или методом рентгеновской дифракции).

В приложении Г рассматриваются задачи реконструкции профилей собственных деформаций и остаточных напряжений в телах цилиндрической геометрии. Точно решена задача реконструкции профилей обеих тангенциальных компонент собственных деформаций в трубе по изменению радиуса разрезанного кольца в ходе удаления внешних слоёв материала и данных испытания полоски вырезанной вдоль оси трубы (эксперимент по методу колец и полосок Давиденкова). Также, точно решена задача реконструкции профилей собственных деформаций в трубе по профилям обеих тангенциальных компонент остаточных напряжений.

2.5 Выводы по главе 2

Для внесения технологических остаточных напряжений в конечноэлементный расчёт требуется иметь профиль распределения собственных деформаций по глубине. Его можно получить, решая обратную задачу реконструкции этого профиля по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Для упрощения процедуры решения этой обратной задачи в этой главе были выведены точные формулы реконструкции распределения обеих главных тангенциальных компонент собственных деформаций в деталях плоской и цилиндрической геометрии. В качестве исходных данных рассмотрены

(а) Экспериментальная зависимость стрелы прогиба полоски от толщины стравленного слоя, получаемая методом полосок.

(b) Экспериментальная зависимость радиуса разрезанного кольца от толщины снятого слоя материала, получаемая методом Давиденкова (приложение Г).

(c) Экспериментальные зависимости главных тангенциальных компонент напряжений на поверхности полоски от толщины снятого слоя материала, получаемые методом рентгеновской дифрактометрии в комбинации с послойным снятием материала.

(d) Распределения главных тангенциальных компонент напряжений в приповерхностном слое, полученные методом сверления отверстий или другим экспериментальным методом либо из каких-то иных соображений.

(e) Распределения главных тангенциальных компонент напряжений в приповерхностном слое толстостенной трубы, полученные экспериментально либо из каких-то иных соображений (приложение Г).

(f) Последовательность прогибов тонких полосок, полученных послойным разрезанием образца–бруса (приложение Б).

(g) Разнородные данные по толщине образца–бруса: распределения главных тангенциальных компонент напряжений в приповерхностном слое (с одной или двух сторон образца) и последовательность прогибов тонких полосок, полученных послойным разрезанием оставшейся толщины образца (приложение В).

В приложении А доказана теорема, что полоска конечной ширины имеет такой же прогиб что и пластинка[22], если они содержат идентичный слой собственных деформаций $\varepsilon^*(z)$, что позволяет использовать метод Давиденкова для реконструкции профиля $\varepsilon^*(z)$ в образцах–полосках любой ширины.

Оценена величина ошибки при использовании выражений, описывающих распределение собственных деформаций в поверхностно обработанных деталях в рамках метода полосок, для участков с цилиндрической поверхностью. Толщина искривлённой полоски не оказывает значимого влияния на измерение стрелы прогиба (по сравнению с прямой полоской) вплоть до значения толщины, равного радиусу кривизны полоски (но настолько толстые образцы не используются в методе полосок из-за их огромной жёсткости). При исследовании продольно искривлённой полоски методом полосок можно не учитывать её кривизну вплоть до больших значений: для кривизны $\kappa = 0.4/L$ отклонение измеренной стрелы

[22]Поля остаточных напряжений при этом различны.

прогиба (от случая прямой полоски) равно 1%, для $\kappa = 0.9/L$ — 5%, где L есть длина полоски. Кривизна поперечно искривлённой полоски оказывает более значительное влияние на её прогиб, вследствие наличия собственных деформаций. Область допустимых параметров (отклонение прогиба менее 5% от прямой полоски) формы поперечного сечения такой полоски приведена на рис.2.24. В случае значительного отклонения можно использовать поправку (2.36).

Рекомендуется внедрение одновременной реконструкции остаточных напряжений и собственных деформаций в программное обеспечение аппаратуры разрушающего контроля с использованием выведенных явных точных формул.

Основной результат этой главы может быть сформулирован следующим образом:

– Впервые получены явные точные выражения для реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций вблизи плоской или цилиндрической поверхности по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Существующие методы используют приближённое или численное решение обратной задачи. Результат предназначен для учета поверхностных технологических остаточных напряжений в численной модели детали путём задания распределения собственных деформаций.

Результаты, полученные в этой главе, опубликованы в статьях [1–4]. На основе результатов этой главы получены патенты на изобретения [11–13].

ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

В этой главе решается поставленная во введении задача построения эволюционной модели накопления усталостной повреждённости для произвольной нерегулярной истории циклического нагружения с учетом асимметрии, многоосности и непропорциональности, частоты нагружения и выдержек, применимой в режиме постпроцессинга, т.е. после и независимо от конечноэлементного моделирования нагружения детали.

За основу модели накопления усталостной повреждённости была взята идея поверхности выносливости в пространстве напряжений, перемещающейся под воздействием немонотонной нагрузки согласно эволюционному уравнению [75]. Предлагаемая модель является несвязанной, т.е. не подразумевается зависимость механических свойств от величины накопленной повреждённости. Накопленная повреждённость является функционалом истории изменения тензора напряжения.

Сначала будет сформулирована склерономная версия модели, а затем будет произведено её обобщение для учёта реономных эффектов, таких как частота нагружения и выдержки в цикле. Также будет произведён демонстрационный расчёт усталостной прочности детали на полётном цикле с учётом выдержек.

Будет предложен алгоритм идентификации материальных функций и параметров модели и проведена идентификация для различных материалов.

3.1 Уравнения модели

Предлагаются следующие уравнения модели:

$$\beta = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + g(I_1) - r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) + w(\Delta\sigma_{\max}) \right) / \sigma_{-1},$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \|\dot{\mathbf{s}}\| h(\beta) H(\beta) f(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|}, \qquad H(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < 0 \\ 1, & \beta \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\dot{D} = \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_{-1}} p(\beta) H(\beta) f(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) \frac{1}{(1 - F(\boldsymbol{\sigma}))^{L_4}}$$

В основе данной модели лежит понятие поверхности выносливости в пространстве напряжений, задаваемой уравнением $\beta = 0$. Пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности ($\beta \leqslant 0$, рис.3.1,а), прироста параметра повреждённости D не происходит, а когда напряжённое состояние выходит за её пределы ($\beta > 0$, рис.3.1,б), параметр D начинает расти в зависимости от расстояния до поверхности и направления изменения напряжений. Кроме того, поверхность выносливости может менять размер и перемещаться, приспосабливаясь к нагружению. Местоположение поверхности задаётся тензорнозначным параметром $\boldsymbol{\alpha}$.

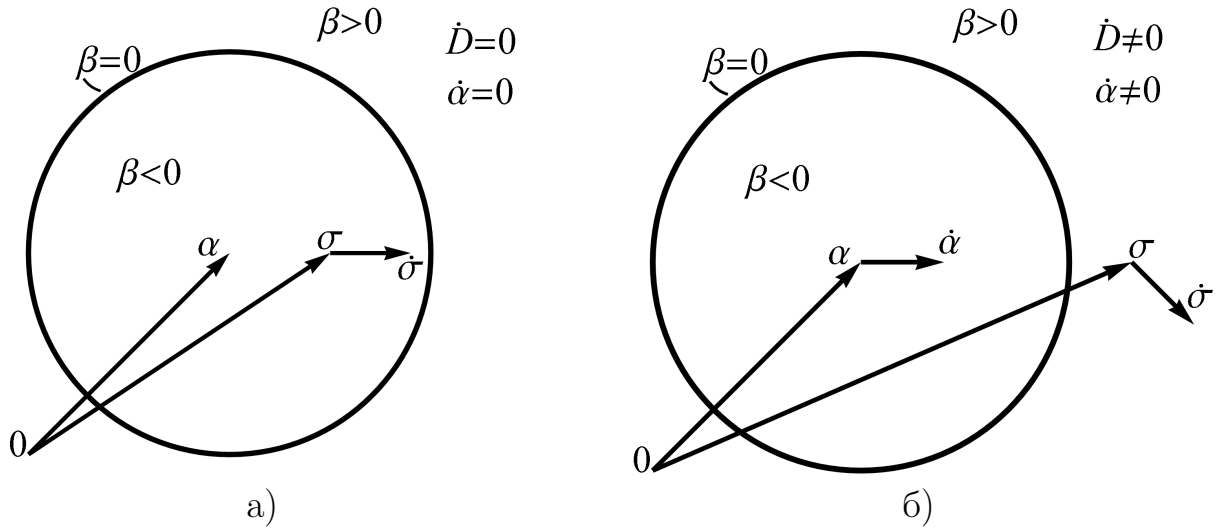


Рисунок 3.1 — Поверхность выносливости в пространстве напряжений. Напряжённое состояние лежит внутри и поверхность покоится (а); напряжённое состояние лежит снаружи и поверхность движется (б).

Выражение для β, приведённое в (3.1), имеет следующую структуру. Первое слагаемое определяет вклад девиаторной части напряжённого состояния и является расстоянием между центром поверхности выносливости $\boldsymbol{\alpha}$ и девиатором напряжений $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}$, где $I_1 = \sigma_{ii}$ есть первый инвариант тензора напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Норма симметричного тензора определяется как $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$. Второе слагаемое учитывает вклад гидростатической части и имеет вид материальной функции g от первого инварианта тензора напряжений I_1. Третье слагаемое задаёт радиус поверхности выносливости, который зависит от её положения $\boldsymbol{\alpha}$ в пространстве напряжений. Последнее слагаемое описывает сокращение радиуса поверхности выносливости, как функцию максимального размаха напряжений в течение истории нагружения до текущего момента времени $\Delta\sigma_{\max}(t) = \max\limits_{t_1 < t_2 \leqslant t} (\|\boldsymbol{\sigma}(t_1) - \boldsymbol{\sigma}(t_2)\|)$. Обезразмеривающий коэффициент σ_{-1} есть предел выносливости при регулярном симметричном нагружении.

Закон движения поверхности выносливости в (3.1) задаётся выражением для скорости $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ движения её центра. Здесь $h(\beta) \geqslant 0$ есть материальная функция, задающая скорость движения поверхности выносливости в зависимости от значения β. Функция Хевисайда $H(\beta)$ исполняет роль переключателя: пока напряжённое состояние находится внутри поверхности выносливости, она не движется. Материальная функция f определяет зависимость $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ от угла между направлением $\dot{\mathbf{s}}$ движения точки, изображающей напряжённое состояние, и направлением $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$ напряжённого состояния относительно центра поверхности. Данный угол определяется как $\cos(\angle(\dot{\mathbf{s}},\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) = (\dot{\mathbf{s}} : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) \,/\, (\|\dot{\mathbf{s}}\|\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|)$; $0 \leqslant f \leqslant 1$, причём если эти направления совпадают ($\cos(\angle) = 1$), то $f = 1$ и если они противоположно направлены ($\cos(\angle) = -1$), то $f = 0$. Поверхность выносливости движется в направлении напряжённого состояния, поскольку $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ пропорционально $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$.

Последнее уравнение в (3.1) есть эволюционное уравнение для параметра повреждённости. Здесь $p(\sigma) \geqslant 0$ есть материальная функция, отвечающая за скорость накопления повреждённости. По структуре это уравнение отличается от уравнения для $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ только отсутствием тензорнозначного множителя и присутствием множителя $1/\left(1 - F(\boldsymbol{\sigma})\right)^{L_4}$, где $F(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ задаёт поверхность прочности, а L_4 — материальный параметр. Таким образом, при приближении к поверхности прочности скорость прироста повреждённости неограниченно возрастает. Скорость прироста повреждённости зависит от расстояния до поверхности

выносливости (регулируется функцией $p(\beta)$) и направления изменения напряжённого состояния (регулируется функцией f, той же, что и в выражении для $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$).

Скорость прироста повреждённости принята независимой от текущей повреждённости, так как выражение с зависимостью $\dot{D} = G(D)F(\boldsymbol{\sigma}(t))$ сводится к $\dot{D} = F(\boldsymbol{\sigma}(t))$ заменой переменной D. Свобода такой перенормировки допускается несвязанностью модели (3.1) с уравнениями движения среды.

Модель (3.1) склерономна, т.е. независима от скорости изменения нагрузки $\boldsymbol{\sigma}(t)$, что достигается наличием множителя $\|\dot{\mathbf{s}}\|$ в правой части выражений для $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\dot{D}$. Для уравнений (3.1) важна только форма пути в пространстве напряжений, а в случае одноосного нагружения — только значения максимумов и минимумов нагрузки.

3.2 Отличия от модели Оттосена

По сравнению с моделью Оттосена [75]

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + K I_1 - \sigma_{-1} \right) / \sigma_{-1} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \dot{\beta} h(\beta) H(\beta) H(\dot{\beta}) (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}), \qquad h(\beta) \equiv C \\ \dot{D} &= \dot{\beta} p(\beta) H(\beta) H(\dot{\beta}), \qquad p(\beta) = K \exp(L\beta) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где A, C, K, L есть материальные константы, модель (3.1) имеет следующие отличия:

1. Выражение для β усовершенствовано, чтобы описывать одноосную и сдвиговую диаграммы Хейга произвольной формы. Модель (3.2) описывает только линейную диаграмму Хейга для одноосного нагружения, а в случае сдвигового нагружения она предсказывает одинаковую амплитуду выносливости τ_{a} для любого среднего напряжения цикла τ_{m}, в том числе и за пределами прочности материала.

2. Добавлено уменьшение размера поверхности выносливости в зависимости от максимального размаха напряжений в истории. Уменьшение предела выносливости при наличии в истории нагружения циклов достаточно большой амплитуды наблюдается экспериментально [39].

3. В правой части эволюционных уравнений модели (3.2) $\dot{\beta}$ заменено на $\|\dot{\mathbf{s}}\|$. На траекториях напряжений $\beta = \text{const} > 0$ модель (3.2) не накапливает повреждённость, несмотря на то, что напряжённое состояние всё время находится за пределами поверхности выносливости, рис.3.2.

4. В эволюционном уравнении накопления повреждённости учтена поверхность прочности, чтобы исключить неадекватный прогноз при наличии единичных циклов большой амплитуды в истории нагружения.

5. В правой части эволюционных уравнений (3.2) присутствует простой переключатель $H(\dot{\beta})$, который отключает накопление повреждённости и движение поверхности выносливости, если напряжённое состояние приближается к поверхности выносливости снаружи. Он был заменён на материальную функцию $f(\angle(\dot{\mathbf{s}},\mathbf{s}-\boldsymbol{\alpha}))$, чтобы увеличить возможность модели описывать результаты экспериментов на непропорциональное нагружение.

6. Была увеличена гибкость материальных функций, регулирующих скорости накопления повреждённости и движения поверхности выносливости в зависимости от значения β, что позволяет лучше регулировать наклон кривых Вёлера для различных коэффициентов асимметрии нагружения.

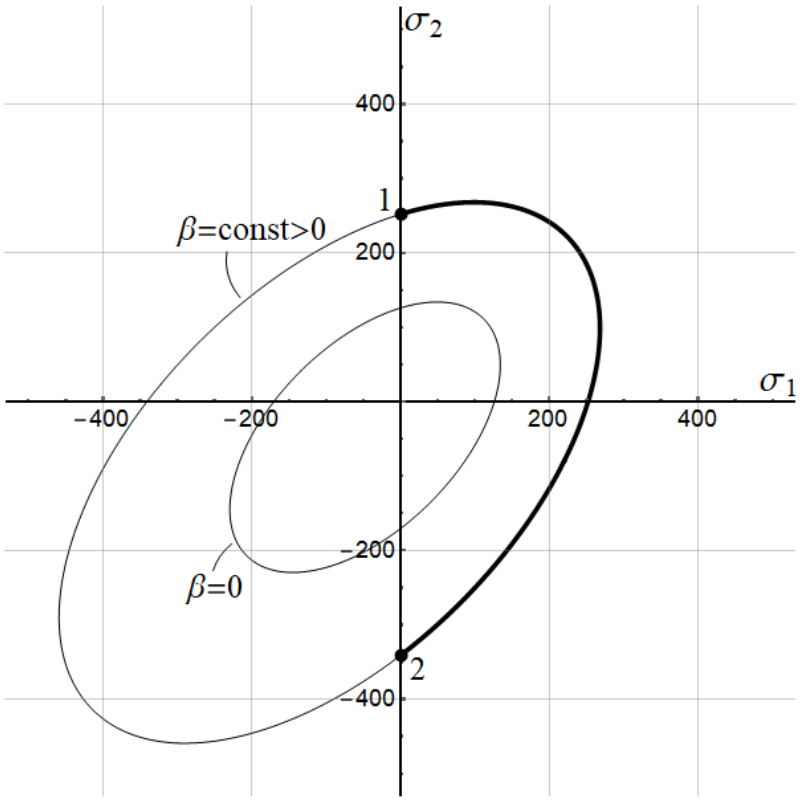


Рисунок 3.2 — Иллюстрация случая, когда при движении напряжённого состояния по траектории 1–2 по модели Оттосена не накапливается повреждённость.

3.3 Идентификация констант модели по экспериментальным данным

3.3.1 Алгоритм идентификации и его применение к алюминиевому сплаву AA2024

Алюминиевый сплав AA2024-T4 (и AA2024-T351)[23] выбраны в качестве примера, так как они часто используется в авиастроении. В научных статьях, справочниках и общедоступных базах данных можно найти много результатов усталостных испытаний этого материала.

В уравнениях (3.1) участвует критерий прочности. Для рассматриваемых здесь материалов предлагается использовать трёхпараметрический критерий Шлейхера [151]

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}\|\mathbf{s}\| = \sqrt{a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_1^2}.$$

Параметры a_i выражаются через три предела прочности: на растяжение σ_{tu}, сжатие $\sigma_{\text{cu}} > 0$ и сдвиг τ_{u}:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3\tau_{\text{u}}^2 \\ a_1 &= -3\tau_{\text{u}}^2 \frac{\sigma_{\text{cu}} - \sigma_{\text{tu}}}{\sigma_{\text{cu}}\sigma_{\text{tu}}} \\ a_2 &= 1 - \frac{3\tau_{\text{u}}^2}{\sigma_{\text{cu}}\sigma_{\text{tu}}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Критерий приводится к виду $F(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ при

$$F = \frac{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} - a_1 I_1 - a_2 I_1^2}{a_0} \tag{3.4}$$

Для сплава AA2024-T4 были приняты такие значения пределов прочности: $\sigma_{\text{tu}} = 465$МПа, $\tau_{\text{u}} = 283$ [152] и $\sigma_{\text{cu}} = 1.2\sigma_{\text{tu}}$ из оценочных соображений.

Материальные функции $g(I_1)$ и $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ в выражении для β можно идентифицировать по двум диаграммам Хейга зависимостей пределов выносливости при одноосном и сдвиговом нагружениях от среднего напряжения в цикле.

[23] Обработки T4 T351 очень похожи друг на друга и эти материалы имеют близкие механические свойства.

На первом этапе рассматривается регулярное сдвиговое нагружение со средним значением τ_m и амплитудой τ_a. Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются $\sigma_{12} = \sigma_{21}$; те же ненулевые компоненты $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ имеет и тензор $\boldsymbol{\alpha}$, так как $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ пропорционально $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$ (3.1). Такое нагружение лежит на диаграмме Хейга, если максимальное $\tau_{\max} = \tau_{\mathrm{m}} + \tau_{\mathrm{a}}$ и минимальное $\tau_{\min} = \tau_{\mathrm{m}} - \tau_{\mathrm{a}}$ напряжения цикла лежат на поверхности выносливости $\beta = 0$. Тогда весь цикл лежит внутри поверхности выносливости и касается её границ крайними значениями, подставляя которые в выражение $\beta = 0$ (3.1) получим

$$\sqrt{3}\left(\tau_{\mathrm{m}} + \tau_{\mathrm{a}} - \alpha_0\right) - r\left(\sqrt{2}\alpha_0\right) = 0, \;\; \sqrt{3}\left(-\tau_{\mathrm{m}} + \tau_{\mathrm{a}} + \alpha_0\right) - r\left(\sqrt{2}\alpha_0\right) = 0, \quad (3.5)$$

где α_0 есть компонента α_{12} тензора $\boldsymbol{\alpha}$. В ходе такого циклического нагружения α_0 не изменяется, так как цикл лежит внутри поверхности выносливости. Исключив α_0 из (3.5), получим

$$\tau_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{2}\tau_{\mathrm{m}}\right) \quad \text{или} \quad r(x) = \sqrt{3}\tau_{\mathrm{a}}\left(x/\sqrt{2}\right), \quad (3.6)$$

где функция $\tau_a(\tau_{\mathrm{m}})$ задаёт сдвиговую диаграмму Хейга. Первое выражение в (3.6) позволяет построить предсказываемую моделью диаграмму Хейга по известной функции $r(x)$, а второе, наоборот, — функцию $r(x)$ по заданной, например, экспериментальной, сдвиговой диаграмме Хейга.

На втором этапе рассматривается регулярное одноосное нагружение со средним значением σ_{m} и амплитудой σ_{a}. Тензор напряжений имеет единственную ненулевую компоненту σ_{11}, а значит тензор $\boldsymbol{\alpha}$ имеет ненулевые диагональные элементы α_{11} и $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\frac{1}{2}\alpha_{11}$, что следует из пропорциональности $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$ (3.1). Как и ранее, нагружение лежит на диаграмме Хейга, если максимальное $\sigma_{\max} = \sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}}$ и минимальное $\sigma_{\min} = \sigma_{\mathrm{m}} - \sigma_{\mathrm{a}}$ напряжения цикла лежат на поверхности выносливости $\beta = 0$, подставляя которые в выражение для β (3.1) и обозначая α_{11} как α_0, получим

$$\begin{gathered} \sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}} - \tfrac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\alpha_0\right) + g\left(\sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}}\right) = 0 \\ -\sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}} + \tfrac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\alpha_0\right) + g\left(\sigma_{\mathrm{m}} - \sigma_{\mathrm{a}}\right) = 0 \end{gathered} \quad (3.7)$$

Исключив из (3.7) α_0, получим

$$\sigma_a + \frac{1}{2}\left(g\left(\sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}}\right) + g\left(\sigma_{\mathrm{m}} - \sigma_{\mathrm{a}}\right)\right) - r\left(\frac{g(\sigma_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{a}}) - g(\sigma_{\mathrm{m}} - \sigma_{\mathrm{a}}) + 2\sigma_{\mathrm{m}}}{\sqrt{6}}\right) = 0 \quad (3.8)$$

Если известна функция $\sigma_{\mathrm{a}}(\sigma_{\mathrm{m}})$, задающая диаграмму Хейга для одноосного нагружения, то выражение (3.8) можно рассматривать как уравнение относительно функции $g(x)$. Это функциональное уравнение достаточно сложное, поэтому удобнее пойти другим путём. Если заданной считать функцию $g(x)$, то выражение (3.8) будет определять неявную зависимость между σ_{a} и σ_{m}. Пусть экспериментальная диаграмма Хейга задана в формате набора из n пар значений $\{\sigma^i_{\mathrm{m}},\sigma^i_{\mathrm{a}}\}$, $i = 1..n$. Будем искать $g(x)$ как функцию, параметризованную набором параметров k_i, $i = 1..m$, достаточно гибко регулирующих её форму. Функция $g(x)$ должна быть монотонно возрастающей, так как повышение I_1 негативно влияет на усталостную прочность. При некотором конкретном наборе параметров k_i выражение (3.8) сопоставляет значениям σ^i_{m} значения $\hat{\sigma}^i_{\mathrm{a}}$, отличающиеся от экспериментальных σ^i_{a}. Параметры k_i подбираются так, что невязка между прогнозируемыми $\hat{\sigma}^i_{\mathrm{a}}$ и экспериментальными σ^i_{a} минимальна.

Функции ищутся в виде

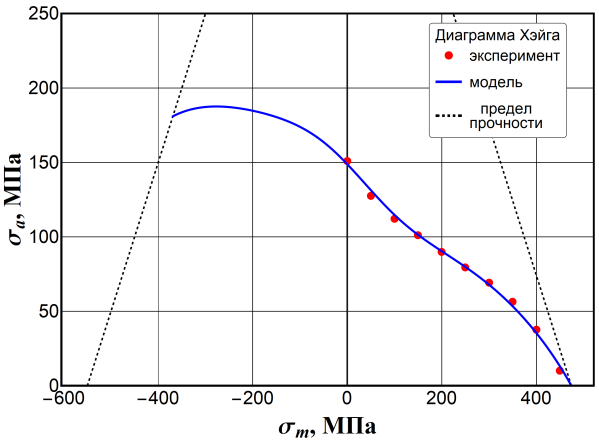
$$
\begin{gathered}
g_1(x) = \operatorname{sign}(x) \int_0^{|x|} \exp\left(-|s|^{L_g}\right) ds, \quad g(I_1) = \hat{k}_g I_1 - k_g c_g \left(g_1\left(\frac{I_1 - I_0}{c_g}\right) - g_1\left(\frac{-I_0}{c_g}\right)\right), \\
r_1(x) = \begin{cases} \tau_u - x - k_r(\tau_u - x)^\gamma & x \geqslant \tau_u - c_r \\ \tau_{-1} & x < \tau_u - c_r \end{cases}, \quad r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) = \sqrt{3} r_1\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|/\sqrt{2}\right), \\
k_r = \frac{1}{\gamma c_r^{\gamma-1}}, \quad \gamma = \frac{c_r}{c_r - \tau_{-1}},
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

где L_g, $\hat{k}_g$, k_g, c_g, I_0 есть параметры функции $g(I_1)$, c_r — параметр функции $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$, τ_u — предел прочности на сдвиг, τ_{-1} — сдвиговой предел выносливости при $R = -1$.

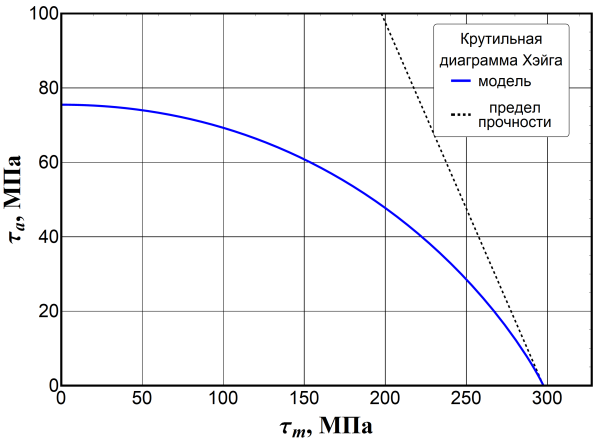
Функции такого вида хорошо описывают диаграммы Хейга для разнообразных материалов, другие примеры приведены в разделе 3.3.2.

Для алюминиевого сплава AA2024-T4 диаграммы Хейга для одноосного нагружения и чистого сдвига изображены на рис.3.3. Экспериментальные точки для одноосного нагружения взяты из [153]. Ввиду отсутствия сдвиговой диаграммы Хейга для данного материала была использована кривая типичной для металлов формы[24]. Сдвиговой предел выносливости при симметричном нагру-

[24]Крутильные диаграммы Хейга, которые можно найти в литературе для различных сплавов, имеют приблизительно одинаковую форму: постоянство σ_a при небольших σ_m и, затем, спад к пределу прочности.

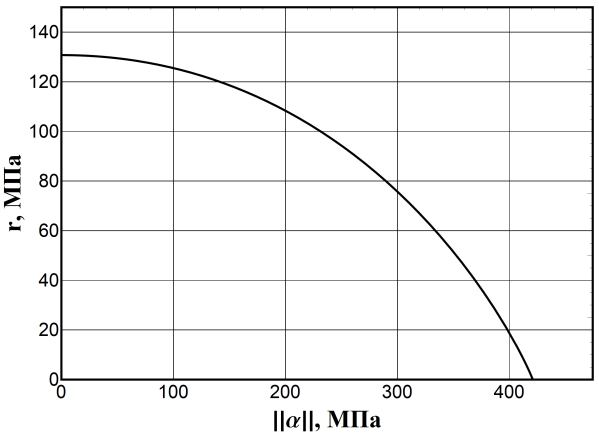


а)

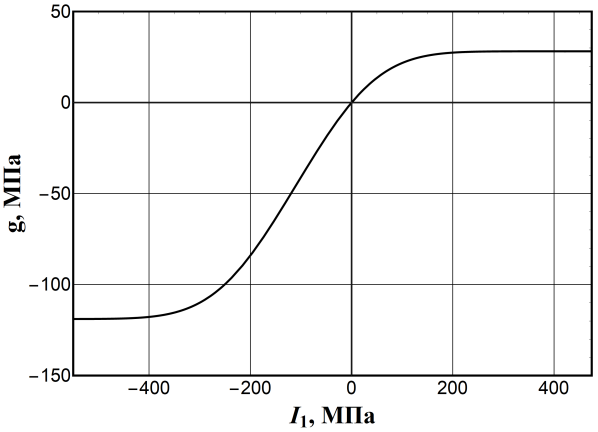


б)

Рисунок 3.3 — Диаграмма Хейга алюминиевого сплава AA2024-T4 для одноосного нагружения (а): экспериментальные данные и их описание моделью; и чистого сдвига (б): модельная кривая.



а)



б)

Рисунок 3.4 — Идентифицированные материальные функции: $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ (а) и $g(I_1)$ (б) для AA2024-T4.

жении был принят $\tau_{-1} = 0.55\sigma_{-1}$ [154]. Идентифицированные материальные функции $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ и $g(I_1)$ изображены на рис.3.4, их параметры были найдены из условия минимума невязки с экспериментальными данными симплекс-методом:

$$L_g = 5,\ \hat{k}_g = 0,\ k_g = -0.405,\ c_g = 488\text{МПа},\ I_0 = -126\text{МПа},\ c_r = 752\text{МПа}. \tag{3.10}$$

Следующую группу материальных функций предлагается искать в виде:

$$\begin{aligned} w(x) &= k_1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{10} b_1 \ln \left(\frac{\cosh(5(1 - x/b_1))}{\cosh(5)} \right) \right), \\ h(\beta) &= k_2 \beta^{L_2} + b_2, \\ p(\beta) &= k_3(\exp(L_3\beta) - (1 - b_3)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

где k_1, b_1, k_2, L_2, b_2, k_3, L_3, b_3 — материальные константы. Функция $w(x)$ представляет собой сглаженную кусочно-линейную функцию, тождественно равную нулю при $x \leqslant b_1$ и линейную функцию с наклоном k_1 при $x > b_1$. Восемь констант (3.11) и константа L_4 (3.1), связанная с поверхностью прочности, определяются по экспериментальным кривым Вёлера и некоторым экспериментам на нерегулярное одноосное нагружение, если они доступны. Рекомендуется использовать две и более кривых Вёлера для различных коэффициентов асимметрии нагружения $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$. Записывается невязка между предсказаниями модели и экспериментальными данными, а затем находится набор параметров, соответствующий её минимуму.

Для идентификации параметров имеем две экспериментальные диаграммы Вёлера $R = -1$ и $R = 0$ [152] для AA2024-T4 и приведённые ниже данные на нерегулярное нагружение.

В качестве данных на нерегулярное нагружение использованы экспериментальные данные для AA2024-T351 из [31]: величины $q^{exp}_{10/50} = 2.14$ и $q^{exp}_{10/250} = 5.84$, где $q^{exp}_{n_1/n_2}$ есть отношение повторений программы нагружения, изображённой на рис. 1.6(б), до разрушения, при $n_{\text{small}} = n_1$ и $n_{\text{small}} = n_2$. Остальные параметры программы рис. 1.6(б) равны $\sigma_{\text{a}}^{\text{small}} = 0.25\sigma_{tu}$, $\sigma_{\min}^{\text{big}} = -0.85\sigma_{tu}$, $\sigma_{\max}^{\text{big}} = 0.75\sigma_{tu}$.

Также для идентификации использовано экспериментальное время жизни на нерегулярной программе нагружения «Блочная» [17] для AA2024-T351, рис. 1.7. Усталостные испытания в [17] выполнены на образцах с концентратором (рис. 3.5), а для применения эволюционной модели необходимо по известной истории усилия, приложенного к образцу, уметь восстанавливать историю изменения напряжённого состояния $\sigma(t)$ в опасной точке концентратора (которое для образца рис. 3.5 является близким к одноосному)[25]. Предлагается следующая оценка:

$$\sigma(t) = K_t \sigma_{\text{бр}}(t) + \sigma_{\text{ост}}, \tag{3.12}$$

где $\sigma_{\text{бр}}(t)$ есть брутто напряжение, т. е. усилие, приложенное к образцу, поделённое на площадь поперечного сечения без учёта ослабления, $K_t = 3.084$ — брутто коэффициент концентрации напряжений, $\sigma_{\text{ост}}$ — остаточные напряжения в

[25]Модель возможно применить и не переходя к напряжениям в опасной точке, работая с величиной $\sigma_{\text{бр}}(t)$, но тогда все испытания, на которых идентифицируется модель, должны быть проведены на одинаковых образцах с концентратором, и предсказательная сила модели будет ограничена деталью с идентичным концентратором, нагруженной одноосно.

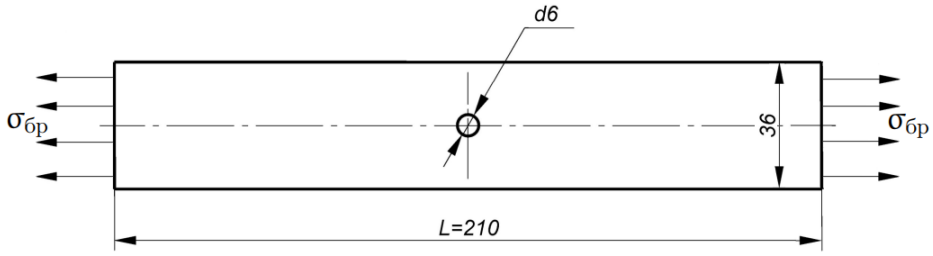


Рисунок 3.5 — Геометрия образцов для усталостных испытаний [17].

опасной точке концентратора, которые возникают в ответ на пластические деформации, происходящие на пиках нагрузки. Здесь считается, что $\sigma_{\text{ост}} = \text{const}$, т. е. пластические деформации определяются в начале программы и в дальнейшем не меняются, а нагружение происходит в упругом режиме. В реальности, по-видимому, остаточные напряжения в концентраторе значительно изменяются в течение жизни образца вследствие циклической ползучести.

Оценка величины $\sigma_{\text{ост}}$ для программы нагружения проводилась по пику нагрузки $\sigma_{\text{бр}}^{\max}$ в программе из следующих соображений. Зона пластической деформации у опасной точки концентратора считается малой, а значит, полная деформация в опасной точке на пике нагрузки $\sigma_{\text{бр}}^{\max}$ приблизительно равна деформации, которая была бы в опасной точке, если бы материал вёл себя упруго. Напряжения, которые были бы в опасной точке, если бы материал вёл себя упруго, равны $\sigma_{\text{упр}}^{\max} = K\sigma_{\text{бр}}^{\max}$, а деформации $\varepsilon_{\max} = \sigma_{\text{упр}}^{\max}/E$, где E — модуль Юнга. Пластические деформации в вершине концентратора равны $\varepsilon^p = \varepsilon_{\max} - \sigma(\varepsilon_{\max})/E$ (где $\sigma(\varepsilon)$ есть диаграмма деформирования), а искомые остаточные напряжения: $\sigma_{\text{ост}} = E\varepsilon^p$. Таким образом, остаточные напряжения есть функция максимальных напряжений брутто за программу: $\sigma_{\text{ост}}(\sigma_{\text{бр}}^{\max})$. Расчёт МКЭ показал, что такая оценка имеет неплохую точность, различаясь на 5% при $\sigma_{\text{бр}}^{\max} = 133$ МПа и еще менее для меньших напряжений. Известное правило Нейбера [155], применяемое для расчета состояния в концентраторе, показало значительно худшие результаты. В качестве диаграммы деформирования использовалось соотношение Рамберга–Осгуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}},$$

при $n = 0.07$, а значение $K = 558$ МПа взято таким, чтобы предел текучести по допуску 0.2% совпадал с экспериментальным значением из [17] $\sigma_{0.2} = 380$ МПа.

В [17] приведены две значительно отличающиеся экспериментальные диаграммы Вёлера ($R = 0$) для образцов с концентратором (рис. 3.5) из сплава

AA2024-T351 в координатах $\sigma_{\text{бр}}^{\max}$, N (рис.3.6). Вторая из них намного лучше соответствует данным для AA2024-T4 из [152], но интересующие нас эксперименты проведены для материала с первой кривой.

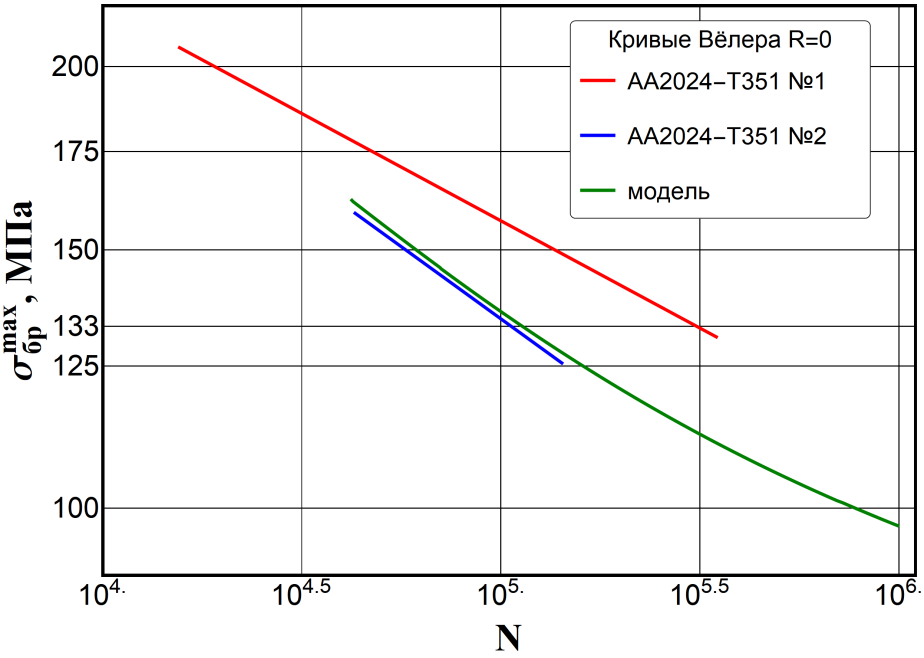


Рисунок 3.6 — Экспериментальные кривые Вёлера для AA2024-T351 из [17] и модельная кривая (для идентификации модели использовались кривые Вёлера для AA2024-T4 из [152]).

Кривые Вёлера из [152] для гладких образцов из AA2024-T4 и данные на регулярное нагружение из [17] для образцов с концентратором из AA2024-T351 (приведённые к локальной истории при помощи формулы (3.12)) плохо согласуются между собой. По-видимому, это происходит из-за небольшого различия термообработки, разной формы образцов, различного качества поверхности, вариации химического состава, и т.д. Для корректной идентификации модели усталости требуется набор экспериментов с контролем материала образцов. Когда для идентификации одновременно используются данные из различных источников, такого контроля нет. Поэтому, в рамках данной работы, для согласования данных из [152] и [17] был введён коэффициент поправки $k_{\text{поправки}} = 0.84$. Он подобран так, чтобы модель усталости, идентифицированная на кривых Вёлера из [152], давала предсказание для N_{133} (время жизни на отнулевом регулярном напряжении $\sigma_{\text{бр}}^{\max} = 133$ МПа), близкое к экспериментальному из [17]. Формула (3.12) принимает вид

$$\sigma(t) = K_t k_{\text{поправки}} \sigma_{\text{бр}}(t) + \sigma_{\text{ост}}(k_{\text{поправки}} \sigma_{\text{бр}}^{\max}). \tag{3.13}$$

При работе с эволюционной моделью формула (3.13) применялась к историям нагружения из [17]:

1. регулярному отнулевому нагружению с идентификации модели, колонка 4 в табл. 3.3;
2. нерегулярному нагружению по программе «Блочная» (при идентификации модели, колонка 5 в табл. 3.3);
3. нерегулярному нагружению по программе «Боинг» (при верификации модели, колонка 6 в табл. 3.3);
4. нерегулярному нагружению по программе «TWIST» (при верификации модели, колонка 7 в табл. 3.3);
5. нерегулярному нагружению по программе «ЦАГИ» (при верификации модели, колонка 8 в табл. 3.3).

Итоговая невязка записывается как

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\ln(N_i)}{\ln(N_i^{\exp})}\right)^2 + 2.5 \left(1 - \frac{\ln(N_{133})}{\ln(N_{133}^{\exp})}\right)^2 + 2.5 \left(1 - \frac{\ln(N_{\text{блоч}})}{\ln(N_{\text{блоч}}^{\exp})}\right)^2 + \\ + 0.1 \max\left(\left|q_{10/50}^{\exp} - q_{10/50}\right|, 0.1\right) + 0.05 \max\left(\left|q_{10/250}^{\exp} - q_{10/250}\right|, 0.2\right). \tag{3.14}$$

Первое слагаемое невязки относится к диаграммам Вёлера; здесь N_i^{exp} есть экспериментальное значение числа циклов до разрушения на i-том нагружении, N_i — предсказание модели на том же нагружении, n — общее число экспериментальных точек, использованных в невязке. Второе слагаемое — невязка с экспериментальным значением $N_{133}^{\exp} = 310783$ [17]. Третье слагаемое — невязка с экспериментальным временем жизни на «Блочной» программе нагружения $N_{\text{блоч}}^{\exp} = 70990$, рис. 1.7 [17]. Последние 2 слагаемых относятся к нерегулярному нагружению рис. 1.6(б) [31]. Отметим, что восприимчивость к многочисленным циклам малой амплитуды в нерегулярных испытаниях увеличивается за счет понижения скорости трансляции поверхности выносливости [6]. Материальные параметры k_1, b_1, k_2, L_2, b_2, k_3, L_3, b_3, L_4 находятся путём минимизации невязки (3.14) симплекс–методом (Нелдера–Мида).

Для АА2024-Т4, константы (3.14), минимизирующие невязку, имеют значения:

$$k_1 = 1.68,\ b_1 = 507\text{МПа},\ k_2 = 0.77,\ L_2 = 5.48,\ b_2 = 0.104, \\ k_3 = 10^{-5.79},\ L_3 = 2.87,\ b_3 = 1.35 \cdot 10^{-2},\ L_4 = 1.54. \tag{3.15}$$

Этому набору констант соответствуют модельные кривые Вёлера, изображённые на рис.3.7, $N_{133} = 352373$, $N_{\text{блоч}} = 71100$, $q_{10/50} = 1.84$, $q_{10/250} = 6.04$.

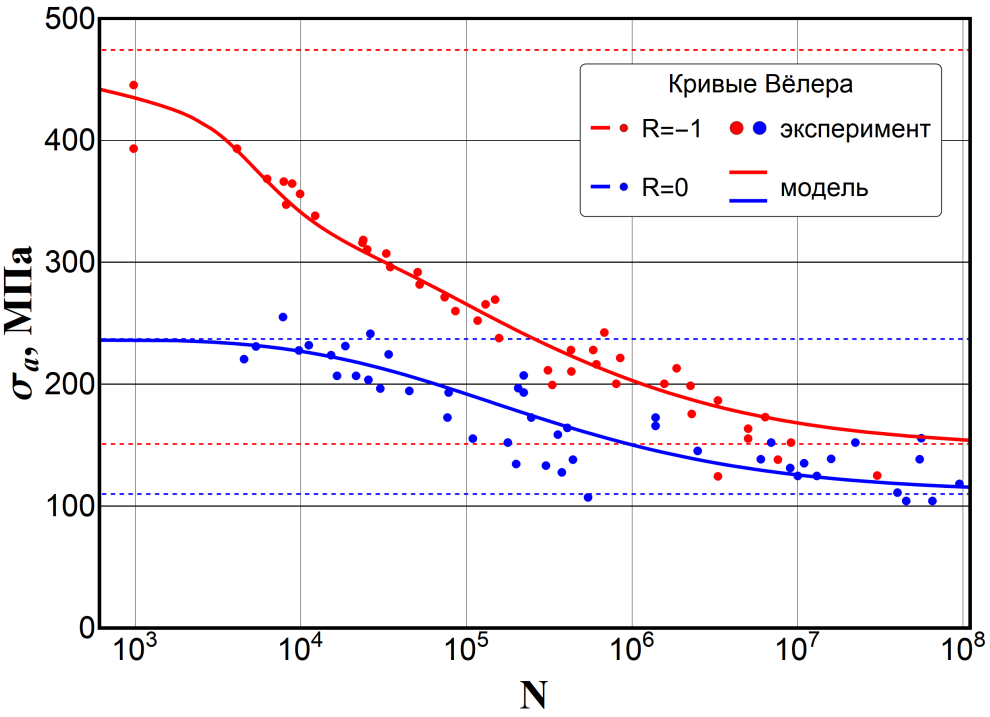


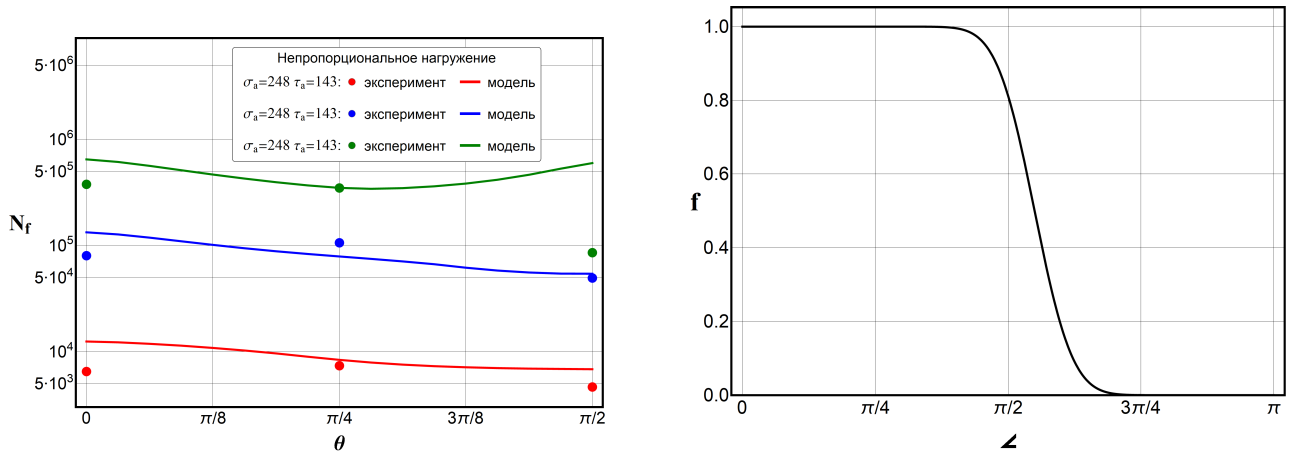
Рисунок 3.7 — Диаграмма Вёлера для сплава AA2024-T4: экспериментальные данные и предсказания модели (пунктирными линиями показаны предел прочности и пределы выносливости).

Последняя материальная функция $f(\angle(\dot{\mathbf{s}},\mathbf{s}-\boldsymbol{\alpha}))$ отвечает за накопление повреждённости в зависимости от направления изменения напряжений и играет роль в случае несинфазного многоосного нагружения. Она разыскивается в виде

$$f_0(x) = 1 - \operatorname{erf}\left(3\left(x - L_5\tfrac{\pi}{2}\right)\right), \quad f(\angle) = \frac{f_0(\pi) - f_0(\angle)}{f_0(\pi) - f_0(0)}.$$

Материальная константа L_5 определяется из экспериментов на непропорциональное циклическое нагружение. Если рассматриваемое нагружение синфазно, значение L_5 не влияет на оценку усталостной прочности.

В случае AA2024-T4 для определения параметра L_5 используются результаты опытов на несинфазное многоосное нагружение [156]. Рассматривается комбинация из регулярного одноосного растяжения и регулярного чистого сдвига при различных разностях фаз и уровнях максимальных напряжений. Наилучшее совпадение с опытами достигается при $L_5 = 1.1$, модельные кривые и экспериментальные данные изображены рис.3.8(а), а идентифицированная материальная функция f — на рис.3.8(б).



а) б)

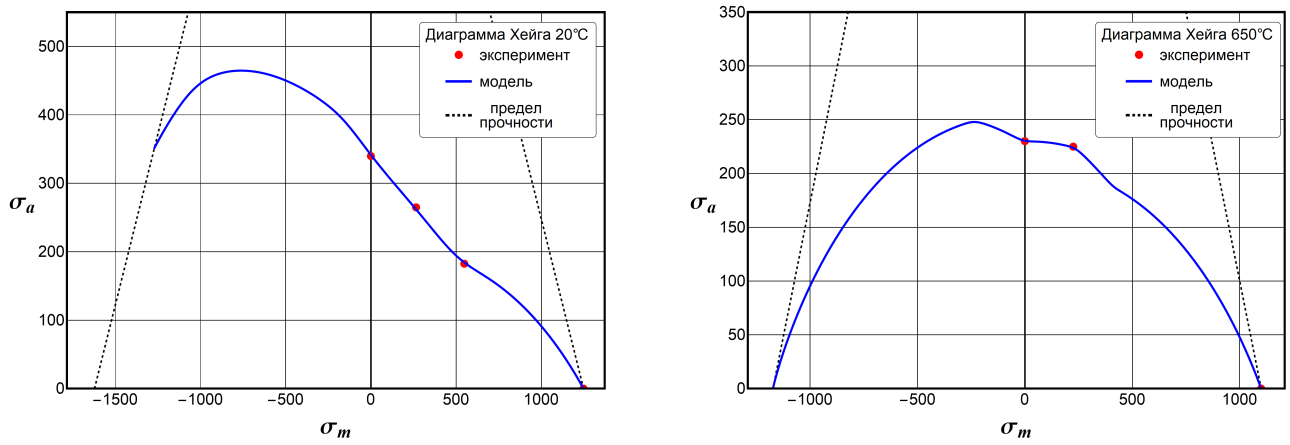
Рисунок 3.8 — Сравнение результатов экспериментов на непропорциональное нагружение алюминиевого сплава AA2024-T4 [156] с предсказаниями модели (а), материальная функция $f(\angle)$, отвечающая за зависимость скорости движения поверхности выносливости от направления изменения напряжённого состояния (б).

3.3.2 Жаропрочный никелевый сплав

Идентифицируем материальные параметры модели (3.1) для жаропрочного никелевого сплава при двух различных температурах 20 °C и 650 °C. Идентификация для различных температур проводится независимо, а полученные наборы параметров будут использованы в главе 4 при оценке усталостной прочности деталей авиадвигателя.

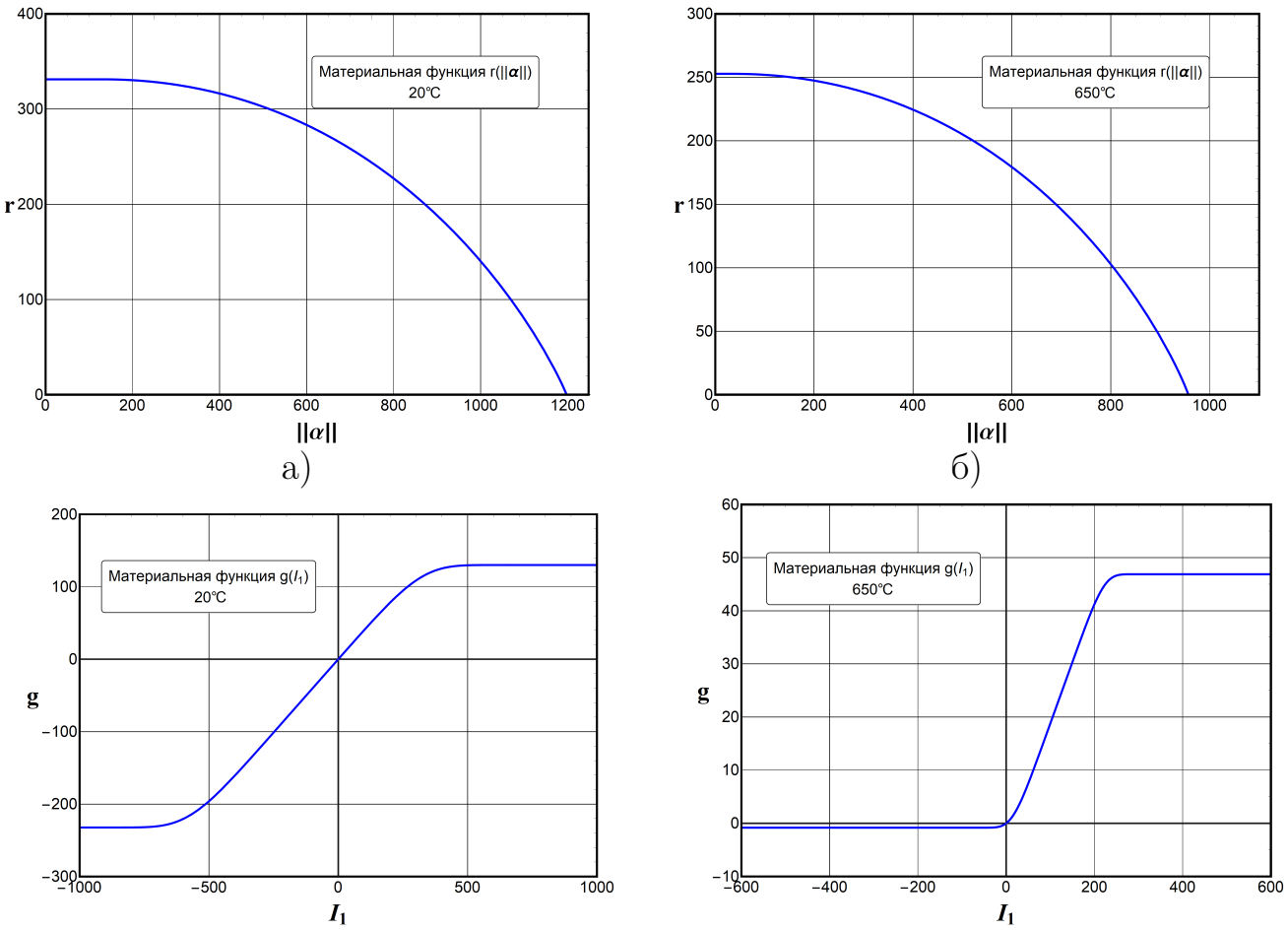
Для жаропрочного никелевого сплава предел прочности при $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ равен $\sigma_{\mathrm{tu}} = 1248\mathrm{МПа}$, а при $T = 650\,^{\circ}\mathrm{C}$ — $\sigma_{\mathrm{tu}} = 1161\mathrm{МПа}$, остальные пределы прочности для обеих температур приняты $\tau_{\mathrm{u}} = 0.7\sigma_{\mathrm{tu}}$ и $\sigma_{\mathrm{cu}} = 1.2\sigma_{\mathrm{tu}}$ из оценочных соображений, типичные для похожих сплавов.

Модельные диаграммы Хейга (для одноосного нагружения) для двух температур 20 °C и 650 °C вместе с экспериментальными данными изображены на рис.3.9. Данные по пределу выносливости на чистый сдвиг для данного материала отсутствуют, предел выносливости при симметричном нагружении был, из оценочных соображений, принят $\tau_{-1} = 0.55\sigma_{-1}$ [154]. Материальные функции $g(I_1)$, $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ (3.9) изображены на рис.3.10, их параметры были найдены из условия минимума невязки с экспериментальными данными симплекс-методом и приведены в табл. 3.1.



а) б)

Рисунок 3.9 — Диаграмма Хейга для жаропрочного никелевого сплава при 20 °C (а) и 650 °C (б). Величины по осям отложены в МПа.



а) б)

в) г)

Рисунок 3.10 — Идентифицированные материальные функции: $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ при 20 °C (а) и при 650 °C (б); $g(I_1)$ при 20 °C (в) и при 650 °C (г). По осям отложены МПа.

Для идентификации параметров k_1, b_1, k_2, L_2, b_2, k_3, L_3, b_3, L_4 функций (3.11) имеются три экспериментальные диаграммы Вёлера при комнатной температуре 20 °C для $R = -1;\ 0;\ 0.5$ и одна диаграмма Вёлера при 650 °C для

Таблица 3.1 — Материальные параметры функций $g(I_1)$, $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ для жаропрочного никелевого сплава

T, °C	L_g	$\hat{k}_g$	k_g	c_g, МПа	I_0, МПа	c_r, МПа
20	5	0	-0.405	488	-126	752
650	5	0	-0.23	112	118	677

$R = -1$. Данных на нерегулярное нагружение в наличии нет. Для 20 °C найдены

Таблица 3.2 — Два набора материальных констант функций w, q и p для жаропрочного никелевого сплава при температуре 20 °C

set	k_1	k_2	k_3	b_1, MPa	b_2	b_3	ω	l_1	l_2
1	3.5	328	$10^{-6.98}$	4993	0.242	1.89	3.36	13.1	6.92
2	3.63	1.87	$10^{-6.39}$	1707	0.026	0.216	3.34	3.98	3.7

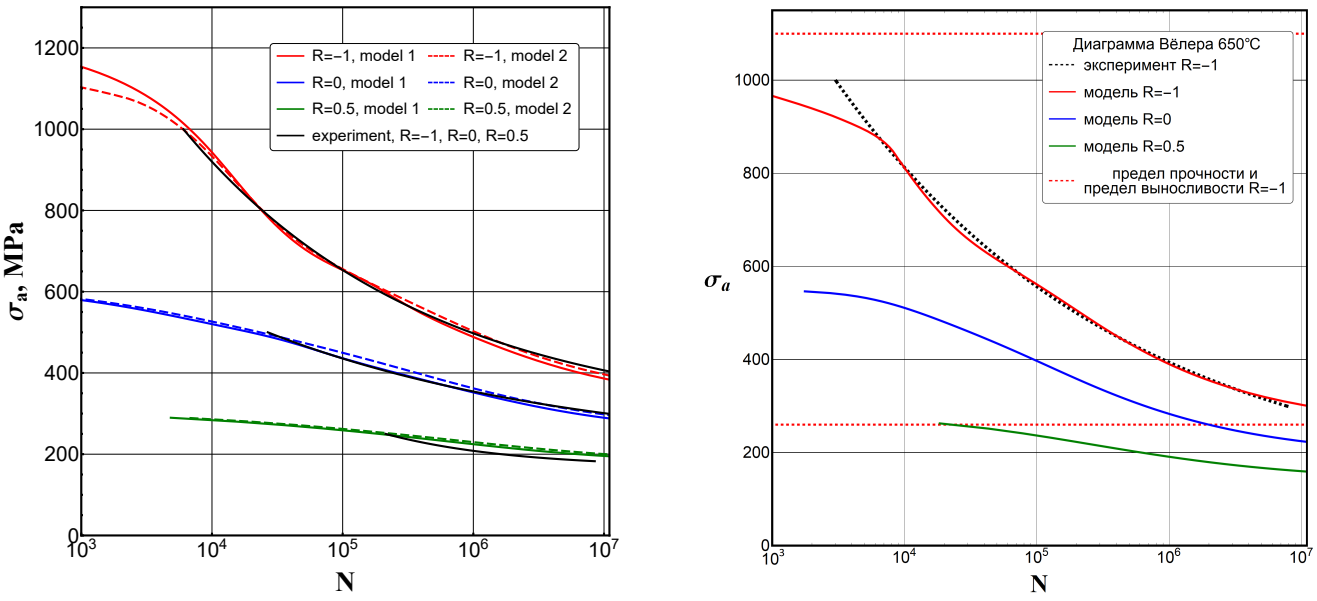
два набора констант модели (набор 1 и набор 2), минимизирующих невязку (в виде первого слагаемого (3.14)) и приведёны в табл. 3.2. Оба набора одинаково хорошо воспроизводят кривые усталости (рис. 3.11(а)), но описывают различную усталостную долговечность на нерегулярной программе испытаний в виде суммы отнулевых низкочастотных циклов большой амплитуды и симметричных высокочастотных циклов малой амплитуды [6] (набор констант 1 обеспечивает слабую восприимчивость к высокочастотной составляющей, а набор 2 — сильную). Отметим, что восприимчивость к высокочастотной составляющей нерегулярных испытаний увеличивается за счет понижения скорости трансляции поверхности выносливости [6].

Для 650 °C константы, минимизирующие невязку, имеют значения:

$$\begin{aligned} &k_1 = 3.41,\ b_1 = 1244\text{МПа},\ k_2 = 1.72,\ L_2 = 5.94,\ b_2 = 0.066 \\ &k_3 = 10^{-5.9},\ L_3 = 2.16,\ b_3 = 2.99 \cdot 10^{-4},\ L_4 = 1.55. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Этому набору констант соответствуют кривые Вёлера, изображённые на рис.3.11(б). Экспериментальные данные при температуре 20 °C (рис.3.11(а)) тоже были использованы для идентификации параметров за неимением экспериментальных диаграмм Вёлера при $R \neq -1$ для температуры 650 °C: отношение между амплитудами, соответствующими различным R, было взято одинаковым при $T = 650$ °C и $T = 20$ °C (кроме пределов выносливости).

Данных по несинфазному многоосному нагружению для данного материала нет, а нагружения, рассматриваемые в разделе 4, синфазны, поэтому константа L_5 не идентифицировалась.



а) б)

Рисунок 3.11 — Диаграмма Вёлера жаропрочного никелевого сплава: а) экспериментальные данные и предсказания модели при $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ для двух различных наборов констант, соответствующих «медленному» и «быстрому» движению поверхности выносливости; б) экспериментальные данные и предсказания модели при $T = 650\,^{\circ}\mathrm{C}$.

3.3.3 Чугун EN-GJV-450

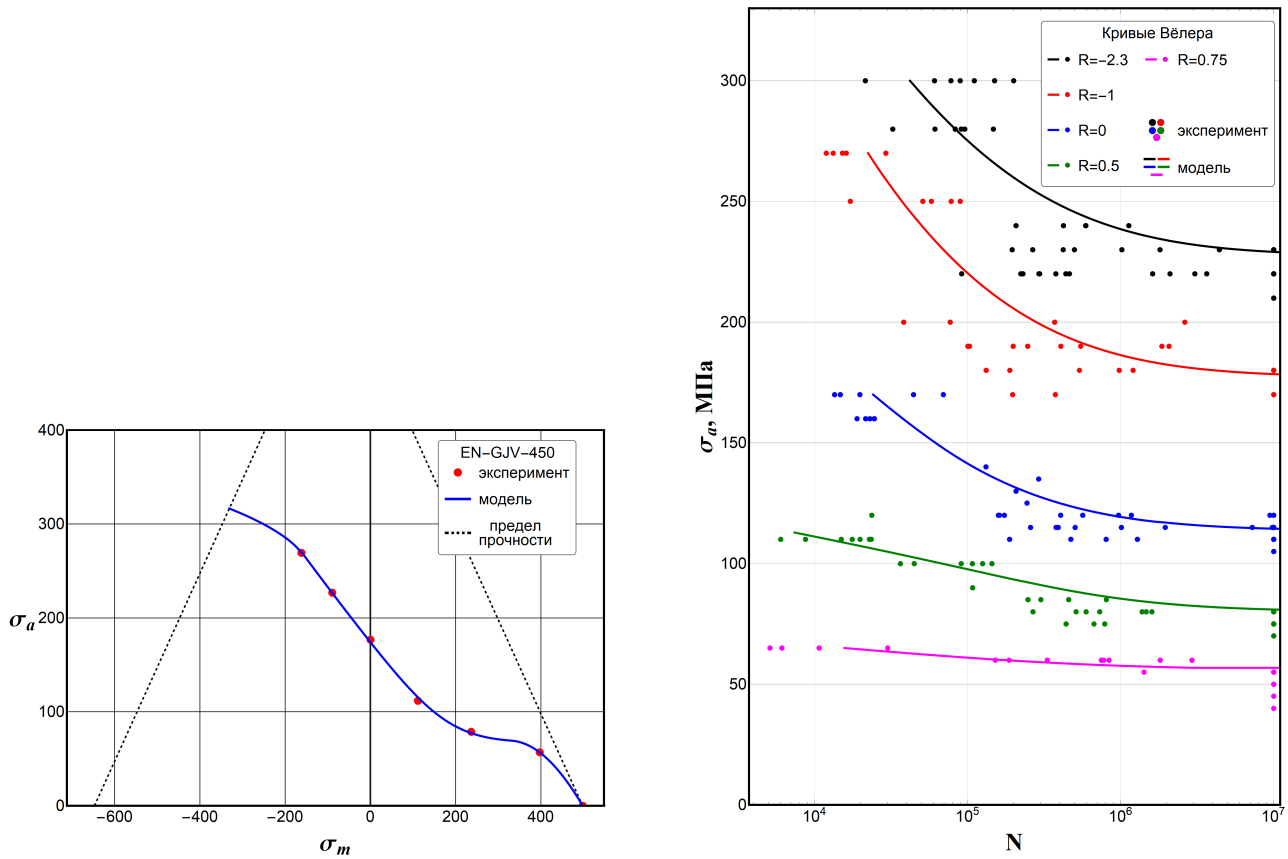
В рамках диссертации [157] были подробно изучены усталостные свойства чугуна EN-GJV-450. В частности, приведена экспериментальная диаграмма Хейга с большим числом точек, а также диаграммы Вёлера для пяти различных значений коэффициента асимметрии нагружения.

Функции отвечающие за диаграмму Хейга имели вид

$$r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) = 145\text{МПа}, \quad g_1(x) = \int_0^x \frac{1}{s^6+1} ds,$$
$$g(I_1) = 0.735 \left(I_1 - 150 \left(\frac{3}{\pi} g_1 \left(\frac{I_1 - 240}{150} \right) + 1 \right) \right).$$

Минимизируя невязку между экспериментальными данными и предсказаниями модели, был получен набор констант

$$\begin{aligned} &k_1 = 0,\ b_1 = 0\text{МПа},\ k_2 = 0.636,\ L_2 = 0.026,\ b_2 = 0.004, \\ &k_3 = 10^{-6.64},\ L_3 = 12.2,\ b_3 = 0.125,\ L_4 = 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$



а) б)

Рисунок 3.12 — Диаграмма Хейга (а) и кривые Вёлера (б) для одноосного нагружения чугуна EN-GJV-450 (экспериментальные данные и их описание моделью).

Для идентификации были использованы три из пяти диаграмм Вёлера: для $R = -2.3;\ 0;\ 0.75$. Сравнение модельных кривых с экспериментальными данными приведено на рис.3.12.

Предел прочности (L_4) и механизм сокращения предела выносливости (k_1, b_1) для модели этого материла были отключены. Данных по несинфазному многоосному нагружению для данного материала нет, поэтому константа L_5 не идентифицировалась.

3.4 Верификация модели

Верификация эволюционной модели производится на экспериментальных данных [17] AA2024-T351: трёх программах одноосного нагружения «Боинг», «TWIST» и «ЦАГИ», описанных в разделе 1.1.2 при значении $\sigma_m = 85$ МПа.

Переход от $\sigma_{\text{бр}}$ к напряжениям в концентраторе произведён по формуле (3.13) (процедура описана в разделе 3.3.1). Константы эволюционной модели определены по алгоритму, описанному в разделе 3.3.1. Для исследования оставшихся степеней свободы модели, кроме набора констант (3.15) (который дальше в этом разделе будет обозначен №1), были определены ещё 2 набора констант (№2 и №3), также дающие низкие значения невязки (3.14):

$$\begin{aligned} &k_1 = 0.72,\ b_1 = 418\text{МПа},\ k_2 = 2.93,\ L_2 = 3.33,\ b_2 = 0.075,\\ &k_3 = 10^{-6.23},\ L_3 = 5.58,\ b_3 = 1.03 \cdot 10^{-1},\ L_4 = 1.26 \end{aligned} \tag{3.18}$$

и

$$\begin{aligned} &k_1 = 0.53,\ b_1 = 384\text{МПа},\ k_2 = 2.12,\ L_2 = 2.75,\ b_2 = 0.099,\\ &k_3 = 10^{-6},\ L_3 = 5.44,\ b_3 = 1.03 \cdot 10^{-1},\ L_4 = 0.38. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Результаты приведены в табл. 3.3. Экспериментальные значения из первых четырёх колонок использованы для идентификации модели (вместе с остальными экспериментальными данными, перечисленными в разделе 3.3.1), экспериментальные значения из последних трёх колонок — для верификации.

Если $\sigma_{\text{ост}}$ в (3.13) определять по самому опасному полёту программ «Боинг», «TWIST» и «ЦАГИ», то предсказания модели плохо согласуются с экспериментом (после этих значений в скобках стоит буква «A», обозначающая тип полёта, рядом указана доля полётов такого типа среди всех полётов). По-видимому, доля таких полётов слишком мала для того, чтобы поддерживать высокий уровень остаточных напряжений $\sigma_{\text{ост}}$ на протяжении всей программы нагружения. Были рассмотрены варианты определения $\sigma_{\text{ост}}$ по максимальной нагрузке менее опасных и чаще встречающихся полётов (тип полёта, по которому было определено значение $\sigma_{\text{ост}}$ для расчёта, указан буквой в скобках, рядом приведена доля полётов такого типа). Модельные расчёты, где $\sigma_{\text{ост}}$ определена по полёту с частотой примерно 4%, показали хорошее совпадение с экспериментом для программ «Боинг» и «TWIST», но менее хорошее для программы «ЦАГИ». Значения времён жизни, после которых в скобках присутствует звёздочка «*», получены на программе «ЦАГИ», где наземный этап был сокращён в два раза (с округлением вверх)[26], а где указано «**» был использован только тип «I» наземного этапа (сокращённый в два раза).

Для сравнения приведены оценки «стандартным методом», состоящим из следующих этапов:

[26]На рисунках в [17;34] изображено меньше циклов на наземном этапе, чем указано в табл. 1.4, но насколько сокращён наземный этап явно не указано.

1. разбиение истории нагружения на отдельные циклы методом дождя;
2. сведение отдельных циклов к эквивалентным (по вносимой повреждённости) отнулевым циклам по формуле Одинга

$$\sigma_a^0 = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{\max}\left(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right)/4}, & \sigma_{\max} + \sigma_{\min} \geqslant 0 \\ \left(0.6\sigma_{\max} - 0.4\sigma_{\min}\right)/\sqrt{2}, & \sigma_{\max} + \sigma_{\min} < 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

3. определение повреждённости, вносимой каждым отдельным циклом, по диаграмме Вёлера из [17];
4. линейное суммирование значений повреждённости, вносимой каждым отдельным циклом.

При оценке «стандартным методом (локальная история)» сначала по формуле (3.13) была построена история нагружения в опасной точке концентратора, а для определения повреждённости использовалась линейная аппроксимация диаграммы Вёлера из [152], рис. 3.13. Аппроксимация проводилась для точек $R = -1$, а кривая для $R = 0$ получена по формуле Одинга.

Для определения эффекта перемешанности полётов разных типов в программе нагружения с помощью эволюционной модели определены повреждённости, вносимые полётом каждого типа (как если бы программа нагружения состояла бы только из таких полётов). Эти значения затем были линейно просуммированы в соответствии с частотой полётов. Значение $\sigma_{\text{ост}}$ определялось для полёта каждого типа индивидуально. Результаты приведены в строке «разделённые полёты» и показывают завышение прогнозируемого времени жизни, если не учитывать эффект порядка полётов в программе.

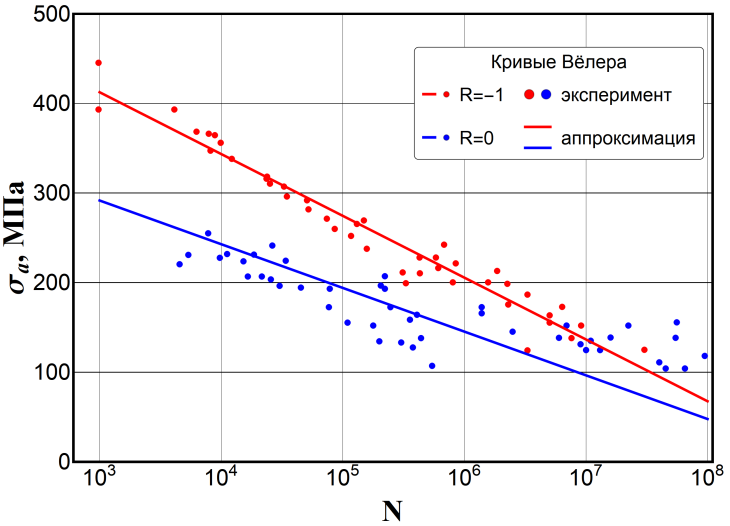


Рисунок 3.13 — Диаграмма Вёлера из [152] и её линейная аппроксимация.

Таблица 3.3 — Результаты верификации модели.

	$q_{10/50}$	$q_{10/250}$	N_{133}	Блочная	Боинг	TWIST	ЦАГИ
Эксперимент	2.24	5.84	310 783	70 990	348 800	33 430	53 840
Оценки из [17]	—	—	—	89 861	160 000	37 989	99 704
Стандартный метод	1.07	1.39	310 783	294 312	993 020	132 147	246 333
Стандартный метод (локальная история)	—	—	—	—	661 837	108 145	173 138
Модель, константы №1	1.84	6.04	352 373	71 100	1 075 997 (A, 0.02%) 482 961 (B, 0.26%) 321 725 (C, 4.3%)	87 226 (A, 0.225%) 35 292 (D, 4.5%)	29 217 (A, 0.025%) 24 864 (C, 0.125%) 19 833 (F, 3.4%) 21 434 (*F, 3.4%) 28 203 (**F, 3.4%)
Модель, константы №1 (разделённые полёты)	—	—	—	—	523 421	56 658	48 133
Модель, константы №2	1.84	6.04	351 263	74 691	300 498 (C, 4.3%)	39 966 (D, 4.5%)	29 720 (*F, 3.4%)
Модель, константы №3	1.84	6.04	310 134	67 879	211 323 (C, 4.3%)	32 959 (D, 4.5%)	24 062 (*F, 3.4%)

Характеристики полётов разных типов программы «Боинг» приведены в табл. 3.4: N есть прогноз времени жизни по эволюционной модели (здесь и далее в этом подразделе расчёты по эволюционной модели проведены с набором констант №1), N_{simple} — время жизни по эволюционной модели, когда из полёта взят только цикл максимального размаха, $N^{\text{станд}}$ и $N^{\text{станд}}_{\text{simple}}$ — соответствующие оценки «стандартным методом»[27], $\sigma_{\text{ост}}$ — остаточные напряжения в опасной точке, $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ и $\Delta\sigma$ — максимальное, минимальное и размах напряжения в опасной точке за полёт. В нижней строке табл. 3.4 указаны времена жизни на программе «Боинг» с учётом частот полётов разного типа и правила линейного суммирования повреждённости, вносимой каждым полётом.

Таблица 3.4 — Программа «Боинг»: характеристики полётов различных типов, значения напряжений даны в МПа.

Тип	Частота полёта	N	N_{simple}	$N^{\text{станд}}$	$N^{\text{станд}}_{\text{simple}}$	$\sigma_{\text{ост}}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\Delta\sigma$
A	1 (0.02%)	22144	57 838	16 932	47 446	-57	−137	357	493
B	13 (0.26%)	56132	119 868	43 267	112 654	-25	−99	337	436
C	215 (4.3%)	149618	443 363	170 426	428 884	-4	−69	294	364
D	1067 (21.3%)	429699	1 329 786	459 804	1 008 659	−0.7	−60	262	322
E	3704 (74.1%)	691604	3 878 070	1 025 155	1 855 808	−0.2	−54	239	293
		общее: 523 421	общее: 2 111 334	общее: 661 837	общее: 1 354 459				

В отличие от программы «Боинг», отдельные полёты в программах «TWIST» и «ЦАГИ» взяты квазислучайными, что приводит к вариативности повреждённости, накапливаемой полётом каждого типа. Для исследования этой вариативности было проведено по 100 реализаций полёта каждого типа и проанализирован разброс оценки времени жизни по эволюционной модели. При оценке интервала, в которое время жизни попадает с вероятностью 0.95, считалось, что время жизни имеет лог-логистическое распределение (такое распределение показало хорошее соответствие для большинства полётов по критериям согласия: Колмогорова–Смирнова, Пирсона, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Крамера–фон Мизеса и Кёйпера). Для большинства типов полётов разброс составляет около 10%, максимальный разброс составил 18%.

[27] Здесь и до конца этого раздела при оценке «стандартным методом» рассматривалась история нагружения в опасной точке концентратора, а для определения повреждённости использовалась аппроксимация диаграммы Вёлера из [152], рис. 3.13.

Характеристики полётов различного типа программы «TWIST» приведены в табл. 3.5, а программы «ЦАГИ» — в табл. 3.6.

Эксперимент показывает, что программа «TWIST» опаснее программы «ЦАГИ», то же показывает и оценка «стандартным методом» (но сильно промахивается по абсолютным значениям). Эволюционная модель даёт обратный результат. Программа «TWIST» имеет циклы большей амплитуды на полётном этапе, что видно при сравнении спектров программ на рис. 1.9. Программа «ЦАГИ», в свою очередь, имеет больше циклов на наземном этапе. Из-за приспособляемости к нагружению (вследствие движения поверхности выносливости в ходе программы нагружения) эволюционная модель слабее чувствует вклад циклов, амплитуды которых умещаются внутри поверхности выносливости на достаточно длинных воздушных этапах. Другими словами, в рамках достаточно длинного воздушного этапа материал (по эволюционной модели) успевает приспособиться к нагружению, и вклад циклов в ходе этапа сильно снижается. Кроме того, модель сильнее чувствует вклад наземного этапа в повреждённость, длина которого не была чётко обозначена при описании экспериментов. При идентификации модели использовалась «Блочная» программа нагружения, не имеющая длинного воздушного этапа. Возможно, поведение модели можно исправить, выбрав меньший размер поверхности выносливости, это увеличило бы вклад циклов воздушного этапа «TWIST» в повреждённость. Также можно снизить эффект приспособляемости, замедлив движение поверхности выносливости.

Таблица 3.5 — Программа «TWIST»: характеристики полётов различных типов, значения напряжений даны в МПа.

Тип	Частота полёта	N_{mean}	Интервал N $p = 0.95$	N_{simple}	$N^{\text{станд}}$	$N^{\text{станд}}_{\text{simple}}$	$\sigma_{\text{ост}}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\Delta\sigma$
A	9 (0.225%)	9727	(8778, 10 776)	24 069	8415	18 147	−102	−201	371	572
B	24 (0.6%)	17555	(15 184, 20 412)	36 494	11 879	28 521	−75	−174	363	538
C	60 (1.5%)	24780	(21 477, 28 617)	55 292	15 395	44 787	−51	−150	354	503
D	181 (4.5%)	34067	(28 654, 40 336)	85 813	23 703	75 380	−30	−129	341	469
E	420 (10.5%)	41494	(37 419, 44 202)	144 042	49 781	136 219	−14	−113	323	435
F	1092 (27.3%)	61955	(57 681, 64 479)	277 253	144 687	273 868	−4.4	−103	298	401
G	2214 (55.35%)	67450	(67 450, 67 450)	632 132	347 029	577 975	−1	−100	268	368
		общее: 56 658		общее: 274 295	общее: 108 145	общее: 250 321				

Таблица 3.6 — Программа «ЦАГИ»: характеристики полётов различных типов, значения напряжений даны в МПа.

Тип	Частота полёта	N_{mean}	Интервал N $p = 0.95$	N_{simple}	$N^{\text{станд}}$	$N^{\text{станд}}_{\text{simple}}$	$\sigma_{\text{ост}}$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\Delta\sigma$
A	1 (0.025%)	8086	(7286, 9012)	18 067	10 431	15 234	−62	−254	358	612
B	1 (0.025%)	10 805	(9563, 12 280)	21 766	12 829	18 111	−54	−243	355	598
C	5 (0.125%)	15 567	(13 412, 18 096)	31 084	18 906	25 795	−41	−223	348	571
D	14 (0.35%)	19 386	(17 000, 22 193)	44 350	26 597	37 017	−29	−205	340	545
E	43 (1.1%)	22 056	(18 472, 24 434)	63 058	38 122	54 797	−19	−189	330	519
F	136 (3.4%)	24 864	(22 526, 27 469)	90 908	56 029	84 409	−11	−174	318	492
G	380 (9.5%)	30 201	(27 523, 33 192)	135 450	88 211	132 689	−6	−162	304	466
H	940 (23.5%)	38 624	(35 361, 41 925)	212 865	143 258	214 795	−2.7	−152	288	440
I	1540 (38.5%)	54 341	(51 624, 57 148)	356 887	267 922	366 761	−1	−144	269	413
J	940 (23.5%)	102 577	(102 577, 102 577)	645 522	478 212	620 359	−0.4	−137	250	387
		общее: 48 134		общее: 253 994	общее: 173 138	общее: 249 328				

3.5 Особенности расчёта программ нагружения с периодическими перегрузками

В табл. 3.3 можно увидеть, что модельные значения $q_{10/50} = 1.84$ и $q_{10/250} = 6.04$ одинаковы для всех трёх наборов констант эволюционной модели, как будто эти значения жёстко связаны. Это объясняется следующим рассуждением, применимым за рамками эволюционной модели накопления повреждённости, исследуемой в данной работе. Примем следующие гипотезы:

Гипотеза 1: *для моделирования усталостного разрушения будем использовать скалярную меру повреждённости D.*

Гипотеза 2: *в рамках используемой модели усталостного разрушения скорость накопления повреждённости не зависит от значения уже накопленной повреждённости D.*

Гипотеза 3: *модель имеет ограниченную память*[28]*, т.е скорость накопления повреждённости в некоторый момент нагружения зависит от ограниченного предшествующего участка нагружения.*

Рассмотрим программу нагружения, состоящую из одного «стартового» цикла, за которым следуют n одинаковых «повторных» циклов, отличных от первого (рис. 3.14). Будем считать, что за одно выполнение такой программы накапливается значение скалярной меры повреждённости $D(n)$, время жизни на такой программе будет равно $1/D(n)$. Пусть спустя $m < n$ первых повторных циклов влиянием стартового цикла на накопление повреждённости можно пренебречь, и за каждый последующий повторный цикл накапливается одинаковое значение повреждённости Δd, тогда за одно выполнение программы накапливается повреждённость

$$D(n) = d + (n - m)\Delta d,$$

где d есть величина повреждённости, накапливающейся за стартовый цикл и m первых повторных циклов.

Рассмотрим три разных значения n: $n_2 > n_1 > n_0 > m$, и введём величины $q_{n_0/n_1} = \dfrac{D(n_1)}{D(n_0)}$ (отношение времён жизни на программе с $n = n_0$ к времени

[28] Или достаточно быстро затухающую память, например, экспоненциально.

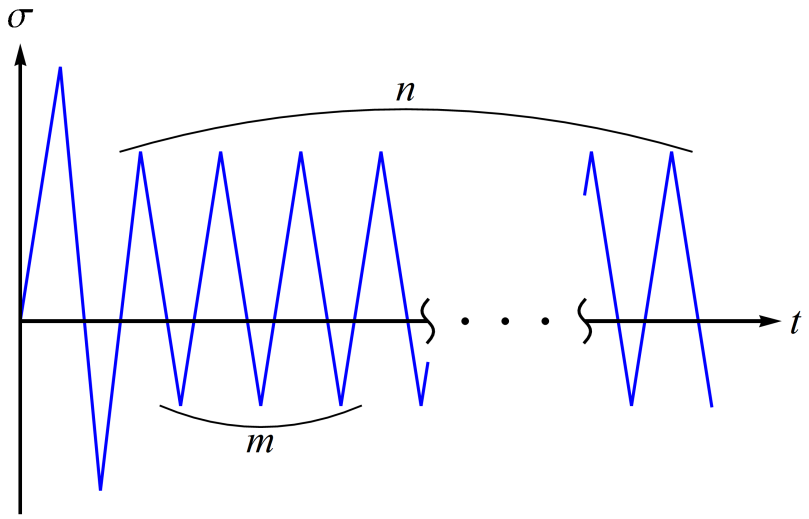


Рисунок 3.14 — Программа нагружения, состоящая из стартового цикла и последующих n повторных циклов, где за первые m повторных циклов накопление повреждённости стабилизируется.

жизни на программе с $n = n_1$ и $q_{n_0/n_2} = \dfrac{D(n_2)}{D(n_0)}$. Тогда

$$\begin{aligned} D(n_0) &= d + (n_0 - m)\Delta d, \\ D(n_1) &= d + (n_1 - m)\Delta d = D(n_0) + (n_1 - n_0)\Delta d, \\ D(n_2) &= d + (n_2 - m)\Delta d = D(n_0) + (n_2 - n_0)\Delta d, \end{aligned}$$

и величины q примут вид

$$q_{n_0/n_1} = 1 + \frac{(n_1 - n_0)\Delta d}{D(n_0)}, \quad q_{n_0/n_2} = 1 + \frac{(n_2 - n_0)\Delta d}{D(n_0)}.$$

Выразив из первого выражения отношение $\dfrac{\Delta d}{D(n_0)} = \dfrac{q_{n_0/n_1} - 1}{n_1 - n_0}$ и подставив во второе, получим соотношение (3.21), жёстко связывающее значения q_{n_0/n_1} и q_{n_0/n_2}

$$q_{n_0/n_2} = \frac{n_2 - n_0}{n_1 - n_0} q_{n_0/n_1} - \frac{n_2 - n_1}{n_1 - n_0}. \tag{3.21}$$

В экспериментах [31], данные которых были использованы при идентификации эволюционной модели, рассматривались $n_0 = 10$, $n_1 = 50$, $n_2 = 250$, при которых (3.21) примет вид

$$q_{10/250} = 6q_{10/50} - 5.$$

Этому соотношению удовлетворяют предсказанные эволюционной моделью значения $q_{10/50} = 1.84$ и $q_{10/250} = 6.04$, а также значения $q_{10/50} = 1.065$ и $q_{10/250} = 1.39$, полученные при оценке «стандартным методом» (табл. 3.3).

На основе приведённого рассуждения можно сделать вывод: если экспериментальные значения q_{n_0/n_1} и q_{n_0/n_2} плохо удовлетворяют (3.21), то либо не выполняется условие $n_0 > m$, либо для данного материала или на подобных историях нагружения нельзя использовать метод оценки накопления повреждённости, удовлетворяющий гипотезам 1–3. В частности, этим гипотезам удовлетворяет эволюционная модель, рассматриваемая в данной работе, и «стандартный метод», а также множество других моделей и методов для оценки усталостной прочности. В рамках данной работы, с учётом разброса результатов экспериментов на усталость, экспериментальные значения $q_{10/50} = 2.24$ и $q_{10/250} = 5.84$ считаются удовлетворительными.

3.6 Учёт частоты и выдержек

3.6.1 Обобщение модели

Для учёта частоты нагружения и наличия выдержек в истории нагружения параметр повреждённости был разделён на склерономную (независящую от временных эффектов) и реономную (связанную с временными эффектами) части: $D = D_{scler} + D_{dwell}$. Эволюционная модель (3.1) была дополнена эволюционным соотношением для реономной части параметра повреждённости и эволюционным соотношением для параметра r_{dwell} в выражении для β:

$$
\begin{aligned}
&\beta = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + g(I_1) - r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) + w(\Delta\sigma_{\max}) + r_{dwell} \right) / \sigma_{-1}, \\
&\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \|\dot{\mathbf{s}}\| h(\beta) H(\beta) f(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|}, \qquad H(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < 0 \\ 1, & \beta \geqslant 0 \end{cases} \\
&\dot{D} = \dot{D}_{scler} + \dot{D}_{dwell}, \\
&\dot{D}_{scler} = \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_{-1}} p(\beta) H(\beta) f(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})) \frac{1}{(1 - F(\boldsymbol{\sigma}))^{L_4}}, \\
&\dot{D}_{dwell} = k_{dwell} p(\beta) H(\beta) \frac{1}{(1 - F(\boldsymbol{\sigma}))^{L_{dwell}}} \left(1 - \frac{D_{dwell}}{D_{dwell}^{\max}} \right), \\
&\dot{D}_{dwell}^{\max} = \frac{k_{\max}}{(1 - F(\boldsymbol{\sigma}))^{L_{dwell}}} \dot{D}_{scler}, \\
&\dot{r}_{dwell} = \frac{r_{\max} - r_{dwell}}{t_r} - k_r \left\langle - (\sigma_{-1}\beta + r_{\max} - r_{dwell}) \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Здесь новые, по сравнению с (3.1), величины: D_{scler} — склерономная часть повреждённости, D_{dwell} — реономная часть повреждённости, D_{dwell}^{max} — максимально возможное значение реономной повреждённости, r_{dwell} — параметр, отвечающий за снижение предела выносливости при выдержках, L_{dwell}, k_{dwell}, $k_{\max}$, $r_{\max}$, t_r, k_r — константы модели, $\langle x \rangle = \{0,\, x < 0;\ x,\, x \geqslant 0\}$ — скобки Маколея.

Проанализируем уравнения (3.22). Эволюционное соотношении для $\boldsymbol{\alpha}$ склерономно, т.е. наличие выдержек и частота не влияют на движение центра поверхности выносливости. Повреждённость D состоит из склерономной D_{scler} и реономной D_{dwell} частей. Склерономность обеспечивается дифференциальной линейностью эволюционного уравнения для D_{dwell}. Эволюционное уравнение реономной части повреждённости D_{dwell} вдохновлено моделью вязкоупругости Кельвина–Фойгта. В случае выдержки при постоянном напряжении, D_{dwell} будет (с постепенно понижающейся скоростью) увеличиваться до значения $D_{dwell}^{\max}$. Скорость накопления D_{dwell} увеличивается при высоких значениях напряжения, моделируя экспериментальное наблюдение, что эффект выдержек более выражен при высоких напряжениях. Величина эффекта регулируется параметром L_{dwell}. Значение $D_{dwell}^{\max}$ меняется в ходе нагружения: накапливаясь пропорционально склерономной повреждённости, скорость накопления $D_{dwell}^{\max}$ увеличивается при высоких значениях напряжения. Таким образом, накопление склерономной повреждённости определяет возможность накопления реономной повреждённости. Константа k_{dwell} задаёт скорость накопления D_{dwell} при выдержках, $k_{\max}$ определяет максимально возможный прирост D_{dwell} (например, за один цикл нагрузки). Чтобы описать эффект зависимости предела выносливости от частоты нагружения и наличия выдержек, в выражение для β введено слагаемое r_{dwell}. Предел выносливости постепенно снижается, пока напряжённое состояние находится вне поверхности выносливости, и восстанавливается, пока оно внутри. Константы $r_{\max}$ и t_r отвечают за максимальное снижение предела выносливости и скорость его снижения, соответственно, а параметр k_r — за скорость восстановления предела выносливости до его исходного значения, пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности выносливости.

3.6.2 Идентификация констант модели

Параметры модели (3.22) L_{dwell}, k_{dwell}, $k_{\max}$, $r_{\max}$, t_r, k_r, отвечающие за временные эффекты, следует определять из сравнения результатов экспериментов без выдержек и экспериментов с выдержками, а также усталостных опытов на регулярное нагружение при различной частоте.

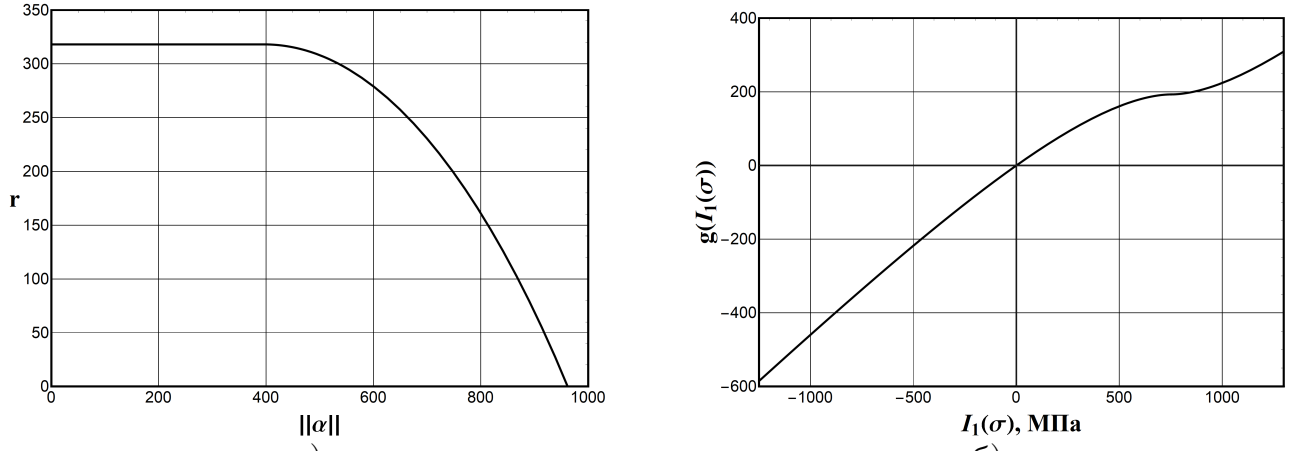
В качестве примера идентифицируем материальные функции и константы модели (3.22) для двухфазного $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ титанового сплава Ti-6Al-4V (аналог ВТ6).

Как и ранее, используется критерий прочности Шлейхера (3.4). Параметры (3.3) выражаются через экспериментальные значения пределов прочности [152] на растяжение $\sigma_{\text{tu}} = 1180$МПа, сжатие $\sigma_{\text{cu}} = 1240$МПа, чистый сдвиг $\tau_{\text{u}} = 680$МПа.

Материальные константы функций $g(I_1)$ и $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ (3.9) в выражении для $\boldsymbol{\beta}$ (3.22) идентифицированы по экспериментальным значениям пределов выносливости при различных R [152]:

$$L_g = 0.867,\ \hat{k}_g = 0.527,\ k_g = 0.527,\ c_g = 516\text{МПа},\ I_0 = 752\text{МПа},\ c_r = 401\text{МПа}. \tag{3.23}$$

Предел выносливости на сдвиг при симметричном циклическом нагружении был принят $\tau_{-1} = 0.5\sigma_{-1}$ [154]. Материальные функции $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ и $g(I_1)$ с параметрами (3.23) изображены на рис.3.15. Модельная диаграммы Хейга для одноосного растяжения вместе с экспериментальными точками изображена на рис.3.16.



а) б)

Рисунок 3.15 — Идентифицированные материальные функции $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ (а) и $g(I_1)$ (б) для сплава Ti-6Al-4V. По осям отложены МПа.

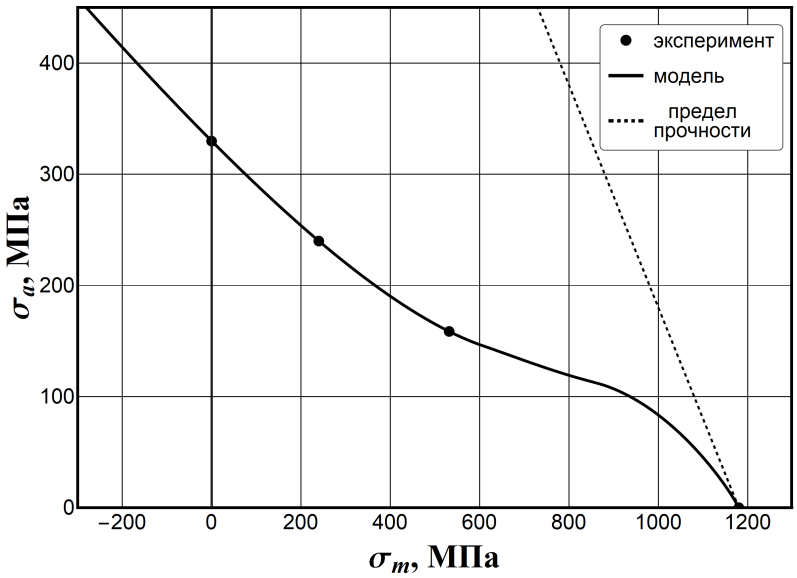


Рисунок 3.16 — Диаграмма Хейга для сплава Ti-6Al-4V, экспериментальные данные взяты из [152].

Константы k_1, b_1, k_2, L_2, b_2, k_3, L_3, b_3 для материальных функций (3.11) и константа L_4 определены по трём экспериментальным диаграммам Вёлера для одноосного растяжения с частотой 30Гц при коэффициентах асимметрии нагружения $R = -1,\ 0,\ 0.54$ [152]. Для этого была записана невязка X которая была минимизирована симплекс–методом (Нелдера–Мида).

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\ln(N_i)}{\ln(N_i^{\exp})}\right)^2,$$

где N_i^{exp} есть экспериментальное значение числа циклов до разрушения на i-том нагружении, N_i — предсказание модели на том же нагружении, n — общее число экспериментальных точек, использованных в невязке. Сначала константы были определены для модели с отключенными временными эффектами (т.е модели (3.1)), а затем подкорректированы в рамках полноценной модели (3.22) с учётом экспериментальных данных с выдержками и на различных частотах, приведённых ниже. Здесь приведены окончательные значения констант:

$$\begin{aligned} &k_1 = 0.176,\ b_1 = 3033\text{МПа},\ k_2 = 0.077,\ L_2 = 6.99,\ b_2 = 0.0376 \\ &k_3 = 10^{-5.9},\ L_3 = 1.28,\ b_3 = 0.331,\ L_4 = 1.74. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Модельные диаграммы Вёлера приведены на рис.3.17.

Далее определяются константы L_{dwell}, k_{dwell}, $k_{\max}$, $r_{\max}$, t_r, t_r, k_r (3.22), отвечающие за временные эффекты. В ПНИПУ были проведены усталостные испытания цилиндрических образцов из $\alpha - \beta$ титанового сплава на одноосное растяжение. Рассматривалось циклическое отнулевое нагружение при трёх

уровнях максимального напряжения: 751, 798, 846 МПа. Было проведено две серии испытаний: треугольные циклы при частоте 1 Гц (количества циклов до разрушения 28414, 8894, 7111, соответственно) и трапецеидальные с выдержкой 120 с (количества циклов до разрушения 1189, 308, 105, соответственно). Этот титановый сплав имеет предел текучести ниже, чем рассматриваемый в этой секции Ti-6Al-4V, поэтому для демонстрационных соображений при определении материальных констант уровни максимальных напряжений были повышены до 780, 855, 930 МПа. Таким образом, для определения констант использованы следующие экспериментальные данные:

1. испытаний плоских образцов из сплава Ti-6Al-4V на одноосное растяжение по синусоидальной программе с частотой 30Гц при $R = 0$, рис.3.17
2. трёх испытаний на одноосное растяжение с $R = 0$ по программе с треугольными циклами и частотой 1 Гц
3. трёх испытаний (при тех же максимальных напряжениях что и в пункте выше) по программе с трапецеидальными циклами с выдержкой 120 с

Как и ранее, невязка была записана в форме

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\ln(N_i)}{\ln(N_i^{\exp})}\right)^2$$

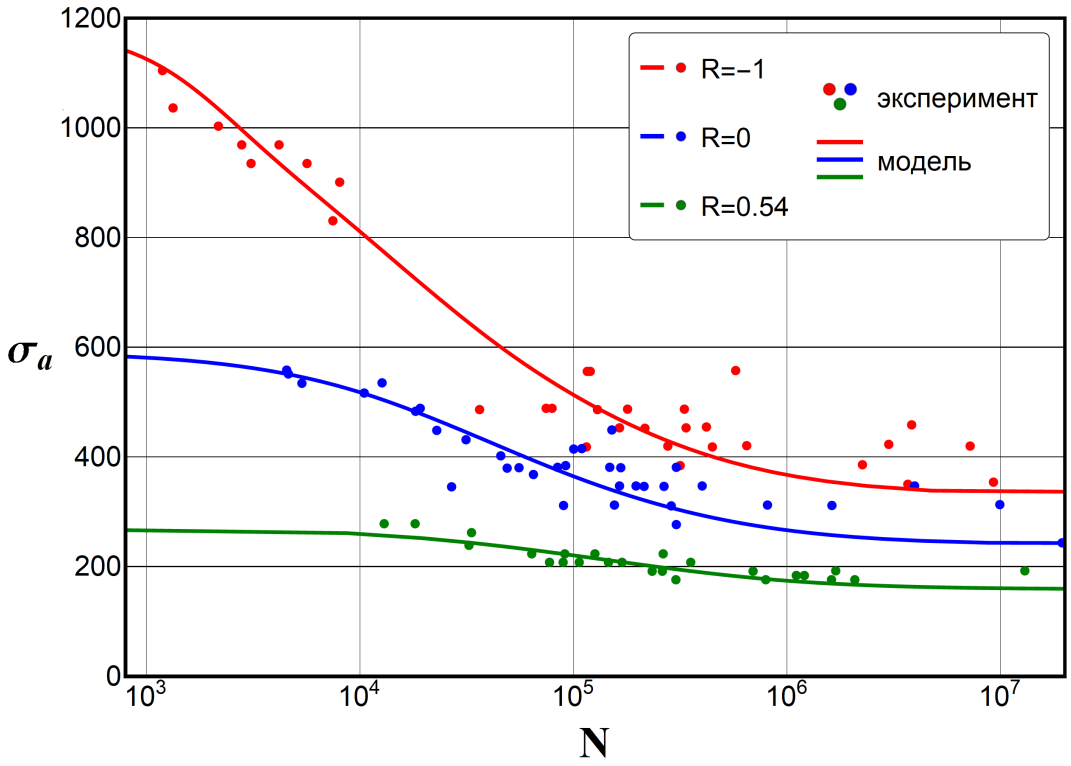


Рисунок 3.17 — Диаграмма Вёлера для сплава Ti-6Al-4V, экспериментальные данные взяты из [152]. Одноосное нагружение, частота 30Гц.

и минимизирована симплекс–методом. Полученные значения констант:

$$L_{dwell} = 4.35,\ k_{dwell} = 0.51\text{с}^{-1},\ k_{\max} = 7.46,\ r_{\max} = 33\text{МПа},\ t_r = 0.24\text{с},\ k_r = 1\text{с}^{-1}. \tag{3.25}$$

Прогнозы модели и экспериментальные данные изображены на рис.3.18.

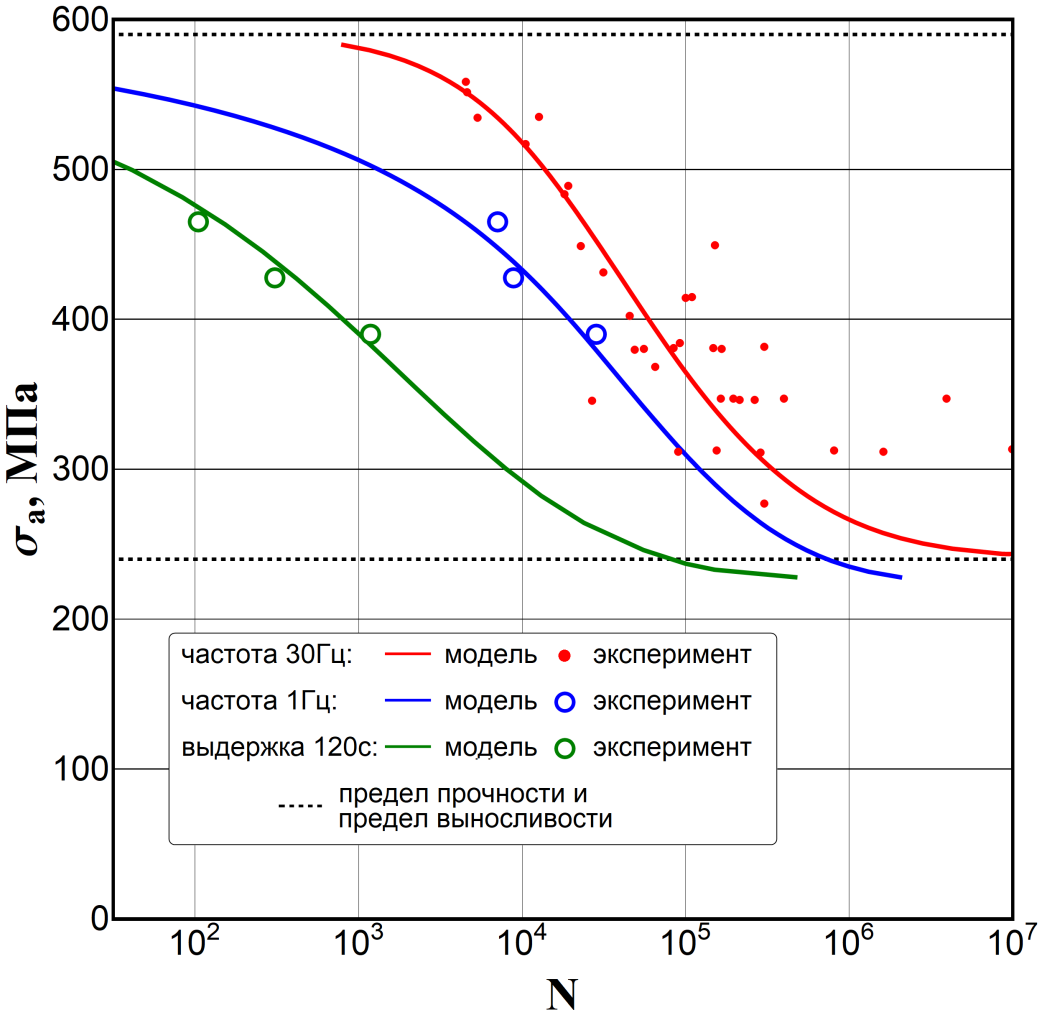
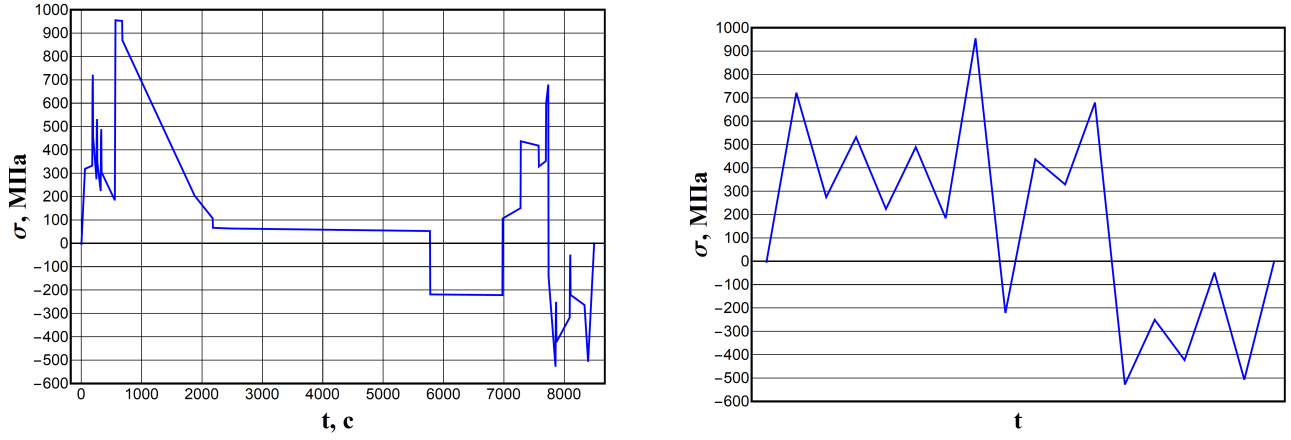


Рисунок 3.18 — Диаграмма Вёлера $R = 0$ для одноосных испытаний при различных частотах и с наличием выдержек, экспериментальные данные взяты из [152](30Гц, Ti-6Al-4V) и выполнены в ПНИПУ(1Гц и испытание с выдержками, ВТ6).

3.6.3 Оценка усталостной прочности материала на полётном цикле с учётом выдержек

Для демонстрации способности модели (3.22) предсказывать время жизни детали с учётом выдержек было рассмотрено изменение главной компоненты напряжения в опасной точке форсунки газотурбинного двигателя в ходе полётного цикла. Результаты сравнены с прогнозом модели (3.1), т.е. без учёта временных эффектов. Необходимо заметить, что реальная деталь не изготовляется из титанового сплава, в детали, испытывающей такие длительные выдержки, не был бы использован настолько чувствительный к dwell эффекту материал как Ti-6Al-4V. В АО «ОДК–Авиадвигатель» с помощью конечноэлементного расчёта рассчитана эволюция поля напряжений в детали в течение полётного цикла и определена опасная точка. История изменения напряжений в течение полётного цикла в опасной точке форсунки приведена на рис.3.19(а), нагружение считается одноосным. На рис.3.19(б) приведена схематизация этой истории по ГОСТ 25.101-83, согласно которому в расчётах на усталость принимается во внимание лишь выборка минимумов и максимумов нагрузки, а выдержки не учитываются.

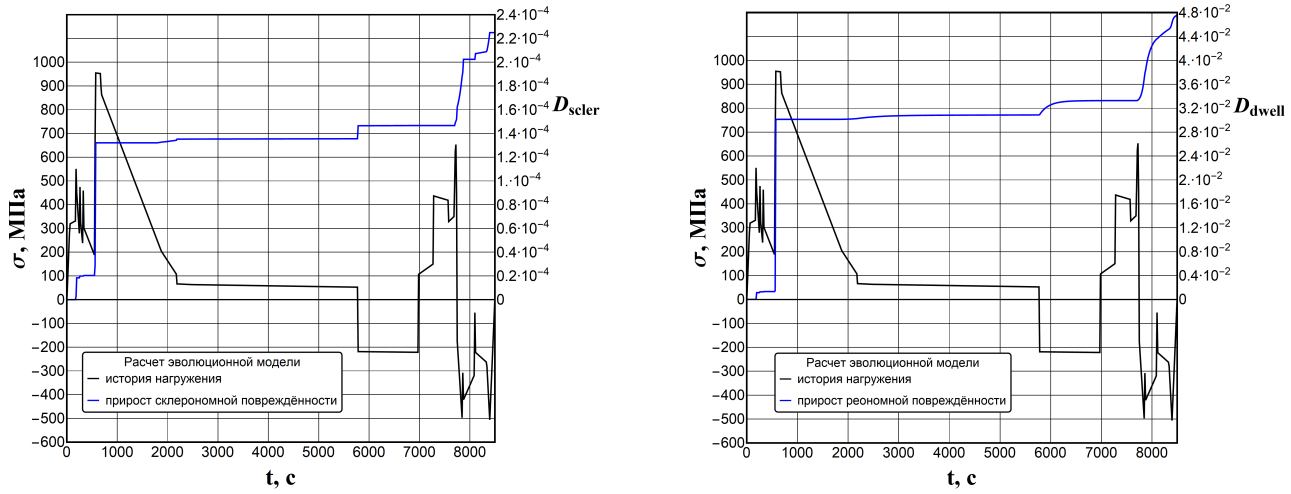


а) б)

Рисунок 3.19 — История изменения напряжений в течение полётного цикла (а) и схематизация этой истории по ГОСТ 25.101-83 (б).

Модель (3.22) с материальными функциями и константами, идентифицированным в секции 3.6.2 по экспериментальным данным для сплава Ti-6Al-4V, использована для демонстрационного расчёта усталостной прочности детали газотурбинного двигателя на полётном цикле. Оценка числа полётных циклов до

разрушения для истории рис.3.19(а) составила $N = 22$, тогда как при отсутствии учета накопления реономной составляющей повреждённости $N = 4445$, что соответствует расчету по схематизированной диаграмме методом суммирования поврежденности с использованием кривой усталости для частоты 30Гц. Накопление склерономной и реономной частей повреждённости во время полётного цикла приведено на рис.3.20. Подавляющую часть общей повреждённости составляет реономная часть, которая накапливается во время выдержек при максимальном напряжении в цикле.



а) б)

Рисунок 3.20 — Накопление повреждённости в течение полётного цикла по модели (3.22): склерономная (а) и реономная (б) части повреждённости.

3.7 Выводы по главе 3

В данной главе сформулирована эволюционная модель накопления усталостной повреждённости, основанная на идее поверхности выносливости в пространстве напряжений [75]. Накопленная повреждённость является функционалом истории изменения тензора напряжений в опасной точке детали. Модель применима для случая произвольной истории изменения тензора напряжений, т.е. для случаев нерегулярной истории циклического нагружения с учетом многоосности и непропорциональности. Модель не связанная, т.е. механические свойства материала не изменяются в ходе накопления повреждённости, это

позволяет использовать модель в режиме постпроцессинга, т.е. после конечно-элементного расчёта, а значит, не налагает ограничений на модель материала, используемую в этом расчёте.

Произведено обобщение склерономной модели [6] для учёта реономных эффектов: зависимости времени жизни от частоты нагружения и наличия выдержек. Модель описывает снижение усталостной прочности и предела выносливости при понижении частоты нагружения и при наличии выдержек на высоком уровне напряжений.

Описан способ идентификации модели (т.е нахождение материальных параметров и функций) по экспериментальным данным. Модель способна описывать несколько экспериментальных диаграмм Вёлера (для различных значений параметра асимметрии нагружения R), экспериментальные диаграммы Хейга[29] для одноосного и сдвигового нагружений, эффект снижения усталостной прочности от наличия редких пиков нагружения, эффект зависимости времени жизни от несинфазности многоосного нагружения. Проведена идентификация модели без учёта временных эффектов для алюминиевого сплава AA2024-T4, чугуна EN-GJV-450 и жаропрочного никелевого сплава.

Для идентификации AA2024-T4 были использованы следующие экспериментальные данные: две диаграммы Вёлера при $R = -1; 0$, диаграмма Хейга для одноосного нагружения, данные по нерегулярному нагружению (регулярное нагружение с перегрузками и программа «Блочная», имитирующая полётный цикл), данные по несинфазному двухосному нагружению. Для EN-GJV-450 были использованы следующие экспериментальные данные: четыре диаграммы Вёлера при $R = -1; 0; 0.5; 0.75$, диаграмма Хейга для одноосного нагружения. Для жаропрочного сплава параметры модели идентифицированы независимо для двух температур 20 °C и 650 °C. В случае комнатной температуры использованы три диаграммы Вёлера при $R = -1; 0; 0.5$ и диаграмма Хейга для одноосного нагружения; в случае повышенной температуры использована одна диаграмма Вёлера при $R = -1$ и диаграмма Хейга для одноосного нагружения. Для температуры 20 °C были идентифицированы два различных набора параметров модели, одинаково хорошо описывающих экспериментальные данные, но отличающиеся чувствительностью к нерегулярности нагружения. Для предпочтения одного из них требуются эксперименты на нерегулярное нагружение.

[29] Любой формы.

Для AA2024-T4(T-351) проведена верификация модели на трёх программах нерегулярного нагружения имитирующих полётные циклы: «Боинг», «TWIST» и «ЦАГИ». Эксперименты проведены на образцах с концентратором, поэтому до применения усталостной модели был произведён переход от усилий приложенных к образцу к истории изменения тензора напряжений в вершине концентратора, при этом произведена оценка остаточных напряжений формирующихся в концентраторе. Результаты приведены в табл. 3.3.

Рассмотрена программа регулярного нагружения с периодическими перегрузами. Экспериментальные отношения времен жизни для различных периодов перегрузок позволяют судить о применимости рассматриваемой модели (и некоторого более широкого класса моделей) для описания конкретного материала при определённых частотах перегрузок.

Проведена идентификация модели для титанового сплава Ti-6Al-4V (аналог ВТ6) с учётом временных эффектов, для чего были использованы три экспериментальные диаграммы Вёлера с нагружением по синусоидальной программе с частотой 30Гц для $R = -1; 0; 0.54$, экспериментальные значения пределов выносливости для этих значений R, испытания на регулярное нагружение с частотой 1Гц треугольными циклами, $R = 0$ при трёх различных амплитудах нагружения (выполнены в ПНИПУ), а также три испытания на циклическое нагружение при различных амплитудах нагружения с выдержками 120с на максимальном уровне напряжений (выполнены в ПНИПУ).

Для демонстрации, модель применена для оценки времени жизни детали авиадвигателя из титанового сплава Ti-6Al-4V.

Основные результаты этой главы могут быть сформулированы следующим образом:

– Построена новая эволюционная модель накопления усталостных микроповреждений, способная описывать совокупность следующих испытаний: кривые усталости для нескольких значений параметра асимметрии цикла, диаграммы Хейга для одноосного нагружения и чистого сдвига, испытания на несинфазное двухосное нагружение и испытания на нерегулярное одноосное нагружение. По данным перечисленных испытаний определены константы модели. Проведена верификация модели для алюминиевого сплава AA2024-T4(T-351) на трёх программах нагружения («Боинг», «TWIST», «ЦАГИ»), имитирующих полётные циклы. Модель имеет преимущество перед инженерными методиками оценки

усталостной прочности, которые не способны одновременно описывать результаты таких испытаний.

– Сформулировано реономное обобщение эволюционной модели накопления усталостной повреждённости, способное описывать зависимости усталостной прочности и предела выносливости от частоты нагружения и выдержек в цикле. Моделью описано падение усталостной прочности титанового сплава при наличии выдержек, ранее не описанное теоретически.

Результаты, полученные в этой главе, опубликованы в статьях [5–8].

ГЛАВА 4. ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПОВЕРХНОСТНО ОБРАБОТАННЫХ ДЕТАЛЕЙ АВИАДВИГАТЕЛЯ

В этой главе решается поставленная во введении задача разработки метода оценки усталостной прочности деталей авиадвигателя на полётном цикле нагружения с учётом остаточных напряжений. Метод апробирован на двух задачах оценки усталостной прочности поверхностно обработанных диска компрессора высокого давления и проушины крепления авиадвигателя.

Произведён упругий конечноэлементный расчёт, определены опасные точки, и затем использована модель из главы 3 для определения усталостной долговечности. Исследовано влияние детальности профиля остаточных напряжений и детальности схематизации истории нагружения на оценку усталостной прочности детали.

4.1 Диск компрессора высокого давления

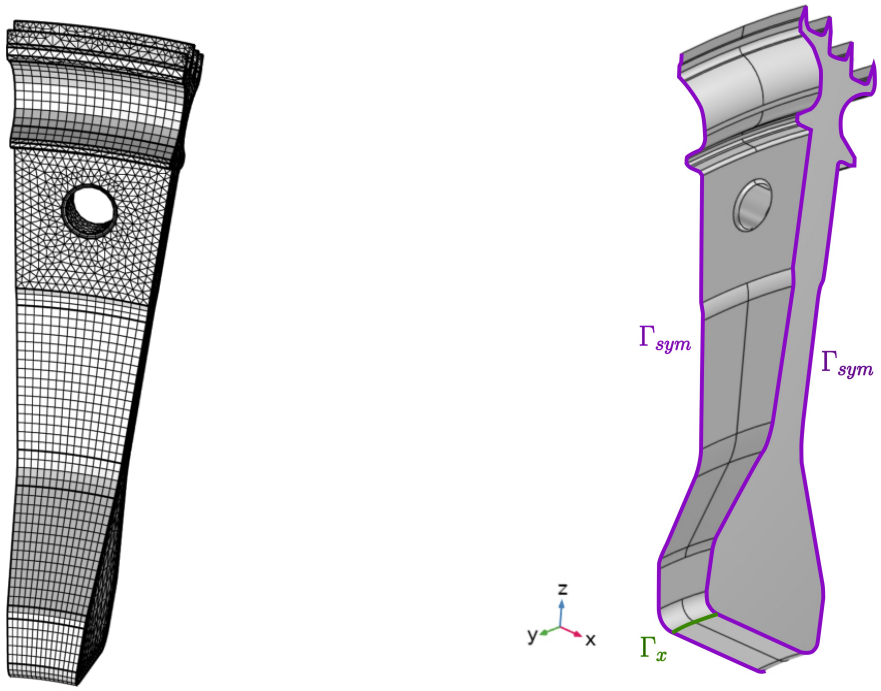
4.1.1 Расчет напряженно-деформированного состояния диска под действием температурных напряжений, центробежных сил и поверхностной технологической обработки

Моделирование поля напряжений в лабиринте компрессора высокого давления (КВД) из жаропрочного никелевого сплава в условиях термических и инерционных воздействий с учётом тонкого слоя предварительных остаточных деформаций проводилось в программном продукте *COMSOL Multiphysics*. Задача разделена на три подзадачи, каждая из которых решалась в упругой статической постановке:

1. Связанная задача деформирования оболочечных и твердотельных элементов при внесении предварительных мембранных деформаций в оболочечные элементы

2. Термоупругая задача сопротивления твердотельных элементов неоднородной термической нагрузке
3. Задача инерционного воздействия при равномерном вращении диска КВД с учётом температурных изменений механических констант

Расчётная область аппроксимируется квадратичными лагранжевыми конечными элементами гексагонального и тетрагонального типов со средним размером ребра 2 мм, как показано на рис.4.1(а). В качестве оболочечных элементов для первой задачи используются квадратичные MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) оболочечные элементы с тем же средним размером ребра, идеально контактирующие с объёмными элементами по мнимой поверхности, отстоящей на половину толщины элемента $d/2 = 25$ мкм от срединной. Задачи решаются в циклически симметричной постановке с границами, показанными на рис.4.1(б). Физико-механические характеристики материала приведены в табл.4.1.



а) б)

Рисунок 4.1 — Конечноэлементое разбиение расчётной области (а) и условия закрепления (б).

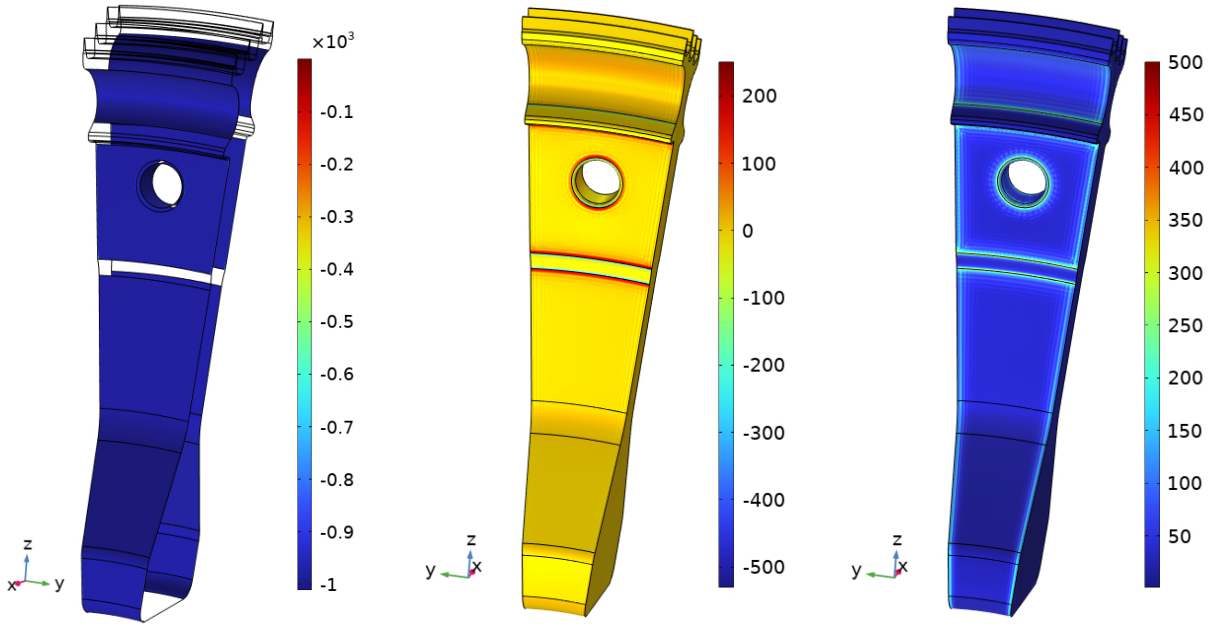
В подзадаче 1 в оболочечные элементы заносятся предварительные мембранные деформации величиной $\varepsilon_0 = 0.0036$ в двух направлениях локальной системы координат элементов, обеспечивающие известные из эксперимента сжимающие напряжения в оболочечных элементах (см. рис.4.2, а). Напряжения в объёмных элементах оказываются незначительными рис.4.2, б,в. На этих и

Таблица 4.1 — Упругие постоянные и коэффициент линейного температурного расширения жаропрочного никелевого сплава.

Обозначение	Размерность	20 °C	550 °C	650 °C	750 °C
E	ГПа	203.87	173.29	161.06	150.87
α	1/K	$12.4{\cdot}10^{-6}$	$13.3{\cdot}10^{-6}$	$13.55{\cdot}10^{-6}$	$13.95{\cdot}10^{-6}$
ν	–	0.3			

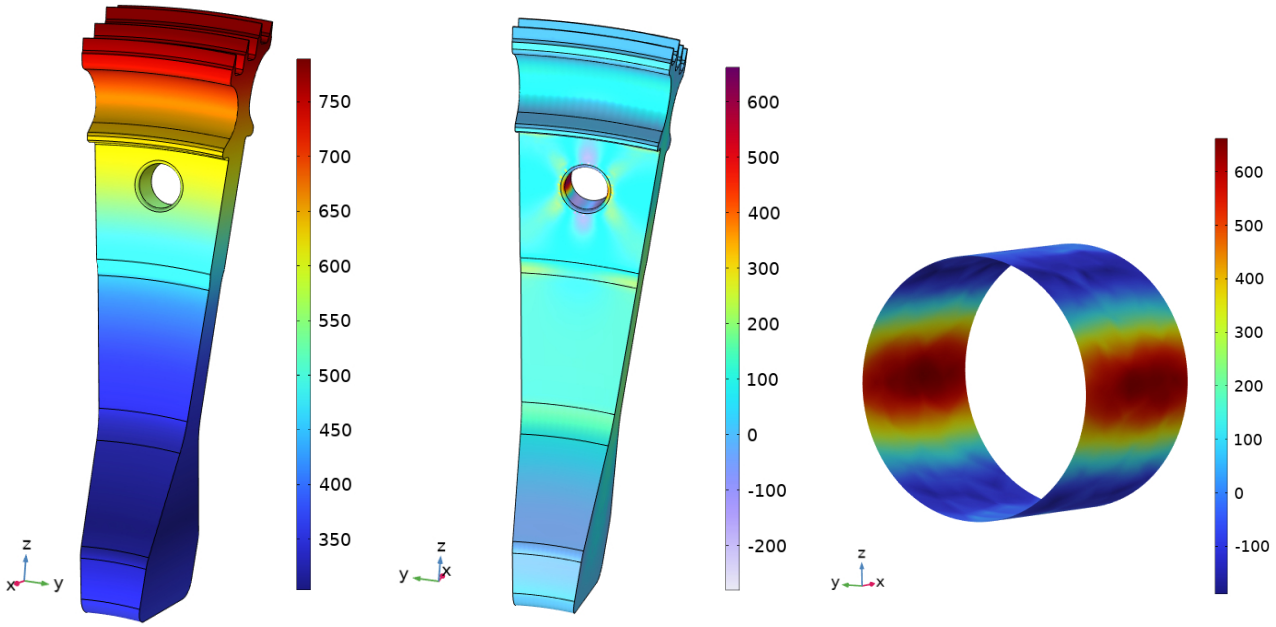
последующих рисунках в этом разделе используется глобальная цилиндрическая система координат, связанная с диском КВД, радиальное направление есть направление действия центробежной силы, окружное направление — вдоль окружности диска.

В подзадаче 2 в качестве предварительных вносятся температурные деформации $\varepsilon_t = \alpha(T)(T(r)-T_0)$, (где r — радиальная координата, т.е. координата в направлении центробежной силы), в каждом из трёх направлений локальной системы координат объёмных элементов. Поле температур T приведено на рис.4.3, а. Коэффициент объёмного расширения α и модуль упругости E полагались зависящими от температуры. Полученные поля напряжений пред-



а) б) в)

Рисунок 4.2 — Поля напряжений подзадачи 1: тангенциальная компонента в оболочечных элементах (а), в радиальном направлении в объёмных элементах (б), напряжения Мизеса в объёмных элементах (в).



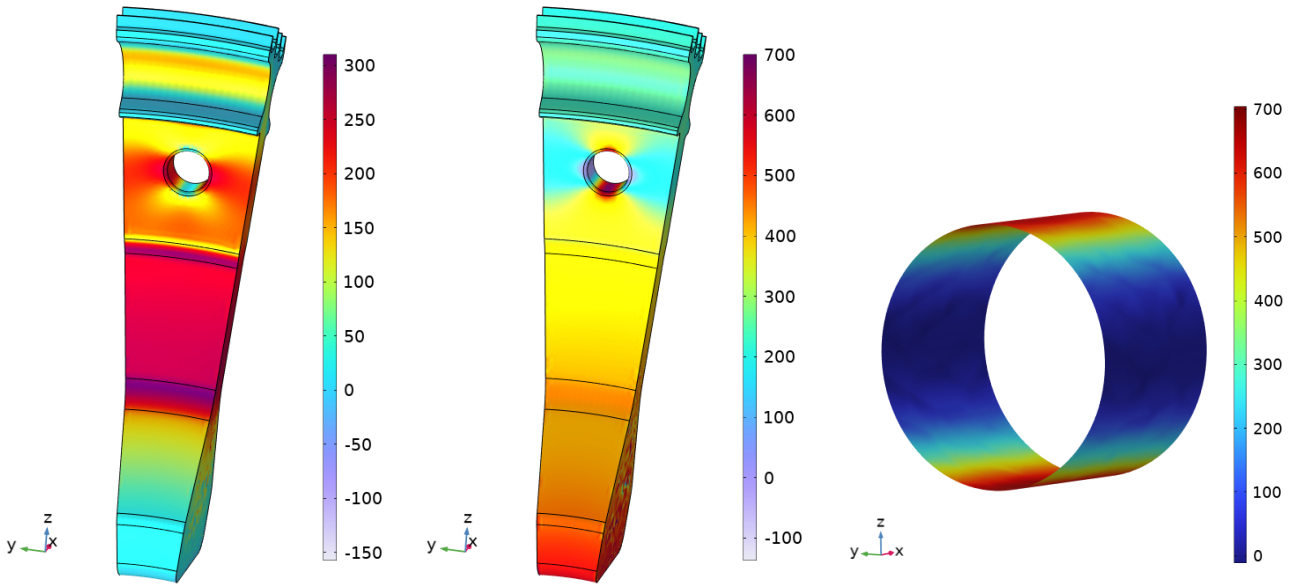
а) б) в)

Рисунок 4.3 — Поля подзадачи 2: температура (а), компонента напряжения в радиальном направлении (б), компонента напряжения в радиальном направлении (диска) вблизи отверстия (в).

ставлены на рис.4.3, б,в. Наиболее опасные точки находятся на поверхности отверстия с положительными напряжениями 650 МПа в радиальном направлении глобальной системы координат.

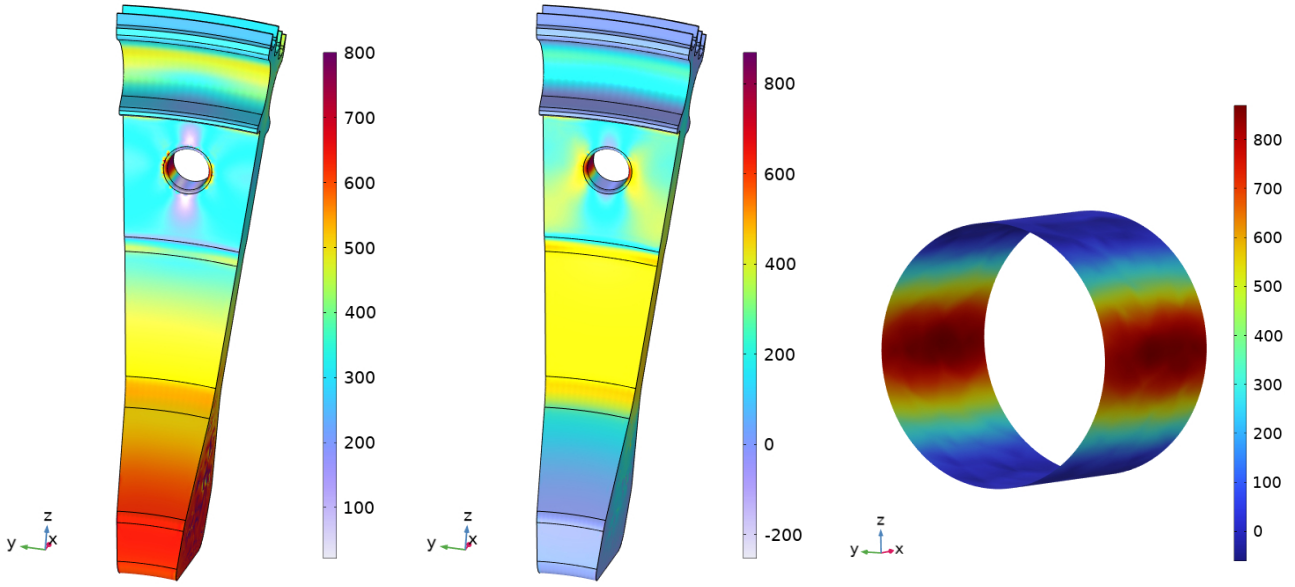
В подзадаче 3 в объём детали вносятся инерционные силы $F_\Omega = -\rho\Omega^2 r$ при круговой частоте $\Omega = 2\pi \cdot 15612$ 1/мин. Здесь также учитывается зависимость модуля упругости материала E (таб.4.1) от неоднородно распределённой температуры. Поля напряжений изображены на рис.4.4. Наиболее опасные точки расположены в зоне отверстия в окружном направлении с величиной 680 МПа. Результаты решения подзадач 2 и 3 были просуммированы, что привело к полям напряжений рис.4.5.

Как видно из рис.4.5, критерий текучести Мизеса не достигается ни в одной точке области (предел текучести материала превосходит 1000 МПа при любой температуре в рассматриваемом диапазоне). Наиболее опасные точки на поверхности отверстия имеют растягивающие напряжения 850 МПа в радиальном направлении глобальной цилиндрической системы координат (тангенциальные — в местной цилиндрической системе координат, связанной с отверстием).



а) б) в)

Рисунок 4.4 — Поля напряжений подзадачи 3: компонента в радиальном направлении (а), компонента в окружном направлении (б), компонента в окружном направлении диска вблизи отверстия (в).



а) б) в)

Рисунок 4.5 — Суммарные поля напряжений: напряжения по Мизесу (а), в радиальном направлении (б), в радиальном направлении (диска) вблизи отверстия (в).

4.1.2 Оценка усталостной долговечности диска компрессора высокого давления на полетных циклах

Произведём оценку усталостной прочности диска КВД, используя результаты расчёта напряжений, приведённого в предыдущем разделе. Сначала рассмотрим случай отсутствия остаточных напряжений, то есть когда поверхностная обработка не проведена. Размах главных напряжений в опасной точке за счёт неравномерного нагрева и инерционных сил составил $\sigma_1 = 854$МПа, $\sigma_2 = 78$МПа, $\sigma_3 = 0$МПа при максимальной $T = 580\,^{\circ}$C. В качестве первой программы нагружения выберем типичную программу, реализующуюся в диске КВД в ходе полётного цикла (рис.4.6, а). Для расчётов по модели (3.1), были использованы константы из таб.3.1 и (3.16), определённые в предыдущей главе для жаропрочного никелевого сплава при температуре $650\,^{\circ}$C. Расчёт показал,

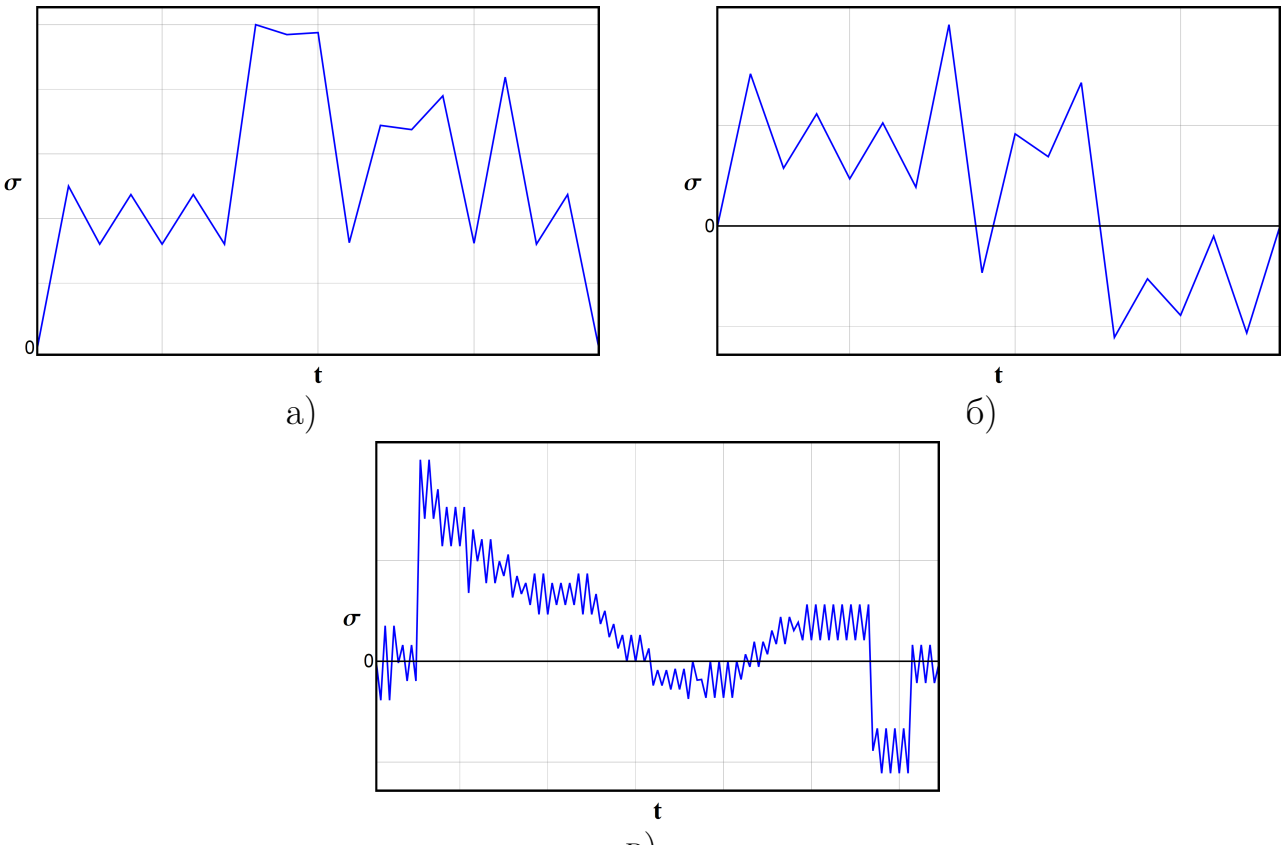
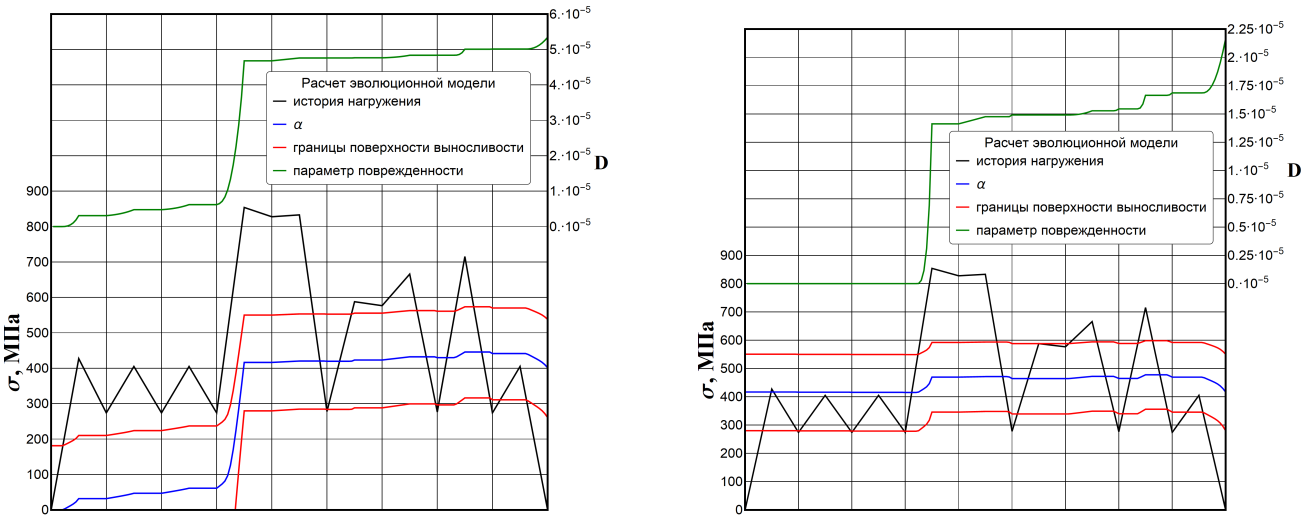


Рисунок 4.6 — Три вида программ нагружения, характерных для различных деталей авиадвигателя. Изменение компоненты напряжений, имеющей максимальный размах, в ходе одного полётного цикла: (а) в опасной точке диска КВД, (б) в опасной точке форсунки, (в) в опасной точке подвески авиадвигателя.



а) б)

Рисунок 4.7 — Движение поверхности выносливости и накопление повреждённости в ходе выполнения программы нагружения №1: при первом выполнении программы (а), в установившемся режиме (б).

что в установившемся режиме за одно повторение программы накапливается $D = 2.17 \cdot 10^{-5}$, значит число полётных циклов до разрушения $N_f^1 = 46142$. Накопление повреждённости в ходе выполнения программы, а также движение поверхности выносливости, изображено на рис.4.7[30]. Можно заметить, что при первом выполнении программы прирост повреждённости был значительно выше: $D = 5.34 \cdot 10^{-5}$. При последующих повторениях программы материал приспосабливается к нагружению, что моделируется с помощью смещения поверхности выносливости.

Если применить метод подсчёта циклов на основе формулы Сайнса (1.3), то получим оценку $\hat{N}_f^1 = 48947.1$, причём вклад цикла самого большого размаха составляет 97.6%. На истории нагружения такого типа значения средних напряжений циклов меньшей амплитуды близки. В этом случае эволюционная модель предсказывает незначительный прирост повреждённости за счёт циклов меньшей амплитуды. В качестве демонстрации приведём ещё две программы нагружения, характерные для других деталей авиадвигателя.

Рассмотрим историю нагружения №2: типичную для опасной точки форсунки авиадвигателя (рис.4.6,б). Здесь модель (3.1) прогнозирует прирост повреждённости в установившемся режиме $D = 9.6 \cdot 10^{-5}$ и $N_f^2 = 10411$, а при

[30]На этом и дальнейших подобных рисунках будет отображена история изменения максимального главного напряжения, остальные главные напряжения на порядок меньше и передвижение поверхности выносливости в этих направлениях незначительно.

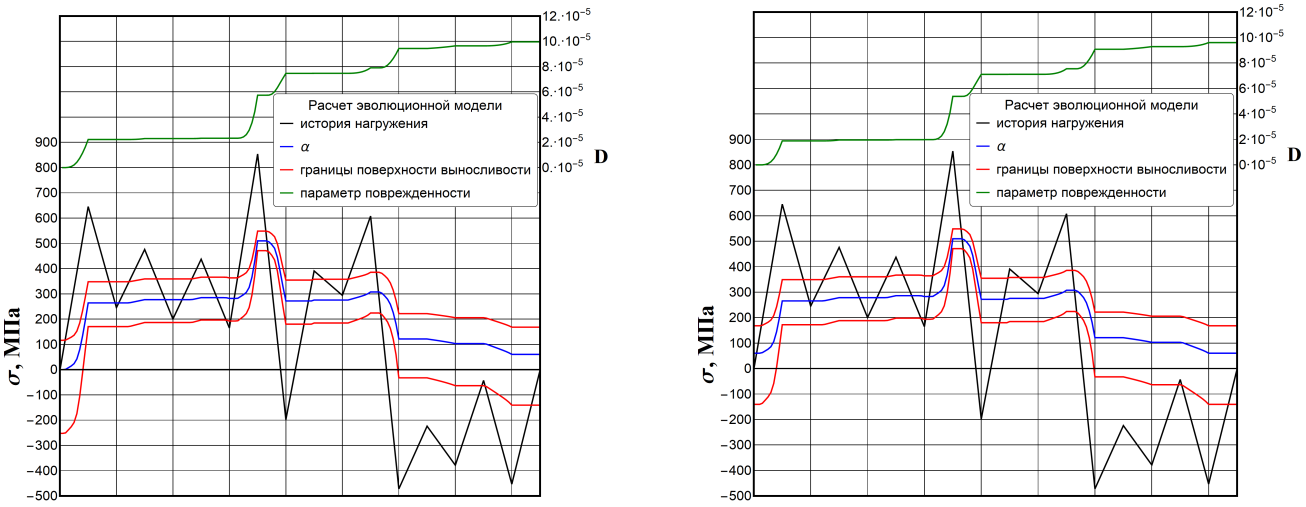


Рисунок 4.8 — Движение поверхности выносливости и накопление повреждённости в ходе выполнения программы нагружения №2: при первом выполнении программы (а), в установившемся режиме (б).

первом выполнении программы $D = 10.1 \cdot 10^{-5}$ — ненамного больше. Это означает, что эффект приспособляемости на такой истории[31] минимален, а эффект влияния циклов небольшой амплитуды на усталостную прочность велик. Накопление повреждённости в ходе выполнения программы и движение поверхности выносливости изображено на рис.4.8.

Метод подсчёта циклов вкупе с формулой Сайнса даёт на 50% менее консервативную оценку $\hat{N}_f^2 = 14830$, а вклад цикла самого большого размаха составляет 90.7%.

История нагружения №3 характерна для опасной точки подвески авиадвигателя (рис.4.6, в). Прирост повреждённости за программу, спрогнозированный моделью (3.1) составляет $D = 11.8 \cdot 10^{-5}$, а количество повторений до разрушения $N_f^3 = 8470$. На первом проходе истории, прирост повреждённости почти идентичен: $D = 11.9 \cdot 10^{-5}$. Эта программа нагружения, как и программа №2, содержит циклы небольшой амплитуды при высоких и низких средних напряжениях. Накопление повреждённости в ходе выполнения программы и движение поверхности выносливости изображено на рис.4.9.

Оценка времени жизни посредством метода подсчёта циклов и формулы Сайнса составляет $\hat{N}_f^3 = 14740$, что превышает прогноз модели (3.1) на 75%, а вклад цикла самого большого размаха в повреждённость составляет 95.5%.

[31] содержащей циклы небольшой амплитуды и при высоком, и при низком средних напряжениях

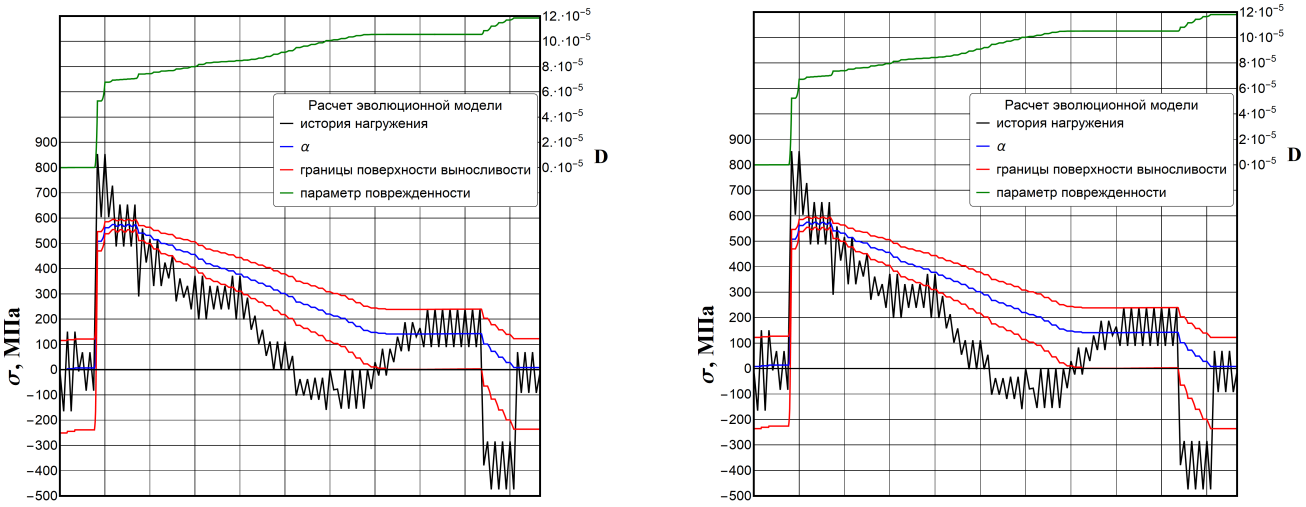


Рисунок 4.9 — Движение поверхности выносливости и накопление повреждённости в ходе выполнения программы нагружения №3: при первом выполнении программы (а), в установившемся режиме (б).

Оценим влияние наличия слоя сжимающих тангенциальных остаточных напряжений на усталостную прочность. В нашем случае величина этих напряжений -850МПа достаточна для того, чтобы больше не считать точку на поверхности концентратора опасной[32]. Опасная точка перемещается под поверхность на толщину слоя. Если слой достаточно толстый, то очаг разрушения будет развиваться под поверхностью на протяжении почти всего времени жизни, не взаимодействуя с поверхностью вплоть до финальной стадии разрушения. В этом случае усталостное разрушение развивается по иным, по сравнению с разрушением с поверхности, закономерностям. Это можно видеть на рис.1.4: в зоне гигацикловой усталости существует отдельная ветвь диаграммы Вёлера, соответствующая разрушению изнутри. Повышение усталостной прочности будет зависеть от характеристик этой второй ветви, которые можно получить, проводя длительные эксперименты на гигацикловую усталость либо испытывая образцы с наведённым слоем остаточных напряжений. Для жаропрочного сплава таких данных нет, поэтому ограничимся грубой оценкой. Искусственно сместим экспериментальную диаграмму Вёлера $R = -1$ при $T = 650\,^{\circ}\mathrm{C}$ на 2 порядка вправо (рис.4.10) и заново определим параметры модели (3.1):

$$\begin{gathered} k_1 = 3.41,\ b_1 = 1244\text{МПа},\ k_2 = 1.72,\ L_2 = 5.94,\ b_2 = 0.066 \\ k_3 = 10^{-3.9},\ L_3 = 2.16,\ b_3 = 2.99 \cdot 10^{-6},\ L_4 = 1.55 \end{gathered} \tag{4.1}$$

[32]Случай релаксации остаточных напряжений здесь не рассматривается.

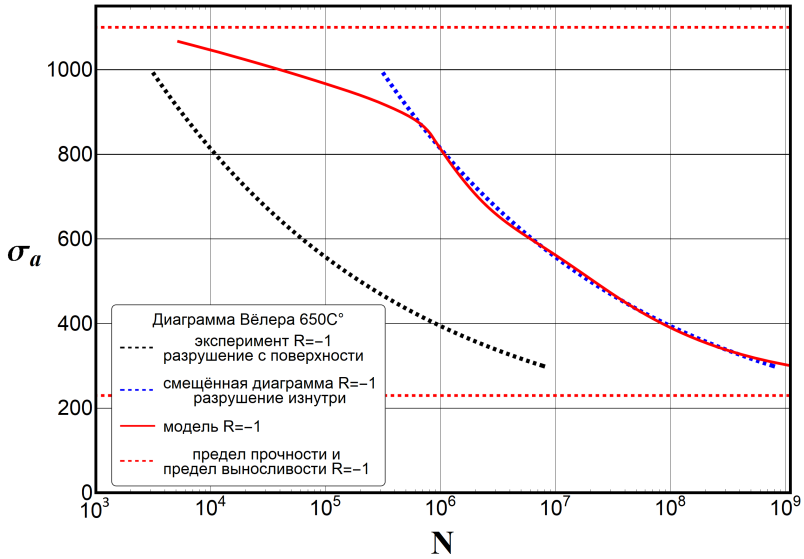


Рисунок 4.10 — Имитация второй ветви диаграммы Вёлера, соответствующей разрушению изнутри для жаропрочного сплава $T = 650\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Перемещение опасной точки под поверхность концентратора снижает размах истории нагружения вследствие наличия сильного градиента напряжений (рис.4.11). В нашем случае толщина слоя сжимающих остаточных напряжений $h = 50$мкм, и снижение имеет значение 30МПа, а более толстый слой $h = 200$мкм снизил бы размах на ≈ 80МПа. Наведённый обработкой поверхности слой растягивающих тангенциальных пластических деформаций кроме благоприятного слоя сжимающих остаточных напряжений создаёт под собой зону неблагоприятных растягивающих остаточных напряжений, накладывающихся на переменную нагрузку. Расчёт в разделе 4.1.1 показал, что в нашем случае величина этих растягивающих напряжений невелика и равна вдоль главных осей $\sigma_1 = 39$МПа, $\sigma_2 = 19$МПа, $\sigma_3 = 0$МПа. Наличие этих напряжений фактически компенсирует выигрыш от наличия градиента, описанный выше.

Усталостная прочность с учётом коррекции напряжённого состояния вследствие перемещения опасной точки и изменения диаграммы Вёлера, вычисленная с помощью эволюционной модели (3.1) с материальными параметрами табл.3.1 и (4.1) на программах рис.4.6, составила $\check{N}_f^1 = 4.37 \cdot 10^6$ для первой программы, $\check{N}_f^2 = 1.01 \cdot 10^6$ — для второй и $\check{N}_f^3 = 0.79 \cdot 10^6$ — для третьей. Во всех трёх случаях время жизни выросло в ≈ 100 раз.

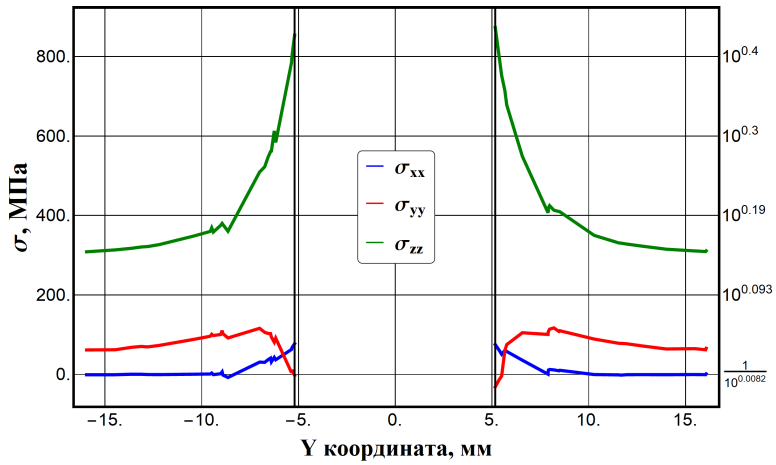


Рисунок 4.11 — Распределение компонент напряжений вблизи отверстия в диске КВД вдоль угловой координаты.

4.1.3 Анализ результатов

Эволюционная модель усталостного разрушения (3.1), описанная в разделе 3.1, с функциями (3.9),(3.4),(3.11) и материальными параметрами таб.3.1,(3.16), определёнными в разделе 3.3.2 для жаропрочного никелевого сплава, использована для прогноза усталостной прочности диска компрессора высокого давления. Положение опасной точки, а также, амплитуда напряжений вследствие термомеханической нагрузки в этой точке, определены в результате конечноэлементного расчёта в разделе 4.1.1.

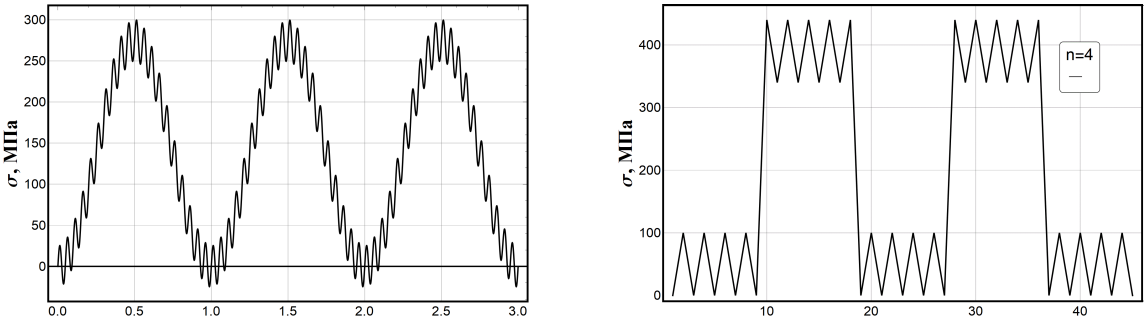
В разделе 4.1.2 проведены расчёты усталостной прочности для трёх программ нагружения и показана методическая возможность модели учесть наличие поля остаточных напряжений. Результаты собраны в таб.4.2, где N_f есть прогноз эволюционной модели без учёта остаточных напряжений, $\hat{N}_f$ — оценка с помощью метода подсчёта циклов и формулы Сайнса, $\check{N}_f$ — прогноз эволюционной модели с учётом остаточных напряжений, в скобках указано отличие от соответствующего значения N_f. Наличие остаточных напряжений способно значительно увеличить время жизни за счёт смещения опасной точки под поверхность и смены механизмов разрушения.

На примере программ нагружения №2 и №3 виден эффект влияния циклов небольшой амплитуды на усталостную прочность. В эволюционной модели величина этого эффекта регулируется скоростью движения поверхности выносливости в пространстве напряжений. С хорошей точностью определить эту

скорость только по данным регулярного нагружения[33] не представляется возможным, для этого необходимы эксперименты на нерегулярное нагружение наподобие рис.4.12.

Таблица 4.2 — Результаты оценки усталостной прочности

№ программы	N_f	$\hat{N}_f$	$\check{N}_f$
1	$4.61 \cdot 10^4$	$4.89 \cdot 10^4 (+6\%)$	$4.37 \cdot 10^6 (\times 100)$
2	$1.04 \cdot 10^4$	$1.48 \cdot 10^4 (+42\%)$	$1.01 \cdot 10^6 (\times 100)$
3	$0.85 \cdot 10^4$	$1.47 \cdot 10^4 (+73\%)$	$0.79 \cdot 10^6 (\times 100)$



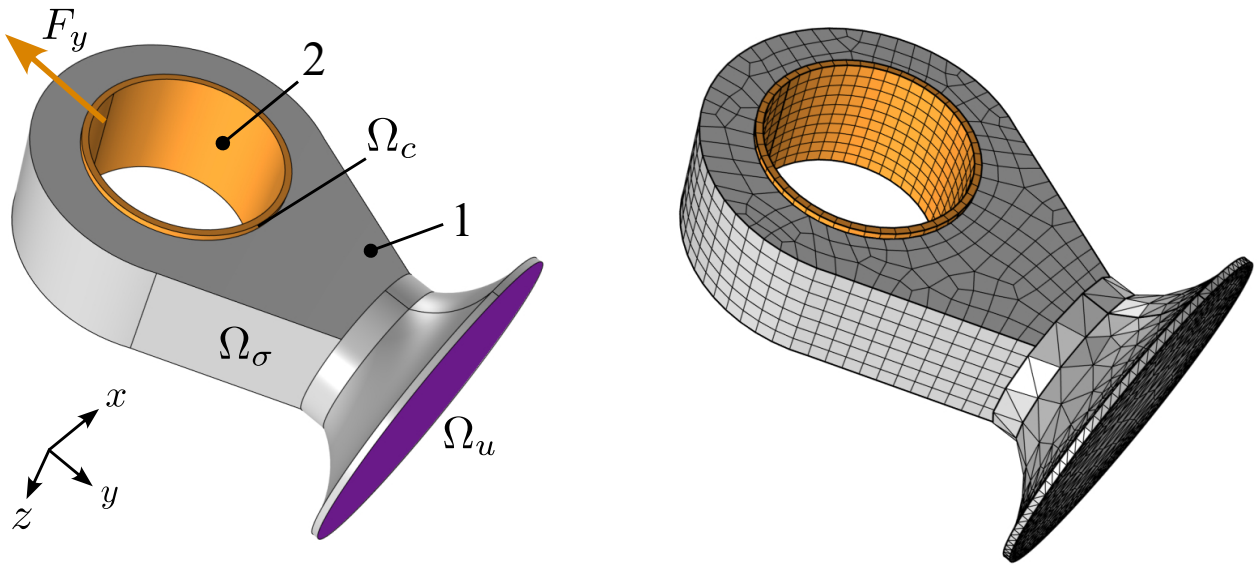
а) б)

Рисунок 4.12 — Примеры экспериментов на нерегулярное одноосное нагружение, позволяющих оценить влияние циклов меньшей амплитуды на время жизни образца.

[33] То есть исключительно по диаграммам Вёлера.

4.2 Проушина кронштейна крепления авиадвигателя

4.2.1 Расчет напряжений в проушине с учетом остаточных напряжений



а) б)

Рисунок 4.13 — Расчётная схема (а) и разбиение конечными элементами (б).

Рассматривается проушина кронштейна крепления мотогондолы из высокопрочной стали 65Г[34], геометрическая модель которой приведена на рис.4.13(а). Проушина, закреплённая у основания, подвергается контактному воздействию на внутренней части поверхности отверстия цилиндрическим элементом, к которому прикладывается усилие $F_y^0 = -10^5$ Н вдоль центральной оси проушины. На внутренней поверхности отверстия проушины находится слой собственных деформаций $\varepsilon_y^*(r) = \varepsilon_z^*(r) = \varepsilon^*(r) > 0$, которые полагаются несжимаемыми $\varepsilon_x^*(r) = -2\varepsilon^*(r)$, где r — радиальная координата. Глубина $H = 0.05$ мм и среднее значение $\langle \varepsilon^*(r) \rangle = H^{-1} \int_0^H \varepsilon^*(r) dr = \varepsilon_0^* = 2 \cdot 10^{-3}$ распределения собственных деформаций определены экспериментально методом [2].

Расчет полей напряжений выполнялся в пакете программ COMSOL Multiphysics, в котором реализован метод конечных элементов. Отдельно опре-

[34]За неимением достаточного количества экспериментальных данных для идентификации усталостных свойств этого материала были использованы данные для жаропрочного никелевого сплава при комнатной температуре (раздел 3.3.2), имеющего близкие механические и усталостные свойства.

делялись остаточные напряжения, вызванные собственными деформациями в поверхностном слое, для которых рассматривались прямоугольная и ступенчатая кусочно-постоянные аппроксимации экспериментально определенного распределения с учетом условия $\langle \varepsilon^*(r) \rangle = \varepsilon_0^*$ (рис.4.14, $r = 0$ на поверхности). Для задания собственных деформаций использовались слоистые оболочечные элементы. На всей поверхности проушины Ω задавались граничные условия как на свободной поверхности $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\big|_{\Omega} = 0$.

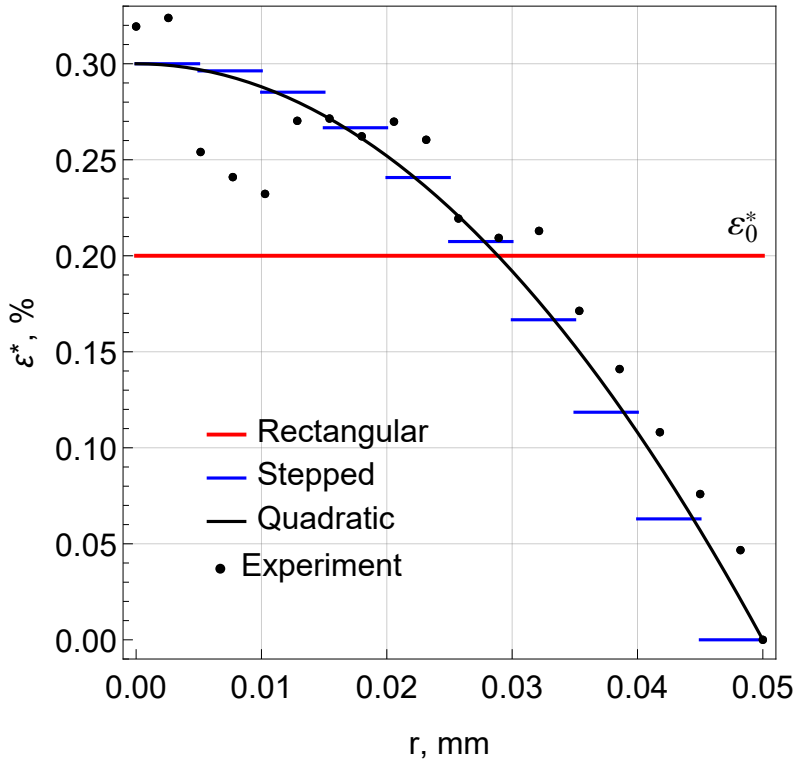


Рисунок 4.14 — Профили собственных деформаций ε^* по толщине слоистой оболочки.

Отдельно решалась задача о контакте упругой проушины с абсолютно жесткой втулкой по поверхности Ω_c (рис.4.13(а)) в условиях идеального контакта $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\big|_{\Omega_c} = T_n$, где T_n — нормальное усилие в точке при контакте ($T_n = 0$ при его отсутствии). На оставшихся поверхностях задавались граничные условия свободной поверхности либо жёсткой заделки $\mathbf{u}\big|_{\Omega_u} = 0$, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\big|_{\Omega_\sigma} = 0$ (рис.4.13(а)). К абсолютно жесткой втулке прикладывалась нагрузка $F_y = F_y^0$, а ее перемещения в других двух направлениях ограничивались $u_x = u_z = 0$. Задача решалась в упругой постановке со следующими константами: модуль Юнга $E = 186$ ГПа, коэффициент Пуассона $\boldsymbol{\nu} = 0.3$. Численное решение контактной задачи производилось с помощью метода штрафов при автоматически заданном в COMSOL Multiphysics значении контактной жёсткости. Расчётная область разбивалась

гексагональными и тетрагональными квадратичными конечными элементами (рис.4.13(b)) со средней длиной ребра 2 мм. Дальнейшее измельчение сетки не приводит к существенному изменению результатов.

Поле интенсивности сдвиговых напряжений в центральном сечении проушины, вызванных действием нагрузки, изображено на рис.4.15. В наиболее опасной точке в окрестности отверстия значимые компоненты (растягивающих) напряжений составляют $\sigma_\theta = 1115$ МПа и $\sigma_z = 164$ МПа.

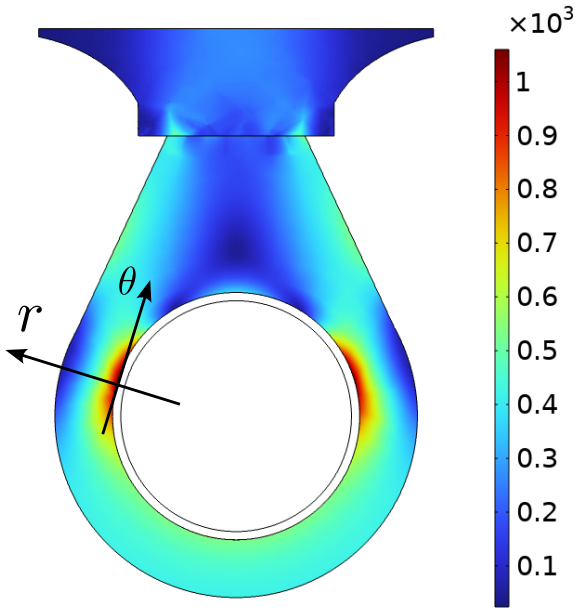


Рисунок 4.15 — Поле интенсивности напряжений в центральном сечении проушины.

Растягивающие собственные деформации вызывают сжимающие напряжения в окружном и осевом направлениях оболочечных конечных элементов и незначительные растягивающие напряжения в объёмных конечных элементах (рис.4.16(б,в)). Максимальные по модулю значения компонент тензора напряжений при прямоугольном распределении собственных деформаций по толщине оболочки составили $\sigma_\theta = -523$ МПа, $\sigma_z = -518$ МПа, а при ступенчатом распределении $\sigma_\theta = -566$ МПа, $\sigma_z = -715$ МПа, что на 8% и 38% больше, чем при прямоугольном и может быть важным при расчете на усталость. Кроме того, при ступенчатом распределении в поле напряжений не наблюдается существенных разрывов, что позволяет более точно оценивать усталостные свойства. Поля напряжений под тонким слоем практически не зависят от выбранного распределения поля остаточных деформаций.

Таблица 4.3 — Значения компонент тензора напряжений в опасной точке

№	Источник напряжений	опасная точка	σ_θ, МПа	σ_z, МПа
1	рабочая нагрузка	на поверхности	1115	164
2	остаточные, прямоугольный профиль	на поверхности	-523	-518
3	раб. нагрузка + остаточные, прямоугольный профиль	на поверхности	591	-354
4	остаточные, ступенчатый профиль	на поверхности	-566	-715
5	раб. нагрузка + остаточные, ступенчатый профиль	на поверхности	549	-551
6	раб. нагрузка + остаточные, прямоугольный профиль	на глубине 0.05 мм	1106	171
7	раб. нагрузка + остаточные, ступенчатый профиль	на глубине 0.05 мм	1114	171

Распределения суммарных напряжений, вызванных действием нагрузки и остаточных, по координате r ($r = 0$ на поверхности) изображены на рис.4.16(г,д). Ни в одной точке интенсивность касательных напряжений не превысила предел текучести $\sigma_u = 1100$ МПа. Опасная точка переместилась вглубь материала и характеризуется напряжениями $\sigma_\theta = 1106 - 1114$ МПа, $\sigma_z = 171$ МПа, практически не зависящими от неоднородности распределения собственных деформаций.

Значения напряжений в опасной точке конструкции с учетом остаточных напряжений, неоднородности их распределения, а также без учета остаточных напряжений, приведены в табл.4.3; остальные компоненты напряжений равны нулю или пренебрежимо малы.

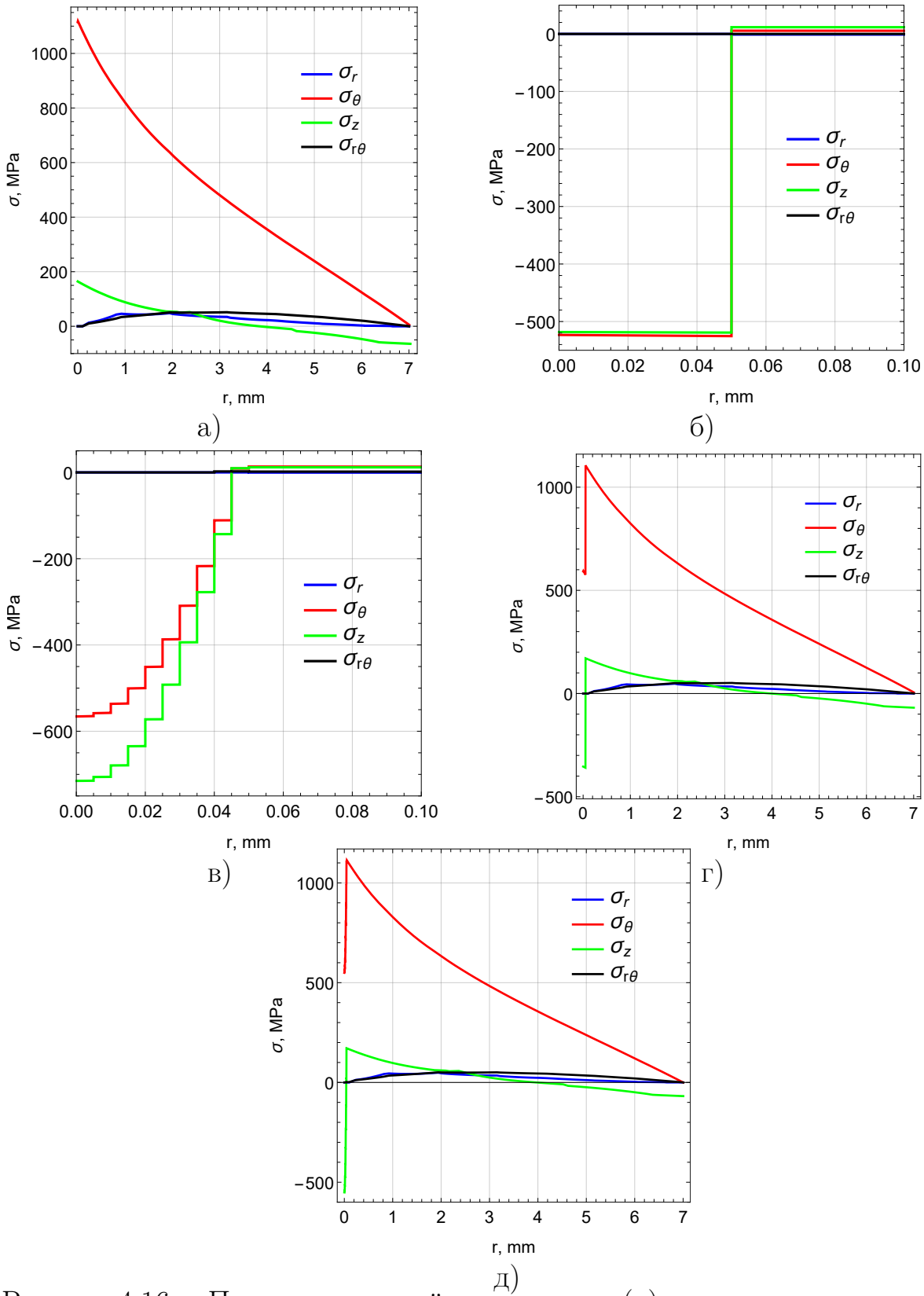


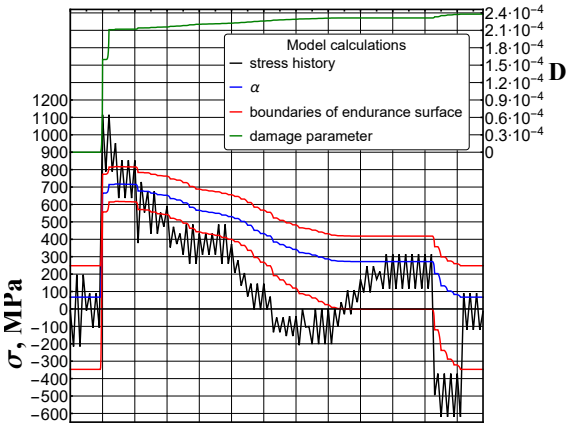
Рисунок 4.16 — Поля напряжений: от нагрузки (а); остаточных при постоянном распределении ε^* (б); остаточных при ступенчатом распределении ε^* (в), сумма остаточных напряжений рис.4.16(б) и напряжений от нагрузки рис.4.16(а) (г); сумма остаточных напряжений рис. 4.16(в) и напряжений от нагрузки рис.4.16(а) (д).

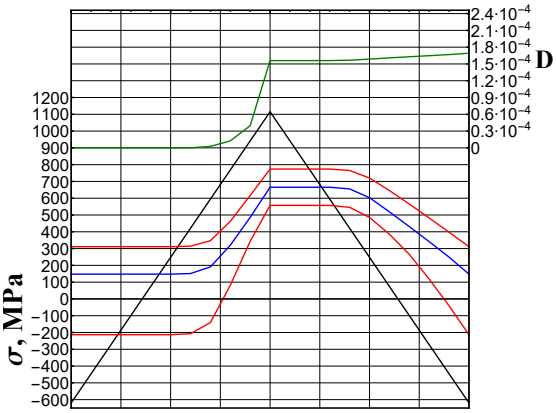
4.2.2 Оценка усталостной долговечности проушины на полётных циклах

В качестве нагружения использована программа полетного цикла для опасной точки проушины кронштейна крепления мотогондолы, а также ее представление одним треугольным циклом регулярной нагрузки с теми же минимальным и максимальным значениями окружного напряжения. В расчёте по эволюционной модели использовались константы, определённые в подразделе 3.3.2 для жаропрочного никелевого сплава при комнатной температуре: таб.3.1, таб.3.2. Было рассмотрено два набора констант, соответствующих быстрому и медленному движению поверхности выносливости, соответственно[35]. На графиках рис.4.18 приведена история изменения окружной компоненты напряжений в опасной точке в результате действия нагрузки на проушину (для полётного цикла и его представления треугольным циклом), а также прирост параметра поврежденности и изменение внутренних переменных в установившемся режиме, описываемые эволюционной моделью с набором констант 2 (таб.3.2). На рис.4.18(а-в) приведены расчеты для опасной точки (на поверхности) без учета остаточных напряжений, а также опасной точки (под поверхностью) с учетом остаточных напряжений, порожденных прямоугольным и ступенчатым распределениями собственных деформаций. На рис.4.18(г,д) приведены расчеты для точки на поверхности с учетом остаточных напряжений, порожденных прямоугольным и ступенчатым распределениями собственных деформаций. Оценки усталостной долговечности для обоих наборов констант сведены в табл.4.4, где в скобках указан прирост прогнозируемой долговечности при представлении полётного цикла треугольным. Для расчета с опасной точкой, лежащей под поверхностью, использовались значения константы k_3 эволюционной модели, соответствующие очагу разрушения внутри тела.

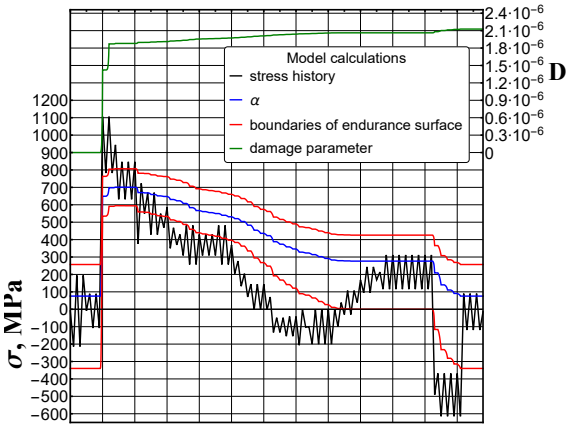
Для сравнения были проведены расчёты усталостной долговечности по стандартному методу. Полётный цикл (рис.4.18) был схематизирован методом дождя по ГОСТ 25.101-83. Затем отдельные циклы синфазного двухосного нагружения приведены к эквивалентным циклам отнулевого и симметричного

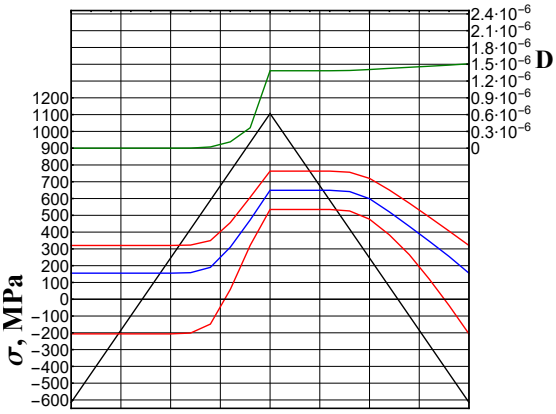
[35] Для предпочтения одного набора констант другому требуются дополнительные эксперименты на нерегулярное нагружение.


Model calculations
stress history
α
boundaries of endurance surface
damage parameter
σ, MPa
D

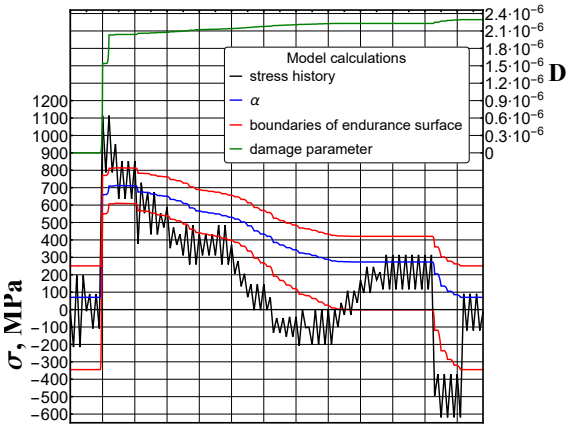

σ, MPa
D

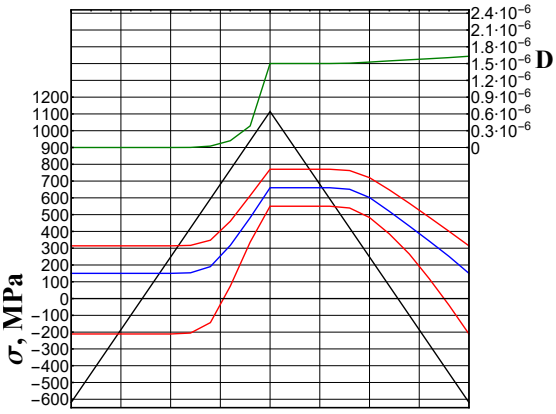
а)


Model calculations
stress history
α
boundaries of endurance surface
damage parameter
σ, MPa
D

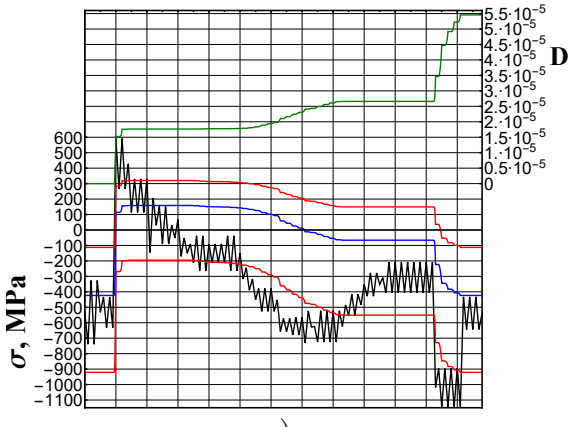

σ, MPa
D

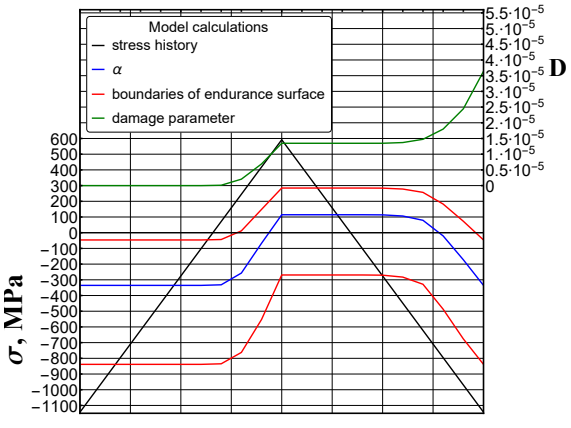
б)


Model calculations
stress history
α
boundaries of endurance surface
damage parameter
σ, MPa
D

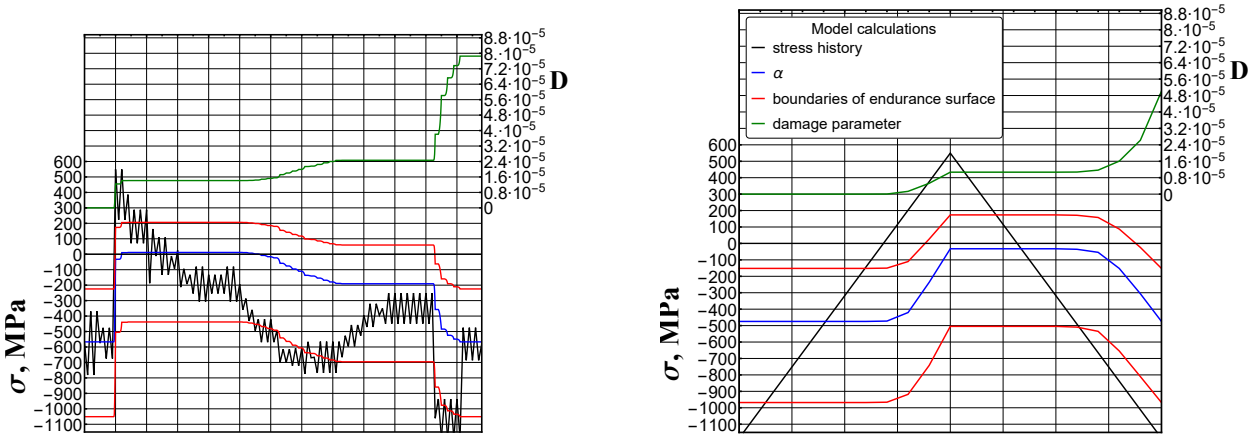

σ, MPa
D

в)


σ, MPa
D


Model calculations
stress history
α
boundaries of endurance surface
damage parameter
σ, MPa
D

г)



д)

Рисунок 4.18 — Результаты расчета эволюции усталостной поврежденности в ходе полетного цикла (слева) и для его представления треугольным циклом (справа): без собственных деформаций, на поверхности (а); с прямоугольным профилем, на глубине 0.05 мм (б); со ступенчатым профилем, на глубине 0.05 мм (в); с прямоугольным профилем, на поверхности (г); со ступенчатым профилем, на поверхности (д).

одноосного нагружения по формуле Сайнса [50]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1^a-\sigma_2^a\right)^2+\left(\sigma_2^a-\sigma_3^a\right)^2+\left(\sigma_3^a-\sigma_1^a\right)^2}+k\left(\sigma_1^m+\sigma_2^m+\sigma_3^m\right)= \\ =\sigma_a^{-1}(N)=(1+k)\sigma_a^0(N), \quad (4.2)$$

где σ_i^a, $i = 1,...,3$ есть амплитуды главных напряжений, σ_i^m, $i = 1,...,3$ — средние значения главных напряжений за цикл, $\sigma_a^{-1}(N)$ — амплитуда эквивалентного симметричного цикла, $\sigma_a^0(N)$ — амплитуда эквивалентного отнулевого цикла, k — параметр, определяемый равенством оценок времени жизни по эквивалентным симметричному и отнулевому циклам. Вклады отдельных циклов в повреждённость вычислены по экспериментальным кривым усталости (рис. 3.11(а)). Результаты расчёта долговечности, т.е. числа полетных циклов до разрушения приведены в табл.4.4.

Таблица 4.4 — Результаты расчёта усталостной долговечности

	нет собственных деформаций, поверхность	прямоугольный профиль, глубина 0.05 мм	ступенчатый профиль, глубина 0.05 мм	прямоугольный профиль, поверхность	ступенчатый профиль, поверхность
Модель(набор 1), полётный цикл	$5.16 \cdot 10^3$	$5.81 \cdot 10^5$	$5.38 \cdot 10^3$	$2.58 \cdot 10^4$	$1.74 \cdot 10^4$
Модель(набор 1), треугольный цикл	$5.85 \cdot 10^3$ (+13%)	$6.56 \cdot 10^5$ (+13%)	$6.07 \cdot 10^5$ (+13%)	$2.97 \cdot 10^4$ (+15%)	$2.04 \cdot 10^4$ (+17%)
Модель(набор 2), полётный цикл	$4.2 \cdot 10^3$	$4.7 \cdot 10^5$	$4.36 \cdot 10^3$	$1.83 \cdot 10^4$	$1.27 \cdot 10^4$
Модель(набор 2), треугольный цикл	$5.91 \cdot 10^3$ (+41%)	$6.63 \cdot 10^5$ (+41%)	$6.13 \cdot 10^5$ (+41%)	$2.75 \cdot 10^4$ (+50%)	$2 \cdot 10^4$ (+57%)
Формула Сайнса полётный цикл	$5.8 \cdot 10^3$	$6.18 \cdot 10^5$	$5.88 \cdot 10^3$	$9.05 \cdot 10^5$	$3.48 \cdot 10^6$
Формула Сайнса треугольный цикл	$5.82 \cdot 10^3$ (+0.4%)	$6.2 \cdot 10^5$ (+0.3%)	$5.9 \cdot 10^5$ (+0.4%)	$9.05 \cdot 10^5$ (+0%)	$3.48 \cdot 10^6$ (+0%)

4.2.3 Анализ результатов

Эволюционная модель усталостного разрушения (3.1), описанная в разделе 3.1, с функциями (3.9),(3.4),(3.11) и материальными параметрами таб.3.1, таб.3.2, определёнными в подразделе 3.3.2, использована для прогноза усталостной прочности проушины кронштейна крепления мотогондолы. Положение опасной точки, амплитуда напряжений и температура в этой точке определены в результате конечноэлементного расчёта в разделе 4.2.1.

Оценки усталостной долговечности для двух наборов констант (соответствующих разной чувствительности к нерегулярности нагружения) сведены в табл.4.4. В скобках указан прирост прогнозируемой долговечности при представлении цикла нагружения треугольным циклом по сравнению с полноценным полётным циклом. При расчете времени жизни для опасной точки, лежащей под поверхностью, использовались на два порядка меньшие значения константы k_3 эволюционной модели, соответствующие очагу разрушения внутри тела.

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Усталостная долговечность конструкции без учета остаточных напряжений оказывается существенно меньше, чем с их учетом.

2. Учет неоднородности распределения собственных деформаций дает более осторожную оценку усталостной долговечности по сравнению с однородным распределением на 30-33%.
3. Расчётная усталостная долговечность конструкции оказывается меньше на полетных циклах, чем на их представлении треугольными циклами. Величину этого эффекта можно регулировать в рамках эволюционной модели, а при расчёте по стандартному методу эффект не описывается.
4. Усталостное разрушение, развивающееся изнутри в соответствии с искусственно сгенерированной кривой усталости, оказалось менее опасным по сравнению с механизмом зарождения усталостной трещины на поверхности. Для обоснованного прогноза необходимы данные испытаний образцов, разрушившихся изнутри.

Отметим, что значительное расхождение прогнозов долговечности согласно эволюционной модели и стандартному методу (столбцы 5, 6, табл.4.4) вызвано отсутствием экспериментальной кривой усталости и предела выносливости для коэффициента асимметрии нагружения $R \approx -2.5$, которые имеют место на поверхности с большими сжимающими остаточными напряжениями.

4.3 Выводы по главе 4

В данной главе рассмотрены две задачи оценки усталостной прочности поверхностно обработанных деталей:

– диска компрессора высокого давления из жаропрочного никелевого сплава при температуре 650 °C;
– проушины кронштейна крепления мотогондолы из высокопрочной стали 65Г при комнатной температуре.

Произведён конечноэлементный расчёт детали с целью определения опасных точек и истории изменения тензора напряжений в них в ходе цикла нагрузки. Напряжения в опасной точке складываются из остаточных напряжений, вызванных приповерхностным слоем собственных деформаций, и напряжений, вызванных рабочей нагрузкой (в задаче для диска КВД также присутствуют температурные напряжения, вызванные неоднородностью поля

температуры). Для расчета технологических остаточных напряжений применена предложенная автором расчетно-экспериментальная методика определения поверхностных собственных деформаций и внедрения их с помощью многослойных оболочечных элементов в конечноэлементную модель. При оценке усталостной прочности использована предложенная автором эволюционная модель накопления усталостных повреждений.

Исследована зависимость усталостной долговечности от нерегулярности нагружения, для чего рассматривались различные варианты полетного цикла, а также его грубое представление треугольным циклом с теми же периодом, минимальным и максимальным значениями напряжений. Стандартный метод оценки усталостной прочности предсказывает идентичную усталостную долговечность для полноценного полётного цикла и его грубого треугольного представления, а эволюционная модель способна описывать снижение прогноза усталостной долговечности в случае учета деталей полетного цикла. Величина этого снижения регулируется параметрами модели, причем эта регулировка не влияет на описание моделью кривых усталости и диаграммы предельных амплитуд, для определения величины эффекта требуются дополнительные эксперименты на нерегулярное нагружение. Учтен механизм зарождения усталостной трещины под слоем остаточных напряжений, для чего предложено использовать точки кривой усталости, полученные для неупрочнённых образцов, в которых усталостные трещины зародились изнутри. Расчёты показали, что наличие поверхностных остаточных напряжений существенно увеличивает усталостную долговечность детали. Учёт неоднородности распределения собственных деформаций в поверхностном слое существенно влияет на величину остаточных напряжений и на теоретические прогнозы усталостной долговечности, причём упрощение распределения даёт неконсервативный прогноз (завышенное число циклов до разрушения).

Основные результаты этой главы могут быть сформулированы следующим образом:

– Произведена оценка усталостной прочности двух поверхностно обработанных деталей: диска компрессора высокого давления и проушины кронштейна крепления мотогондолы с учётом технологических остаточных напряжений, неоднородности распределения собственных деформаций, породивших эти напряжения, многоосности и нестационарности нагружения в полетном цикле.

– Установлена неконсервативность (завышенность) оценки усталостной долговечности детали при упрощении программы полетного цикла или упрощении распределения собственных деформаций вблизи поверхности.
– Сравнены результаты расчёта по эволюционной модели и по стандартному методу, заключающимся в схематизации многоосного синфазного нерегулярного нагружения методом дождя и сведении отдельных циклов к эквивалентным циклам одноосного нагружения, вклады которых в повреждённость линейно суммируются. Установлена неконсервативность оценки усталостной долговечности детали при оценке стандартным методом по сравнению с эволюционной моделью. Величина неконсервативности зависит от формы, сложности и детализации полётного цикла, а так же может регулироваться параметрами модели (с сохранением описания моделью экспериментальных кривых Вёлера и диаграмм Хейга).

Результаты, полученные в этой главе, опубликованы в статьях [9; 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

Ряд ответственных деталей авиадвигателя при эксплуатации подвержен циклическим механическим и температурным нагрузкам, которые сопровождаются нерегулярностью, многоосностью, несинфазностью и выдержками, что необходимо учитывать при оценке усталостной долговечности.

Существуют стандартные методы оценки усталостной долговечности, не способные сразу учесть все эти особенности, а также сложные связанные модели накопления усталостной повреждённости, которые способны учесть весь этот комплекс особенностей, но сложны для проведения численных расчётов и идентификации. Отмечается недостаток разработанности промежуточно класса несвязанных моделей, более простых для расчётов и идентификации, но способных описать перечисленные особенности.

Поверхностные сжимающие остаточные напряжения, наводимые для повышения усталостной прочности, вносят в конечноэлементный расчёт с помощью поля собственных деформаций, которые получают либо прямым моделированием технологического процесса поверхностной обработки, либо из данных экспериментального исследования обработанных образцов, для чего численно решают обратную задачу. Прямое моделирование процесса является отдельной сложной задачей, избыточной для оценки усталостной прочности, но решение обратной задачи при обработке экспериментальных данных также является сложной для инженера конструкторской организации.

Тема учёта остаточных напряжений при оценке усталостной прочности деталей недостаточно разработана.

Основные результаты этой работы могут быть сформулированы следующим образом:

– Впервые получены явные точные выражения для реконструкции неоднородного распределения собственных деформаций вблизи плоской или цилиндрической поверхности по данным разрушающего контроля остаточных напряжений. Существующие методы используют приближённое или численное решение обратной задачи. Результат предназначен для учета поверхностных технологических остаточных напряжений в

численной модели детали путём задания распределения собственных деформаций.

– Построена новая эволюционная модель накопления усталостных микроповреждений, способная описывать совокупность следующих испытаний: кривые усталости для нескольких значений параметра асимметрии цикла, диаграммы Хейга для одноосного нагружения и чистого сдвига, испытания на несинфазное двухосное нагружение и испытания на нерегулярное одноосное нагружение. По данным перечисленных испытаний определены константы модели. Проведена верификация модели на трёх программах нагружения («Боинг», «TWIST», «ЦАГИ»), имитирующих полётные циклы. Модель имеет преимущество перед инженерными методиками оценки усталостной прочности, которые не способны одновременно описывать результаты таких испытаний.
– Сформулировано реономное обобщение эволюционной модели накопления усталостной повреждённости, способное описывать зависимости усталостной прочности и предела выносливости от частоты нагружения и выдержек в цикле. Моделью описано падение усталостной прочности титанового сплава при наличии выдержек, ранее не описанное теоретически.
– В качестве демонстрации модели произведена оценка усталостной прочности двух поверхностно обработанных деталей с учётом технологических остаточных напряжений, неоднородности распределения собственных деформаций, породивших эти напряжения, многоосности и нестационарности нагружения в полетном цикле. Установлена завышенность оценки усталостной долговечности при упрощении полётного цикла или упрощения распределения собственных деформаций вблизи поверхности.
– Сравнены результаты расчёта по эволюционной модели и по стандартному методу: схематизации многоосного синфазного нерегулярного нагружения и сведения отдельных циклов к эквивалентным циклам одноосного нагружения, вклады которых в повреждённость линейно суммируются. Установлена завышенность оценки усталостной долговечности при оценке стандартным методом по сравнению с моделью. Степень завышенности зависит от типа и детализации полётного цикла

и может регулироваться параметрами модели (с сохранением описания моделью экспериментальных кривых Вёлера и диаграмм Хейга).

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Рекомендуется одновременная реконструкция остаточных напряжений и собственных деформаций в ходе разрушающего контроля, для чего предлагается внедрить полученные формулы в программное обеспечение аппаратуры.

Результаты работы могут служить основой для разработки новой методики расчета на усталость ответственных деталей авиационных конструкций с учётом

1. поверхностных технологических остаточных напряжений;
2. неоднородности распределения собственных деформаций, породивших эти напряжения;
3. нестационарности и многоосности нагружения в полетном цикле.

Результаты могут быть востребованными подразделениями прочностных расчетов конструкторских организаций АО «ОДК-Авиадвигатель», ПАО «ОДК-Сатурн», АО «ОДК-Кузнецов», АО «ОДК-Климов».

Для учёта истории изменения температуры в ходе цикла нагружения, в эволюционную модель накопления повреждённости может быть внедрена температура, как явный параметр нагружения наравне с историей изменения тензора напряжений. В настоящей работе это проделано не было ввиду недостатка экспериментальных данных.

Для тестирования модели для широкого класса материалов и программ нагружения требуется систематическое экспериментальное исследование, включающее помимо стандартных испытаний

1. эксперименты на нерегулярное нагружение;
2. эксперименты на многоосное нагружение;
3. эксперименты с переменной в ходе нагружения температурой;
4. эксперименты с выдержками;
5. эксперименты при различных частотах нагружения;
6. эксперименты с поверхностно обработанными образцами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келлер И. Э., Трофимов В. Н., Владыкин А. В., Плюснин В. В., Петухов Д. С., Виндокуров И. В. К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. — 2018. — Т. 22, № 1. — С. 40–64.

2. Petukhov D. S., Keller I. E. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications // Acta Mechanica. — 2020. — Vol. 231, no. 5. — P. 1849–1866.

3. Keller I. E., Petukhov D. S., Dudin D. S., Permyakov G. L., Trushnikov D. N., Maksimov A. B. Reconstruction of the Distribution of Eigenstrains and Residual Stresses across the Cross-Section of the Beam by the Cutting Method // Inorganic Materials. — 2025. — Vol. 61. — P. 252–261.

4. Salikhova N. K., Dudin D. S., Keller I. E., Petukhov D. S., Gachegova E. A., Maksimov A. B. Eigenstrains and residual stresses after gradient thermomechanical treatment of heavy steel plate: numerical modelling and experiment // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications (Ed. Holm Altenbach). — Springer, Cham, 2025 — P. 750. — P. 621–636.

5. Kaleva O., Orelma H., Petukhov D. Parameter estimation of a high-cycle fatigue model combining the Ottosen-Stenström-Ristinmaa approach and Lemaitre-Chaboche damage rule // Int. J. Fatigue. — 2021. — Vol. 147. — P. 106153.

6. Petukhov D. S., Keller I. E. Evolutionary model of fatigue fracture under irregular loading // Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 57, no. 2. — P. 263–270.

7. Petukhov D. S., Keller I. E. Simulating the frequency and dwell effects on fatigue life using an evolutionary damage model // Mechanics of Solids. — 2025. — Vol. 60, no. 8. — P. 6493–6504.

8. Петухов Д. С., Келлер И. Э. Описание зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и выдержек в рамках эволюционной модели

повреждаемости // Вестник ЧГПУ. Серия: Механика предельного состояния. — 2025. — Т. 2, № 64. — С. 262–281.

9. Петухов Д. С., Дудин Д. С., Келлер И. Э. Методика оценки ресурса по малоцикловой усталости при нерегулярном нагружении деталей с поверхностными остаточными напряжениями // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2025. — № 1(778). — С. 3–20.

10. Петухов Д. С., Дудин Д. С., Келлер И. Э. Учет поверхностных остаточных напряжений и нестационарности нагружения при оценке усталостной долговечности на полетных циклах // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. — 2026. — Т. 30, № 1. — С. 1–26.

11. Келлер И. Э., Петухов Д. С., Дудин Д. С., Пермяков Г. Л., Трушников Д. Н. Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании. — Патент на изобретение № RU 2797771 C1 от 08.06.2023.

12. Келлер И. Э., Петухов Д. С., Плехов О. А. Способ определения симметричного распределения остаточных напряжений по толщине пластины. — Патент на изобретение № RU 2818878 C1 от 06.05.2024.

13. Петухов Д. С., Келлер И. Э., Плехов О. А., Гачегова Е. А., Максимов А. Б. Способ определения распределения остаточных напряжений по толщине металлоизделия с высокими поверхностными градиентами. — Патент на изобретение № RU 2834607 C1 от 11.02.2025.

14. Naumann E. C., Hardrath H. R., Guthrie E. C. Axial load fatigue tests of 2024-T3 and 7075-T6 aluminum alloy sheet specimens under constant- and variable-amplitude loads : Rep. : NASA TN D-212 / National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Langley Field, Va. : 1959. — 37 pp.

15. Borrego L. P., Ferreira J. M., Pinho da Cruz J. M., Costa J. M. Evaluation of overload effects on fatigue crack growth and closure // Engineering Fracture Mechanics. — 2003. — Vol. 70, no. 11. — P. 1379–1397.

16. Evans W. J., Gostelow C. R. The effect of hold time on the fatigue properties of a β-processed titanium alloy // Metall. Trans., A. — 1979. — Vol. 10. — P. 1837–1846.

17. Басов В. Н., Нестеренко Г. И. Прочность и усталость материалов обшивки конструкций гражданских самолётов // Научный вестник МГТУ ГА. — 2010. — № 153. — С. 15–23.

18. Wu Z., Kou H., Chen N., Xi Z., Fan J., Tang B., Li J. Recent developments in cold dwell fatigue of titanium alloys for aero-engine applications: A review // J. Mater. Res. Technol. — 2022. — Vol. 20. — P. 469–484.

19. Bache M. R. A review of dwell sensitive fatigue in titanium alloys: the role of microstructure, texture and operating conditions // Int. J. Fatigue. — 2003. — Vol. 25. — P. 1079–1087.

20. Xu Y., Joseph S., Karamched P., Fox K., Rugg D., Dunne F. P. E., Dye D. Predicting dwell fatigue life in titanium alloys using modelling and experiment // Nature Communications. — 2020. — Vol. 11, no. 1. — P. 5868.

21. Eylon D., Hall J. A. Fatigue behavior of beta processed titanium alloy IMI 685 // Metall. Trans., A. — 1977. — Vol. 8. — P. 981–990.

22. Investigation report: Accident to the AIRBUS A380-861 30.09.2017 : Rep. : BEA2017-0568 / Bureau of Enquiry and Analysis for Civil Aviation Safety : 2020. — 09.

23. Xu Y., Fox K., Rugg D., Dunne F. P. E. Cyclic plasticity and thermomechanical alleviation in titanium alloys // Int. J. Plasticity. — 2020. — Vol. 134. — P. 102753.

24. Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals // Int. J. Fatigue. — 2003. — Vol. 25, no. 9. — P. 1101–1107.

25. Shiozawa K., Lu L., Ishihara S. S-N curve characteristics and subsurface crack initiation behaviour in ultra-long life fatigue of a high carbon-chromium bearing steel // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2002. — Vol. 24. — P. 781–790.

26. Никитин И. С., Бураго Н. Г., Никитин А. Д. Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 2. — С. 257–271.

27. Schutz W., Heuler P. Miner's rule revisited // An Assessment of Fatigue Damage and Crack Growth Prediction Techniques : Rep. : No. 797 / AGARD : 1994. — 10 pp.

28. Schijve J. Effect of load sequences on crack propagation under random and program loading // Engineering Fracture Mechanics. — 1973. — Vol. 5, no. 2. — P. 269–280.

29. Misawa H., Schijve J. Fatigue crack growth in aluminium alloy sheet material under constant-amplitude and simplified flight-simulation loading : Rep. : LR-381 / Delft University of Technology, Department of Aerospace Engineering. — Delft, The Netherlands : 1983. — 42 pp.

30. Стрижиус В. Е. Метод расчёта на усталость элементов авиаконструкций при бигармоническом нагружении // Научный вестник МГТУ ГА. — 2012. — № 175. — С. 55–61.

31. Jurcevic R., DuQuesnay D. L., Topper T. H., Pompetzki M. A. Fatigue damage accumulation in 2024-T351 aluminium subjected to periodic reversed overloads // Int. J. Fatigue. — 1990. — Vol. 12, no. 4. — P. 259–266.

32. Fowler K. R., Watanabe R. T. Development of Jet Transport Airframe Fatigue Test Spectra // Development of Fatigue Loading Spectra. — ASTM International, 1989. — 01.

33. de Jonge J. B., Schütz D., Lowak H., Schijve J. A Standardized Load Sequence for Flight Simulation Tests on Transport Aircraft Wing Structures (TWIST) : Rep. : NLR TR-73029 U / Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaborium : 1973. — 27 pp.

34. Басов В. Н., Нестеренко Г. И., Стрижиус В. Е. Типизированная программа нагружения крыла тяжелого транспортного самолета // Труды ЦАГИ. — 2001. — № 2642. — С. 26–34.

35. Агамиров Л. В., Вестяк В. А. Вероятностные методы расчёта показателей надёжности авиационных конструкций при переменных нагрузках. — М.: Издательство МАИ, 2022. — 256 с.

36. Pereira H., DuQuesnay D., De Jesus A., Silva A. Analysis of Variable Amplitude Fatigue Data of the P355NL1 Steel Using the Effective Strain Damage Model // Asme J. Pressure Vessel Technol. — 2009. — Vol. 131. — P. 051402.

37. Когаев В. П. Расчёты на прочность при напряжениях, переменных во времени. — Москва: Машиностроение, 1977. — 232 с.

38. Воробьёв А. З., Олькин Б. И., Стебенев В. Н., Родченко Т. С. Сопротивление усталости элементов конструкций. — Москва: Машиностроение, 1990. — 240 с.

39. Кузьмин В. Р., Прохоров В. А., Борисов А. З., ред. Махутов Н. А. Усталостная прочность металлов и долговечность элементов конструкций при нерегулярном нагружении высокого уровня. — Москва: Машиностроение, 1998. — 256 с.

40. Naumann E. C. Fatigue under random and programmed loads : Rep. : NASA TN D-2629 / National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Langley Field, Va. : 1965. — 25 pp.

41. Jacoby G. H. Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading // Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life, ASTM STP 462. — 1970. — P. 184–202.

42. Haibach F. Modifizierte Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung : Rep. : TM-50/70 / LBF, Darmstadt : 1970.

43. Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-9: Fatigue : Rep. : EN 1993-1-9:2005-05 + AC:2009-04 / European Committee for Standardization, Brussels : 2009. — 34 pp.

44. Zenner H., Liu J. Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschätzung nach dem Nennspannungskonzept // Konstruktion. — 1992. — Vol. 44, no. 1. — P. 9–17.

45. Стрижиус В. Е. Уравнение кривой усталости при квазислучайном нагружении элементов продольного набора крыла неманевренного самолета // Ученые записки ЦАГИ. — 1998. — Т. 29, № 3-4. — С. 144–152.

46. Haibach E. Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. — Springer, Berlin, 2006. — 759 pp.

47. Schutz W. The fatigue life under three different load spectra tests and calculations // Symposium on Random Load Fatigue, AGARD CP 118. — 1972. — P. 7.

48. Ekvall J. C., Young L. Converting fatigue loading spectra for flight-by-flight testing of aircraft and helicopter components // J. of Testing and Evaluation. — 1976. — Vol. 4, no. 4. — P. 231–247.

49. Gough H. J., Pollard H. V. The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. Inst. Mech. Engrs. — 1935. — no. 131. — P. 3–103.

50. Sines G. Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses : Rep. : NACA TN-3495 / National Advisory Committee for Aeronautics. Washington DC, USA : 1955. — 69 pp.

51. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, London. — 1956. — P. 138–149.

52. N. Smith K., Topper T., Watson P. A stress–strain function for the fatigue of metals // J. Materials. — 1970. — Vol. 5. — P. 767–778.

53. Fatemi A., Socie D. F. A Critical plane to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. — 1988. — Vol. 11. — P. 149–165.

54. You C., Achintha M., Soady K. A., Reed P. Low cycle fatigue life prediction in shot-peened components of different geometries – Part II: Life prediction // Fatigue&Fracture of Engineering Materials&Structures. — 2016. — Vol. 40. — P. 1–12.

55. Cruces A. S., Lopez-Crespo P., Moreno B., Antunes F. V. Multiaxial fatigue life prediction on S355 structural and offshore steel using the SKS critical plane model // Metals. — 2018. — Vol. 8, no. 12. — P. 1060.

56. Мэнсон С. С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость. — Москва: Машиностроение, 1974. — 344 с.

57. Портер А. М., Букатый С. А., Лёшин Д.П., Букатый А. С. Расчётно-экспериментальное исследование влияния упрочнения методом ППД на малоцикловую усталость деталей ГТД с концентратором напряжений // Вестник СГАУ. — 2011. — Т. 3, № 27. — С. 40–46.

58. Завойчинская Э. Б. Общие закономерности и критерии разрушения твердых тел на разных масштабно-структурных уровнях при длительном нагружении (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2022. — Т. 88, № 7. — С. 48–62.

59. Завойчинская Э. Б., Лавриков Г. Е. Моделирование и анализ хрупкого разрушения сталей при двухчастотном нагружении: масштабно-структурный подход // Вестник ПНИПУ, Механика. — 2026. — № 3. — С. 56–69.

60. М. Качанов Л. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 8. — С. 26–31.

61. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 5–7.

62. Lemaitre J., Chaboche J. L. Mechanics of Solid Materials. — Cambridge: University Press, 1994. — 556 pp.

63. Murakami S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. — Springer Science&Business Media, 2012. — 402 pp.

64. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. — Самара: Самарский университет, 2001. — 562 с.

65. Marmi A. K., Habraken A. M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti–6Al–4V alloy // Int. J. Fatigue. — 2009. — Vol. 31, no. 11. — P. 2031–2040.

66. Никитин И. С., Никитин А. Д., Стратула Б. А. Комплексное исследование зарождения и роста усталостных трещин при сверхмногоцикловом кручении // Физ. мезомех. — 2023. — Т. 26, № 3. — С. 50–61.

67. Lu R., Tan J., Yang J., Shlyannikov V., Wang J., Wang R., Zhang X., Tu Sh. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter // Int. J. Fatigue. — 2023. — Vol. 166. — P. 107248.

68. Takahashi Y. Effect of cyclic loading on subsequent creep behaviour and its implications in creep-fatigue life assessment // Mater. High. Temp. — 2015. — Vol. 32. — P. 492–501.

69. Махутов Н. А., Еремин К. И., Нащекин М. В., Березкина Ю. В. Остаточный ресурс циклически нагруженных металлоконструкций. — Магнитогорск, 2014. — 133 с.

70. Amato D., Yarullin R., Shlyannikov V., Citarella R. Numerical and experimental investigation of mixed-mode crack growth in aluminum alloys // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. — 2022. — Vol. 45, no. 10. — P. 2854–2872.

71. Yau J. F., Wang S. S., Corten H. T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity // J. Appl. Mech. — 1980. — Vol. 47, no. 2. — P. 335–341.

72. Вильдеман В. Э., Ильиных А. В., Янкин А. С., Лыкова А. В., Мугатаров А. И. Экспериментальные исследования усталостного поведения материалов при многоосных циклических воздействиях. — Пермь: Издательство ПНИПУ, 2022. — 113 с.

73. Бондарь В. С., Абашев Д. Р. Неупругое поведение и разрушение материалов при изотермических и неизотермических, простых и сложных нагружениях // Вестник ПНИПУ, Механика. — 2020. — № 4. — С. 107–119.

74. Волков И. А., Игумнов Л. А. Введение в континуальную механику повреждённой среды. — Москва: Физматлит, 2017. — 304 с.

75. Ottosen N. S., Stenström R., Ristinmaa M. Continuum approach to high-cycle fatigue modeling // Int. J. Fatigue. — 2008. — Vol. 30, no. 6. — P. 996–1006.

76. Кузьменко В. А., Матохнюк Л. Е., Писаренко Г. Г., Троян И. А., Шевчук А. Д. Усталостные испытания на высоких частотах нагружения / Под ред. В.А. Кузьменко. — Киев: Наук. думка, 1979. — 336 с.

77. Tahmasbi K., Alharthi F., Webster G., Haghshenas M. Dynamic frequency-dependent fatigue damage in metals: A state-of-the-art review // Forces in Mechanics. — 2023. — Vol. 10. — P. 100167.

78. Organ F. E., Gell M. The effect of frequency on the elevated temperature fatigue of a nickel–base superalloy // Metall. Trans. — 1971. — Vol. 2. — P. 943–952.

79. Guennec B., Ueno A., Sakai T., Takanashi M., Itabashi Yu. Effect of the loading frequency on fatigue properties of JIS S15C low carbon steel and some discussions based on micro-plasticity behavior // Int. J. Fatigue. — 2014. — Vol. 66. — P. 29–38.

80. Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T. Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V // Int. J. Fatigue. — 1999. — Vol. 21, no. 7. — P. 679–685.

81. Sharma A., Oh M. C., Ahn B. Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys — A Review // Metals. — 2020. — Vol. 10, no. 9. — P. 1200.

82. Peng W., Zhang Y., Qiu B., Xue H. A Brief Review of the Application and Problems in Ultrasonic Fatigue Testing // AASRI Procedia. — 2012. — Vol. 2. — P. 127–133.

83. Papakyriacou M., Mayer H., Pypen C., Plenk Jr. H., Stanzl-Tschegg S. Influence of loading frequency on high cycle fatigue properties of B.C.C. and H.C.P. Metals // Metals. Mater. Sci. Eng., A. — 2001. — Vol. 308, no. 1-2. — P. 143–152.

84. Takeuchi E., Furuya Y., Nagashima N., Matsuoka S. The effect of frequency on the giga-cycle fatigue properties of a Ti–6Al–4V alloy // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2008. — Vol. 31. — P. 599–605.

85. Tsutsumi N., Murakami Y., Doquet V. Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2009. — Vol. 32, no. 6. — P. 473–483.

86. Zhao A., Xie J., Sun C., Lei Z., Hong Y. Effects of strength level and loading frequency on very–high–cycle fatigue behavior for a bearing steel // Int. J. Fatigue. — 2012. — Vol. 38. — P. 46–56.

87. Investigation report: Accident to the AIRBUS A380-861 30.09.2017 : Rep. : BEA2017-0568.en / BEA : 2020. — 85 pp.

88. Bache M. R., Cope M. T., Davies H. M., Evans W. J., Harrison G. F. Dwell sensitive fatigue in a near alpha titanium alloy at ambient temperature // Int. J. Fatigue. — 1997. — Vol. 19, no. 93. — P. 83–88.

89. Wang F., Cui W. Experimental investigation on dwell-fatigue property of Ti-6A1-4V ELI used in deep-sea manned cabin // Mater. Sci. Eng., A. — 2015. — Vol. 642. — P. 136–141.

90. Peng J., Zhou C. Y., Dai Q., He X. H. Dwell fatigue and cycle deformation of CP-Ti at ambient temperature // Mater. Des. — 2015. — Vol. 71. — P. 1–16.

91. Dutton R. A review of the low-temperature creep behaviour of titanium. — AECL, Pinawa, MB (Canada), Whiteshell Labs, 1979. — 59 pp.

92. Zhang Z., Cuddihy M. A., Dunne F. P. E. On rate–dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 2015. — Vol. 471. — P. 20150214.

93. Lütjering G., Williams J. C. Titanium. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. — 442 pp.

94. Ozturk D., Shahba A., Ghosh S. Crystal plasticity FE study of the effect of thermo–mechanical loading on fatigue crack nucleation in titanium alloys // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. — 2016. — Vol. 39, no. 6. — P. 752–769.

95. Zarkades A., Larson F.R. Elasticity of Titanium Sheet Alloys // The Science, Technology and Application of Titanium / Ed. by R. I. Jaffe, N. E. Promisel. — Pergamon, 1970. — P. 933–941.

96. Oborin V., Balakhnin A., Naimark O., Gornostyrev Yu., Pushin V., Kuranova N., Rasposienko D., Svirid A., Uksusnikov A. Damage-failure transition in titanium alloy Ti-6Al-4V under dwell fatigue loads // Fracture and Structural Integrity. — 2023. — Vol. 18, no. 67. — P. 217–230.

97. Leo Prakash D. G., Walsh M. J., Maclachlan D., Korsunsky A. Crack growth micro-mechanisms in the IN718 alloy under the combined influence of fatigue, creep and oxidation // Int. J. Fatigue. — 2009. — Vol. 31, no. 11-12. — P. 1966–1977.

98. Lee S., Lu Y., Liaw P., Chen L., Thompson S., Blust J., Browning P. F., Bhattacharya A. K., Aurrecoechea J. M., Klarstrom D. L. Hold–time effects on elevated-temperature low–cycle–fatigue and crack–propagation behaviors of HAYNES 188 superalloy // J. Mater. Sci. — 2009. — Vol. 44. — P. 2945–2956.

99. Porter T. D., Findley K. O., Kaufman M. J., Wright R. N. Assessment of creep--fatigue behavior, deformation mechanisms, and microstructural evolution of alloy 709 under accelerated conditions // Int. J. Fatigue. — 2019. — Vol. 124. — P. 205–216.

100. Nabarro F. R. N. Deformation of Crystals by the Motion of Single Ions // a Conference on the Strength of Solids (Bristol, U.K.). — Phys. Soc. London, 1948. — P. 75–90.

101. Herring C. Diffusional Viscosity of a Polycrystalline Solid // J. Appl. Phys. — 1950. — Vol. 21, no. 5. — P. 437–445.

102. Coble R. L. A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials // J. Appl. Phys. — 1963. — Vol. 34, no. 6. — P. 1679–1682.

103. Weertman J. R. Theory of Steady-State Creep Based on Dislocation Climb // J. Appl. Phys. — 1955. — Vol. 26, no. 10. — P. 1213–1217.

104. Byrne J., Hall R., Grabowski L. Elevated temperature fatigue crack growth under dwell conditions in Waspaloy // Int. J. Fatigue. — 1997. — Vol. 19, no. 5. — P. 359–367.

105. Lu R.-S., Tan J.-P., Yang J., Wang J., Shlyannikov V., Wang R.-Z., Zhang X.-C., Tu S.-T. A new creep–fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter // Int. J. Fatigue. — 2022. — Vol. 166. — P. 107248.

106. Гохфельд Д. А., Гецов Л. Б., Кононов К. М., Кульчихин Е. Т., Ребяков Ю. Н., Садаков О. С., Тимашев С. А., Чепурский В. Н. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — 408 с.

107. Винокуров В. А., Григорьянц А. Г. Теория сварочных деформаций и напряжений. — М: Машиностроение, 1984. — 280 с.

108. Korsunsky A. M. A teaching essay on residual stresses and eigenstrains. — Oxford; Cambridge, MA : Butterworth–Heinemann, 2017. — 206 pp.

109. Давиденков Н. Н. Измерение остаточных напряжений в трубах // Журнал технической физики. — 1931. — Т. 1, № 1. — С. 206–218.

110. Давиденков Н. Н. Об измерении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. — 1937. — Т. 6, № 8.

111. Биргер И. А. Остаточные напряжения. — М.: Машиностроение, 1963. — 232 с.

112. Вакулюк В. С., Кирпичёв В. А., Павлов В. Ф., Семёнова О. Ю., Матвеева К. Ф. Станислав Иванович Иванов. Воспоминания об учёном и научные труды. — Самарский университет им. Королёва, 2016. — 169 с.

113. Procedures for Using Standard Shot Peening Almen Test Strip. SAE Standard J443. — Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 2003. — 7 pp.

114. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И., Волков В. И. Технологические методы повышения надёжности деталей машин: справочник. — М.: Машиностроение, 1993. — 304 с.

115. Меркулова Н. С. Контроль остаточных напряжений на установке АПООН (автоматизация процесса определения остаточных напряжений). Производственная инструкция НИАТ ПИ 1.4.804-84. — М.: НИАТ, 1985. — 50 с.

116. Меркулова Н. С. Эксплуатация автоматизированного измерительно-вычислительного комплекса для определения поверхностных остаточных напряжений МЕРКУЛОН «ТЕНЗОР-3». Инструкция 05.102.194 (дополненная). — М.: НИИД, 2009. — 52 с.

117. Schajer G. S. Advances in hole-drilling residual stress measurements // Exp. Mech. — 2010. — Vol. 50, no. 2. — P. 159–168.

118. Чернятин А. С., Разумовский И. А. Последовательно углубляемый дисковый разрез — индикатор остаточных напряжений в пространственных телах // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2015. — № 5. — С. 93–102.

119. Lunt A. J. G., Korsunsky A. M. Intragranular Residual Stress Evaluation Using the Semi-Destructive FIB-DIC Ring-Core Drilling Method // Advanced Materials Research. — 2014. — Vol. 996. — P. 8–13.

120. Residual stress measurements by X-ray diffraction. SAE standard HS784. — Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 2003. — 150 pp.

121. Fitzpatrick M. E., Lodini A. Analysis of residual stress by diffraction using neutron and synchrotron radiation. — CRC press, London, 2003. — 368 pp.

122. Korsunsky A. Variational eigenstrain analysis of synchrotron diffraction measurements of residual elastic strain in a bent titanium alloy bar // J. Mech. Mat. Struct. — 2006. — Vol. 1, no. 2. — P. 259–277.

123. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation // Int. J. of Computational Materials Science and Surface Engineering. — 2010. — Vol. 3, no. 4. — P. 289–310.

124. Bhuvaraghan B., Srinivasan R. M., Maffeo B. Optimization of the fatigue strength of materials due to shot peening: A survey // Int. J. of Structural Changes in Solids: Mechanics and Applications. — 2010. — Vol. 2, no. 2. — P. 33–63.

125. Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J., Mechri O., Ba K. Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method // Int. J. of Mechanical Sciences. — 2016. — Vol. 107. — P. 21–33.

126. Sherafatnia K., Farrahi G. H., Mahmoudi A. H., A. Ghasemi. Experimental measurement and analytical determination of shot peening residual stresses considering friction and real unloading behavior // Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. A657. — P. 309–321.

127. Xie L., Wang Ch., Wang L., Wang Zh., Jiang Ch., Lu W., Ji V. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment // Finite Elements in Analysis and Design. — 2016. — Vol. 99. — P. 2–8.

128. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // Comptes Rendus Mécanique. — 2016. — Vol. 344, no. 4. — P. 355–374.

129. Achintha M., Nowell D. Eigenstrain modelling of residual stresses generated by laser shock peening // Journal of Materials Processing Technology. — 2011. — Vol. 211, no. 6. — P. 1091–1101.

130. Keller S., Chupakhin S., Staron P., Maawad E., Kashaev N., Klusemann B. Experimental and numerical investigation of residual stresses in laser shock peened AA2198 // Journal of Materials Processing Technology. — 2018. — Vol. 255, no. 6. — P. 1091–1101.

131. Han B., Ju D. Y. Compressive residual stress induced by water cavitation peening: A finite element analysis // Materials and Design. — 2009. — Vol. 30, no. 8. — P. 3325–3332.

132. Badreddine J., Rouhaud E., Micoulaut M., Remy S. Simulation of shot dynamics for ultrasonic shot peening: Effects of process parameters // Int. J. of Mechanical Sciences. — 2014. — Vol. 82. — P. 179–190.

133. Liu Yu, Wang L., Wang D. Finite element modeling of ultrasonic surface rolling process // Journal of Materials Processing Technology. — 2011. — Vol. 211, no. 12. — P. 2106–2113.

134. Musinski W. D., McDowell D. L. On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: application to Ni-base superalloy specimens // Int. J. Mech. Sci. — 2015. — Vol. 100. — P. 195–208.

135. Korsunsky A. M. On the modelling of residual stresses due to surface peening using eigenstrain distributions // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. — 2005. — Vol. 40, no. 8. — P. 817–824.

136. Korsunsky A. M. Residual elastic strain due to laser shock peening: Modelling by eigenstrain distribution // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. — 2006. — Vol. 41, no. 3. — P. 195–204.

137. Jun T-S., Venter A., Korsunsky A. Inverse eigenstrain analysis of the effect of non-uniform sample shape on the residual stress due to shot peening // Experimental Mechanics. — 2011. — Vol. 51, no. 2. — P. 165–174.

138. Cochennec F., Rouhaud E., Roucoules L., Flan B. Numerical and experimental investigation on shot-peening induced deformation. Application to sheet metal forming // JCPDS Int. Cent. Diffr. Data. — 2009. — Vol. 23. — P. 511–518.

139. Букатый А. С. Оптимизация технологических процессов по остаточным напряжениям с целью обеспечения адгезии покрытий из никеля и хрома на деталях из титановых сплавов // Вестник СамГТУ. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. — 2018. — Т. 17, № 3. — С. 138–147.

140. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Феноменологический метод расчета остаточных напряжений и пластических деформаций в полом поверхностно упрочненном цилиндрическом образце // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 143–152.

141. Li J. K., Mei Y., Duo W., Renzhi W. Mechanical approach to the residual stress field induced by shot peening // Materials Science and Engineering. — 1991. — Vol. A147. — P. 167–173.

142. Shen S., Atluri S. N. An analytical model for shot-peening induced residual stresses // Computers, Materials and Continua. — 2006. — Vol. 4, no. 2. — P. 75–85.

143. Franchim A. S., de Campos V. S., Travessa D. N., de Moura Neto C. An analytical model for shot-peening induced residual stresses // Materials and Design. — 2009. — Vol. 30. — P. 1556–1560.

144. Davis J., Ramulu M. A study of the residual stress induced by shot peening for an isotropic material based on Prager's yield criterion for combined stresses // Meccanica. — 2015. — Vol. 50. — P. 1593–1604.

145. Кашаев Н., Плехов О. А., Гачегова Е. А., Сихамов Р., Фенцке Ф. Влияние лазерной ударной проковки на мало- и многоцикловую усталость титанового сплава ОТ4-0 // Прикладная механика и техническая физика. — 2022. — Т. 63, № 2. — С. 182–191.

146. Радченко В. П., Морозов А. П. Экспериментальное исследование влияния пневмодробеструйной обработки, температурных выдержек и многоцикловых усталостных испытаний на физико-механическое состояние упрочнённого слоя цилиндрических образцов из сплавов В95 и Д16Т // Вестник СамГТУ, серия физ-мат. науки. — 2010. — Т. 5, № 21. — С. 222–228.

147. Павлов В. Ф., Кирпичёв В. А., Вакулюк В. С. Прогнозированиие сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. — Самара: СНЦ РАН, 2012. — 125 с.

148. Петухов Д. С., Келлер И. Э. Критерии прочности и пластичности: учеб. пособие. — Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2020. — 157 с.

149. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 78 с.

150. Биргер И. А. Определение остаточных напряжений в образцах сложной формы // Заводская лаборатория. — 1970. — № 1. — С. 76–80.

151. Kolupaev V. A. Equivalent stress concept for limit state analysis. — Cham: Springer, 2018. — 365 pp.

152. Rice R. C., Jackson J. L., Bakuckas J., Thompson S. Metallic materials properties development and standartization. Report № DOT/FAA/AR-MMPDS-01. — Springfield : National technical information service, 2003.

153. Cai X., Li X., Xu J. Fatigue limit and life evaluation formulae for compressive mean stress states // Mat. Sc.&Tech. — 2018. — Vol. 34, no. 17. — P. 2166–2173.

154. Forrest P. G. Fatigue of Metals. — Pergamon Press, Oxford, 1962. — 425 pp.

155. Нейбер Г. Концентрация напряжений. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. — С. 204. — Пер. с нем. Н. Н. Лебедева; под ред. А. И. Лурье.

156. Xia T., Yao W., Zou J., Gao D. A novel accumulative fatigue damage model for multiaxial step spectrum considering the variations of loading amplitude and loading path // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. — 2015. — Vol. 39, no. 2. — P. 194–205.

157. Thiago R. Schwingfestigkeitsverhalten von Gusseisenwerkstoffen unter einachsiger und mehrachsiger Beanspruchung am Beispiel von EN-GJV-450: doktorarbeit. — Aachen, Shaker Verlag, 2011. — 192 pp.

158. Pekoz T., Bjorhovde R., Errera S. J., Johnston B. G., Sherman D. R., Tall L. Determination of residual stresses: Technical memorandum of ASCE No. 6 // Guide To Stability Design Criteria For Metal Structures. — 2010. — P. 993–1002.

159. Bamberg J., Hessert R. Method and Apparatus for Determining Residual Stresses of a Component. — US Patent № 2015/0219444 A1 dated 04.02.2015.

160. ГОСТ 111603-73 Древесина. Метод определения остаточных напряжений. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 9 с.

161. Olshanskaya T., Trushnikov D., Dushina A., Polyakov A., Ganeev A., Semenova I. Microstructure and properties of the 308l SI austenitic steel produced by plasma-MIG deposition welding with layer-by-layer peening // Metals. — 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 82.

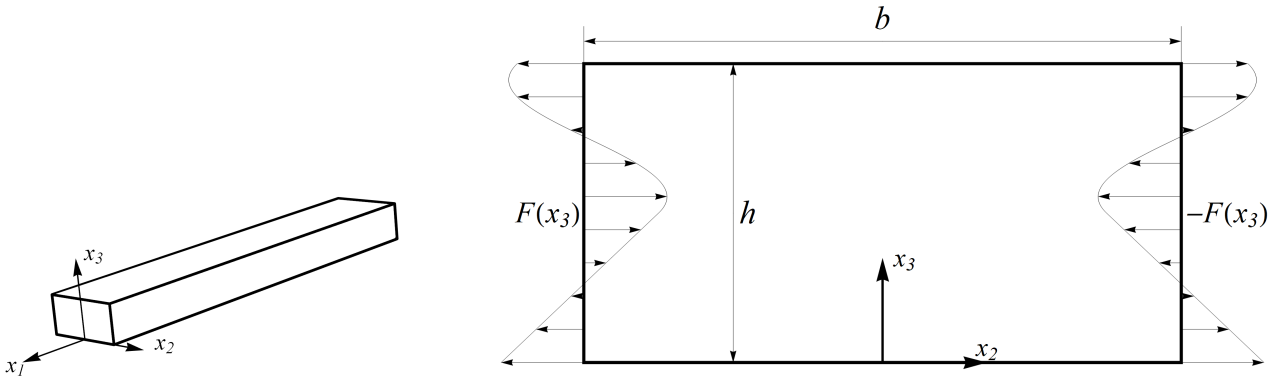
ПРИЛОЖЕНИЕ А

Теорема о прогибе полоски

Рассмотрим задачу о длинной полоске ширины b и длины L, много большей её толщины h (рис.А.1). Координаты x_1, x_2, x_3 направлены вдоль длины, ширины и толщины полоски, соответственно. Связь прогиба полоски и поля собственных деформаций необходима для экспериментального определения последних. Чтобы записать эту связь, достаточно доказать следующую теорему:

Теорема:

Прогибы полоски и пластины одинаковой толщины одинаковы при одинаковом слое собственных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^*(x_3)$ вида (2.2). Отсюда следует, что прогиб полоски не зависит от ее ширины b.



а) б)

Рисунок А.1 — Полоска (а); сечение полоски плоскостью $x_1 = \text{const}$ (б).

Задача о полоске отличается от задачи о пластине (рассмотренной в разделе 2.1.1) наличием свободных границ $x_2 = \pm b/2$. Поэтому рассмотрим следующую вспомогательную задачу: пусть в полоске нет пластических деформаций, но на боковых гранях $x_2 = \pm b/2$ приложены распределенные нормальные поверхностные нагрузки $-F(x_3)$ и $F(x_3)$, соответственно, а остальные грани свободны от усилий. Если $F(x_3)$ положить равным остаточным напряжениям, возникающим в пластине (2.5), (2.6), то сумма решений (перемещений, напряжений, деформаций) задачи о бесконечной пластинке и вспомогательной задачи будет являться решением задачи о конечной пластинке со слоем собственных деформаций (2.2) и боковыми гранями свободными от усилий. Это верно вследствие линейности уравнений (2.1). Чтобы доказать **теорему**,

достаточно показать что во вспомогательной задаче отсутствует прогиб. Пренебрежем краевыми эффектами вблизи торцов $x_1 = \pm L/2$, то есть примем что напряженно-деформированное состояние не зависит от x_1, тогда

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_2,x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_2,x_3) & \sigma_{23}(x_2,x_3) \\ 0 & \sigma_{23}(x_2,x_3) & \sigma_{33}(x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{ij} = \begin{pmatrix} k_1 x_3 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(x_2,x_3) & \varepsilon_{23}(x_2,x_3) \\ 0 & \varepsilon_{23}(x_2,x_3) & \varepsilon_{33}(x_2,x_3) \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, так как любая плоскость $x_1 = const$ является плоскостью симметрии напряженно-деформированного состояния, а выражение для ε_{11} вытекает из решения уравнения совместности деформаций. Граничные условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_{22}(-b/2,x_3) = \sigma_{22}(b/2,x_3) = F(x_3),\ \sigma_{23}(-b/2,x_3) = \sigma_{23}(b/2,x_3) = 0, \\ &\sigma_{33}(x_2,0) = \sigma_{33}(x_2,h) = 0,\ \sigma_{23}(x_2,0) = \sigma_{23}(x_2,h) = 0, \\ &\int_0^h \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11}(x_2,x_3)dx_2dx_3 = 0 \ \text{ торцы свободны от сил}, \\ &\int_0^h \int_{-b/2}^{b/2} x_2\sigma_{11}(x_2,x_3)dx_2dx3 = 0 \ \text{ торцы свободны от момента}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Усилие $F(x_3) = \sigma^*_{22}$, где σ^*_{22} - остаточные напряжения в бесконечной пластине (2.5). Остаточные напряжения, а значит и усилие $F(x_3)$, самоуравновешены и имеют нулевой момент: $\int_0^h F(x_3)dx_3 = 0,\ \int_0^h x_3F(x_3)dx_3 = 0$. Мысленно разделим пластину на две части плоскостью $x_2 = x_2^*$ и рассмотрим левую часть $x_2 \leqslant x_2^*$. Так как часть находится в равновесии, усилия на плоскости $x_2 = x_2^*$, а также их момент, должны быть равны нулю:

$$\begin{gathered} \int_0^h \sigma_{22}(x_2,x_3)dx_3 = 0,\ \int_0^h x_3\sigma_{22}(x_2,x_3)dx_3 = 0, \\ \int_0^h \sigma_{23}(x_2,x_3)dx_3 = 0, \\ \forall x_2, \text{ так как } x_2^* \text{ была выбрана произвольно.} \end{gathered} \tag{A.2}$$

Момент вертикальных сил σ_{23} автоматически равен нулю[36].

[36]Интеграл этих сил равен нулю, а значит их момент относительно любой оси одинаков. Выбрав ось, лежащую в плоскости $x_2 = x_2^*$, получаем момент равный нулю так как плечо сил нулевое.

Мысленно разделим пластинку на 2 части плоскостью $x_3 = x_3^*$. Нижняя часть $x_3 \leqslant x_3^*$ находится в равновесии и, так как $\sigma_{33}(x_2,0) = 0$, необходимо

$$\int\limits_{-b/2}^{b/2} \sigma_{33}(x_2,x_3)dx_2 = 0, \forall x_3, \text{ поскольку } x_3^* \text{ была выбрана произвольно.} \quad \text{(A.3)}$$

И наконец, из закона Гука:

$$\varepsilon_{11} = \varkappa\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) + \frac{1}{2\mu}\sigma_{11}, \;\; \varkappa = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad \text{(A.4)}$$

Проинтегрируем (A.4) и произведение x_3 на (A.4) по x_3 и получим, с учетом (A.2),

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^h \varepsilon_{11}dx_3 = \varkappa \int\limits_0^h \sigma_{33}dx_3 + \left(\varkappa + \tfrac{1}{2\mu}\right)\int\limits_0^h \sigma_{11}dx_3, \\ &\int\limits_0^h x_3\varepsilon_{11}dx_3 = \varkappa \int\limits_0^h x_3\sigma_{33}dx_3 + \left(\varkappa + \tfrac{1}{2\mu}\right)\int\limits_0^h x_3\sigma_{11}dx_3. \end{aligned} \quad \text{(A.5)}$$

Проинтегрируем (A.5) по x_2 и с учетом (A.3) и граничных условий (A.1), получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h \varepsilon_{11}dx_3dx_2 = \varkappa \int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h \sigma_{33}dx_3dx_2 + \left(\varkappa + \tfrac{1}{2\mu}\right)\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h \sigma_{11}dx_3dx_2 = \\ &= \varkappa \int\limits_0^h \int\limits_{-b/2}^{b/2} \sigma_{33}dx_2dx_3 = 0, \\ &\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h x_2\varepsilon_{11}dx_3dx_2 = \varkappa \int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h x_3\sigma_{33}dx_3dx_2 + \left(\varkappa + \tfrac{1}{2\mu}\right)\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^h x_3\sigma_{11}dx_3dx_2 = \\ &= \varkappa \int\limits_0^h x_3 \int\limits_{-b/2}^{b/2} \sigma_{33}dx_2dx_3 = 0. \end{aligned} \quad \text{(A.6)}$$

Теперь учтём, что $\varepsilon_{11} = k_1x_3 + k_2$, и (A.6) примет вид

$$\begin{aligned} &k_1\tfrac{h^2b}{2} + k_2hb = 0, \\ &k_1\tfrac{h^3b}{3} + k_2\tfrac{h^2b}{2} = 0. \end{aligned} \quad \text{(A.7)}$$

Определитель системы (A.7) не 0(при $h > 0$, $b > 0$), значит $k_1 = k_2 = 0$ и деформации в направлении x_1 отсутствуют: $\varepsilon_{11} \equiv 0$. Теперь покажем, что прогиб отсутствует. Для этого подсчитаем вертикальные перемещения на средней

линии нижней стороны полоски $u_3(x_1,0,0)$

$$u_{3,1}(x_1,0,0) = \int\limits_0^{x_1} 2\varepsilon_{31,1}(s,0,0) - \varepsilon_{11,3}(s,0,0)ds = 0,$$
$$u_3(x_1,0,0) = \int\limits_0^{x_1} u_{3,1}(s,0,0)ds = 0.$$

Таким образом, прогиб во вспомогательной задаче равен нулю, что и требовалось доказать. Стоит отметить, что хотя прогиб бесконечной пластины и полоски одинаков (с одинаковым распределением собственных деформаций по глубине), распределения остаточных напряжений различаются.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Реконструкция собственных деформаций методом разрезания образца на полоски

Б.1 Описание метода

При изготовлении пластин с применением температурной обработки или при аддитивном производстве конструкции поле собственных деформаций может возникнуть по всей толщине детали. Упомянутые выше методы реконструкции поля собственных деформаций и остаточных напряжений не подходят для этого случая, потому что они рассчитаны на ситуации, когда собственные деформации сконцентрированы в тонком приповерхностном слое и для тонких пластин. Рассмотрим способ реконструкции, применимый для определения полей по всей толщине достаточно толстого бруса. Для использования данного метода из исследуемой пластины или детали необходимо вырезать брус удобных размеров.

Рассматривается брус прямоугольного сечения и декартова система координат, ось x_1 которой направлена вдоль длины бруса, ось x_2 — вдоль ширины, ось x_3 — вдоль толщины. Тензор собственных деформаций изменяется только вдоль x_3 и имеет вид

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} f(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & g(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -f(x_3) - g(x_3) \end{pmatrix}.$$

Метод реконструкции $f(x_3)$ по всей толщине бруса состоит в следующем:

1. Брус нарезается на n достаточно тонких полосок, плоскость которых ортогональна направлению изменения собственных деформаций x_3. «Достаточно тонкие» означает, что по толщине i-той полоски ($i = 1..n$), распределение компоненты собственной деформации близко к линейному и в дальнейшем будет считаться линейным $f_i(x_3) = c_1^i x_3 + c_2^i$.

2. У полосок измеряются прогибы и по их значению восстанавливаются значения производной $f_i'(x_3) = \text{const} = c_1^i$ по формуле

$$c_1^i = \frac{8}{L^2} w_i, \tag{Б.1}$$

где L есть длина полосок, w_i — прогиб i-той полоски.

3. После того, как будут определены значения производных в каждой из полосок, $f(x_3)$ по всей толщине бруса, имеющая вид кусочно линейной непрерывной функции, составляется из n звеньев соответствующего наклона. Формально можно записать

$$f(x_3) = \begin{cases} c_1^1 x_3 & ,0 \leqslant x_3 < h_1 \\ c_1^2 x_3 + c_1^1 h_1 & ,h_1 \leqslant x_3 < h_1 + h_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1^i x_3 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} c_1^j h_j & , \sum\limits_{j=1}^{i-1} h_j \leqslant x_3 < \sum\limits_{j=1}^{i} h_j \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1^n x_3 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} c_1^j h_j & , \sum\limits_{j=1}^{n-1} h_j \leqslant x_3 \leqslant h \end{cases}, \tag{Б.2}$$

где h_i есть толщина i-той полоски, $h = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$ — толщина всего бруса. Разрешающая способность метода зависит от того, насколько тонкие полоски возможно нарезать. На практике, при электроэрозионной резке, минимальная толщина полосок имеет порядок 1мм, поэтому данный метод неприменим для реконструкции распределения собственных деформаций, наведённых поверхностной обработкой детали типа обдувки дробью, обработки ультразвуком, обстрелом лазерными импульсами и т. д., где толщина всего наведённого слоя собственных деформаций равна $0.1 - 2$мм.

Чтобы получить формулу связи (Б.1), достаточно подставить линейное соотношение $f(x_3) = c_1 x_3 + c_2$ в первое выражение (2.8) и выразить c_1 (выражение для прогиба пластины применимо в случае полоски в силу теоремы, доказанной в приложении А).

В случае узкого бруса, после определения компоненты собственных деформаций $f(x_3)$, можно найти остаточные напряжения

$$\sigma_{11}(x_3) = E\left(c_1 x_3 + c_2 - f(x_3)\right), \tag{Б.3}$$

где E есть модуль Юнга, c_1,c_2 находятся по формулам (2.6), остальные компоненты напряжений равны нулю. Если брус прикреплён к жёсткому основанию, то он выпрямляется, а формула для остаточных напряжений примет вид

$$\sigma_{11}(x_3) = Ef(x_3). \qquad \text{(Б.4)}$$

Если брус вырезан из пластины с изотропным в её плоскости полем собственных деформаций, то ненулевые компоненты остаточных напряжений будут иметь вид (2.9). В промежуточном случае между узким брусом и пластиной распределение остаточных напряжений имеет сложный вид, зависит от двух координат и, по-видимому, аналитически не реконструируется. Его можно найти, например, с помощью конечно-элементного моделирования упругого бруса с внедрённым известным полем собственных деформаций $f(x_3)$, $g(x_3)$.

Поперечные собственные деформации $g(x_3)$ не влияют на прогиб полосок и не определяются данным методом. Если исследуется пластина и есть основания полагать собственные деформации анизотропными в плоскости пластины, то можно вырезать два бруса ортогонально друг другу в направлении главных собственных деформаций. Применяя к ним обоим данный метод, можно получить $f(x_3)$ и $g(x_3)$.

Практически удобно работать с выпрямленным брусом, что достигается прикреплением бруса к достаточно жёсткому основанию. Это полезно проделать и в случае изначально прямого бруса, так как, при срезании с него полосок, он будет изгибаться. Стоит учитывать, что при выпрямлении бруса могут возникнуть дополнительные собственные деформации (пластические), искажающие конечный результат.

Нарезать металлический брус на полоски удобно, используя электроэрозионный станок, вносящий минимальные дополнительные собственные деформации в образцы симметрично по обеим сторонам полосок. Необходимо учитывать, что за счёт резки толщина полос уменьшается.

Похожий способ реконструкции изложен в меморандуме [158], использующем измерение длин полосок после разрезания [159]. Тот же способ измерения изменения длин досок после разрезания бруса, реализованный на другой измерительной базе, применяется при определении остаточных напряжений в древесине после сушки с помощью запатентованного прибора [160]. Однако, такой способ сложнее применять на практике вследствие необходимости использования специализированного оборудования, так как достаточно точно

определить малые изменения длины изогнутой полоски намного сложнее, чем определение её прогиба.

По результатам, описанным в этом разделе, получен патент на изобретение [11].

Б.2 Примеры применения метода

Б.2.1 Брус из сплава АМг5

Образец из отожжённого проката АМг5 изготовлен в лаборатории Керченского государственного морского технологического университета. Брус размерами 25 × 10 × 250мм был закреплен пятью винтами М6 на горизонтальной стальной плите, прижатой к столу в двенадцати точках и прокован пневматическим инструментом (рис.Б.1). Проковка осуществлялась в один проход пневматическим молотком SA7401H AIRPRO, закрепленном на колонне уста-

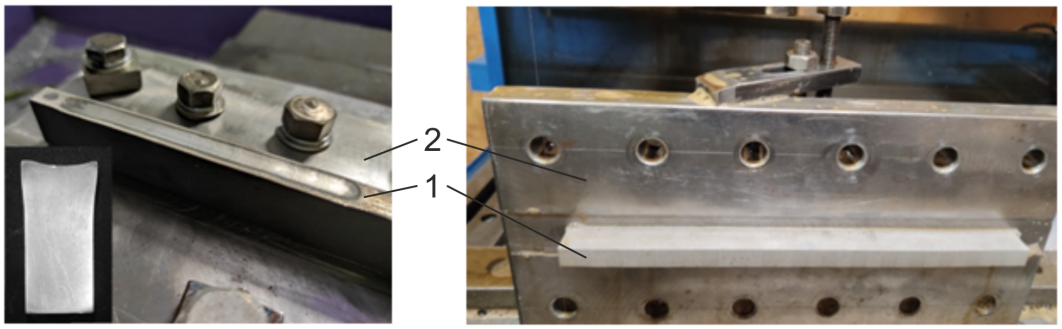


Рисунок Б.1 — Брус из сплава АМг5 «1», прикреплённый к стальной пластине «2» и прокованный пневмомолотком сверху.

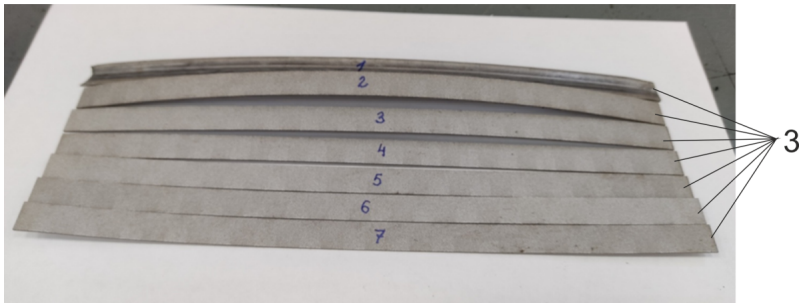


Рисунок Б.2 — Полоски, нарезанные из образца рис.Б.1 на электроэрозионном станке.

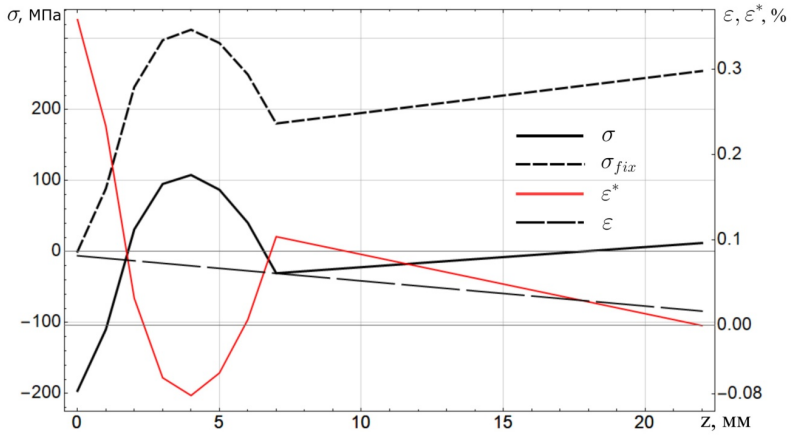


Рисунок Б.3 — Распределения в образце (рис.Б.1) собственных деформаций (красным), полных деформаций (крупный пунктир), остаточных напряжений в свободном брусе (чёрным) и остаточных напряжений в закреплённом брусе (мелкий пунктир), реконструированные по прогибам полос рис.Б.2.

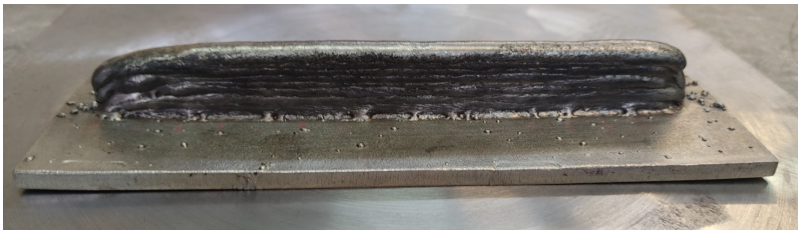
новки, снабженным бойком со сферическим наконечником радиуса 15 мм. Использовались штатное значение рабочего давления 0.6МПа, давление прижима бойка 0.2МПа и скорость подачи 3.3мм/с, обеспечивающая равномерность обработки заготовки. Со стороны прокованной грани были срезаны электроэрозионным станком 7 полос толщиной 1мм (рис.Б.2). Прогиб каждой полосы определялся как среднее двух значений прогиба ее концов, которые измерялись штангенрейсмусом на базе 120мм от ее центральной точки, где она фиксировалась струбциной. Оставшаяся часть бруса была отделена от основания, и ее прогиб также измерен.

Абсолютные значения прогибов полос составляли $7 - 15$мм, оставшейся части бруса — 0.5мм, а измерение их продольных деформаций невозможно без специальной методики и оборудования. По ряду дискретных значений прогибов полос с использованием формул (Б.1),(Б.2),(Б.3),(Б.4) были реконструированы распределения собственных деформаций и остаточных напряжений в брусе, закрепленном на жестком основании, а также отделенном от него (рис.Б.3). В расчетах задавались значения $L = 250$мм, $h = 20$мм, $h_1 = 18$мм, $h_i = 1$мм,$i = 2..8$, $E = 71$ГПа.

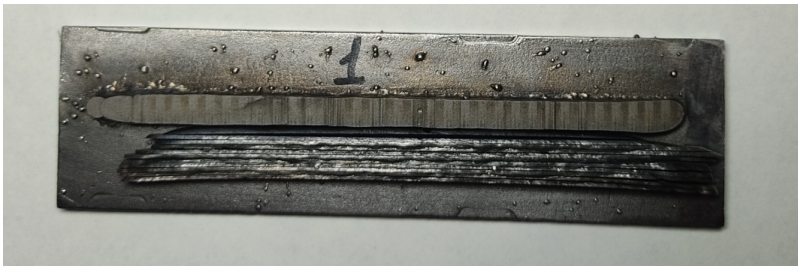
Б.2.2 Стальное ребро аддитивно возведённое на стальном основании

Два примера, описанные в этом разделе, имеют целью исследование особенностей распределения остаточных напряжений при возведении ребра на пластине при использовании двух различных технологий аддитивного производства [161].

На основание — прямоугольную пластину 180×50×5мм, изготовленную из стали 12Х18Н10Т, прижатую к горизонтальному столу автоматической установки гибридного аддитивного производства в восьми точках, наплавлялось ребро, состоящее из десяти слоев материала. Использовалась проволока AISI 308 LSi диаметром 1.2мм и технология холодного переноса металла с наплавкой слоя по зигзагообразной траектории ±45°. Задавались значения скорости наплавки



а)



б)



в)

Рисунок Б.4 — Образцы-рёбра аддитивно возведённые на основании а) искажение конструкции непрокованного образца, б) непрокованный образец «А», нарезанный на полоски, в) образец с послойной проковкой «В», нарезанный на полоски.

слоя длиной 150мм — 8.3мм/с и времени паузы между проходами наплавки — 150с. Образец с наплавленным ребром без проковки будет обозначаться буквой «А». На вторую пластину с такими же параметрами тоже наплавлялось ребро. После каждого наплавленного слоя проводилась проковка пневматическим молотком (описанным в разделе Б.2.1), в результате чего изготовлен образец «В».

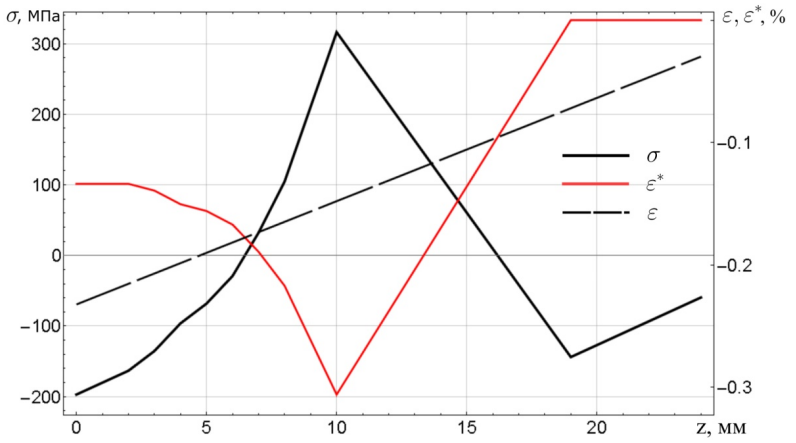
Средние высота и ширина сечения ребра, возведенного без проковки, составили 19×8.5мм, а с послойной проковкой — 16×9.7мм. На рис.Б.4,а можно увидеть искажение основания одного из образцов, А на рис.Б.4,б и в — образцы без проковки и с послойной проковкой, соответственно, со срезанными с них электроэрозионным способом десятью полосами толщиной 1мм. Пластина основания освобожденного от закреплений образца в обоих случаях приобрела продольный изгиб под стенкой, сопровождаемый поперечным изгибом вблизи концов стенки. Далее с конструкции с закрепленным в электроэрозионной установке основанием было срезано по 10 полос и измерены их прогибы на базе 120мм. Продольные прогибы основания образцов после срезания с них полос, измеренные вдоль середины ребра, составили 1.88мм для образца «А» и 1.73мм для образца «В». Далее с образцов было срезано на фрезерном станке основание ребра по уровню верхней грани пластины. После такой операции величина продольного изгиба основания уменьшилась до 1.36мм для образца «А» и 0.95мм для образца «В». Прогибы 0.52мм и 0.78мм для образцов «А» и «В» необходимо приписать собственным деформациям основания ребра; остаточные искажения подложки (главным образом на краях), вызванные ее недостаточной толщиной, в исследовании не учитываются.

Ряды прогибов полос для исследуемых образцов (рис.Б.4,б,в) имеют качественно различный вид: для ребра, возведенного без послойной проковки, (образец «А») знак изгиба полос одинаков и противоположен знаку изгиба оставшейся части образца, а для ребра, возведенного с послойной проковкой, (образец «В») этот знак однократно изменяется, но в целом знак изгиба отрезанной части совпадает со знаком изгиба оставшейся части образца. По рядам прогибов полос и основания стенки были рассчитаны распределения собственных и полных деформаций, а также остаточных напряжений по высоте конструкции. При этом задавались значения $L = 120$мм, $h = 14$мм, $h_1 = 9$мм (образец «А»), $h_1 = 9$мм (образец «В»), $h_i = 1$мм, $i = 2..11$, $E = 200$ГПа и учитывались геометрические размеры конструкции и значения базы, на которой измерялись прогибы полос и оставшейся части конструкции, собственные

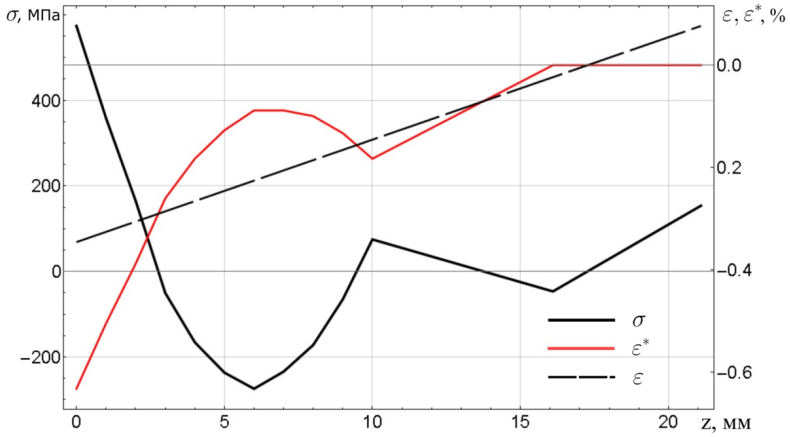
деформации в несрезанной части ребра (полоса с индексом 1) считались нулевыми.

Реконструированные по формулам (Б.1),(Б.2),(Б.3),(Б.4) распределения исследуемых величин приведены на рис.Б.5.

Реконструкция показала, что чистый прогиб конструкции (за счет собственных деформаций в стенке), наплавленной без проковки, оказался приблизительно вдвое меньше, чем наплавленной с послойной проковкой. Кроме того, в верхней и нижней частях стенки, наплавленной без проковки, остаточные напряжения сжимающие, а для образца, наплавленного с проковкой, эти напряжения растягивающие. Суммируя результаты исследования, можно отметить относительно неблагоприятное влияние послойной проковки на искажение стенки на подложке и остаточные напряжения в сравниваемых образцах. Использованный метод показывает свою эффективность и определенные преимущества по сравнению с методом рентгеновской дифракции в задачах аддитивного производства.



а)



б)

Рисунок Б.5 — Распределение собственных, полных деформаций и остаточных напряжений в ребре на основании а) без послойной проковки, б) с послойной проковкой.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Реконструкция полей в образце по разнородным данным

В.1 Описание метода

Опишем способ реконструкции полей собственных деформаций и напряжений по всей толщине достаточно толстой пластины с высоким градиентом этих полей вблизи поверхности с обеих сторон. Ситуация, когда высокий градиент присутствует вблизи только одной из сторон, чаще встречающаяся на практике, очевидно, является частным случаем и подходит для применения нижеописанного метода. Такое распределение собственных деформаций может возникнуть при изготовлении пластины с применением температурной обработки и, затем, дополнительной обработки поверхности с одной или обеих сторон. В этом случае логично исследовать приповерхностные и среднюю области образца различными методами. Например, методом сверления отверстий определить распределения остаточных напряжений вблизи поверхностей, где градиенты велики. А среднюю часть, недоступную для метода сверления отверстий, исследовать методом разрезания на полоски, имеющим меньшую разрешающую способность и описанным выше в приложении Б, и получить там распределение собственных деформаций. Схематически задача изображена на рис.В.1

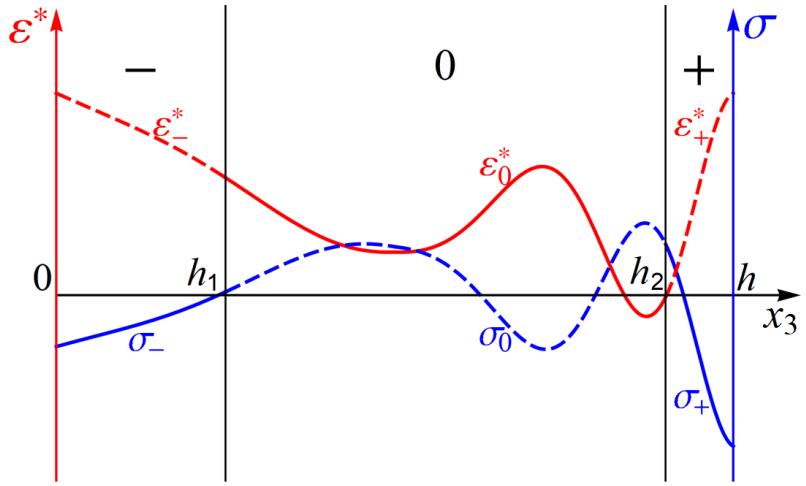


Рисунок В.1 — Схематическое изображение распределений собственных деформаций и остаточных напряжений вдоль толщины пластины. Сплошной линией нарисованы известные участки распределений, пунктиром изображены участки которые требуется реконструировать.

Поставим задачу математически. Рассматривается бесконечная пластина толщины h, в которой присутствует поле собственных деформаций однородно и изотропно распределённое в плоскости x_1,x_2 и изменяющееся вдоль толщины x_3 вида

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon^*(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^*(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon^*(x_3) \end{pmatrix},$$

компонента ε^*_{33} может быть принята произвольной функцией x_3, что не повлияет на прогиб пластины и распределение остаточных напряжений. В результате, в пластине возникает поле остаточных напряжений вида

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача состоит в определении функций $\varepsilon^*(x_3)$,$\sigma(x_3)$ по всей толщине $x_3 \in [0,h]$, если они известны на определённых участках: $\varepsilon^*(x_3)$ известна на $x_3 \in [h_1,h_2]$, а $\sigma(x_3)$ известна на $x_3 \in [0,h_1]$ и $x_3 \in [h_2,h]$ (рис.В.1). Заметим, что обозначения h_1,h_2 это не толщины слоёв «$-$» и «$+$», а координаты их внутренних границ вдоль оси x_3.

При решении поставленной задачи за основу возьмём формулы, связывающие поля напряжений и собственных деформаций в пластине из раздела 2.1.1, записанные для случая изотропного в плоскости пластинки поля собственных деформаций

$$\sigma(x_3) = \frac{E}{1-\nu}\left(c_1 x_3 + c_2 - \varepsilon^*(x_3)\right), \quad \varepsilon^*(x_3) = c_1 x_3 + c_2 - \frac{1-\nu}{E}\sigma(x_3),$$
$$c_1 = \frac{12}{h^3}\int\limits_0^h x_3\varepsilon^*(x_3)dx_3 - \frac{6}{h^2}\int\limits_0^h \varepsilon^*(x_3)dx_3,\; c_2 = -\frac{6}{h^2}\int\limits_0^h x_3\varepsilon^*(x_3)dx_3 + \frac{4}{h}\int\limits_0^h \varepsilon^*(x_3)dx_3. \tag{В.1}$$

Разделим функции на 3 участка «$+$», «0», «$-$» (рис.В.1):

$$\varepsilon^*(x_3) = \begin{cases} \varepsilon^*_-(x_3), & 0 \leqslant x_3 < h_1 \\ \varepsilon^*_0(x_3), & h_1 \leqslant x_3 \leqslant h_2 \\ \varepsilon^*_+(x_3), & h_2 < x_3 \leqslant h \end{cases}, \qquad \sigma(x_3) = \begin{cases} \sigma_-(x_3), & 0 \leqslant x_3 < h_1 \\ \sigma_0(x_3), & h_1 \leqslant x_3 \leqslant h_2 \\ \sigma_+(x_3), & h_2 < x_3 \leqslant h \end{cases}, \tag{В.2}$$

где $\varepsilon_0^*(x_3)$, $\sigma_-(x_3)$, $\sigma_+(x_3)$ известны, а $\varepsilon_-^*(x_3)$, $\varepsilon_+^*(x_3)$, $\sigma_0(x_3)$ требуется определить. Подставим (В.2) в выражения для констант (В.1):

$$\begin{aligned} c_1 = 12h^{-3} &\left(\int_0^{h_1} x_3\varepsilon_-^*(x_3)dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} x_3\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + \int_{h_2}^{0} x_3\varepsilon_+^*(x_3)dx_3 \right) - \\ &- 6h^{-2} \left(\int_0^{h_1} \varepsilon_-^*(x_3)dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + \int_{h_2}^{0} \varepsilon_+^*(x_3)dx_3 \right), \\ c_2 = -6h^{-2} &\left(\int_0^{h_1} x_3\varepsilon_-^*(x_3)dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} x_3\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + \int_{h_2}^{0} x_3\varepsilon_+^*(x_3)dx_3 \right) + \\ &+ 4h^{-1} \left(\int_0^{h_1} \varepsilon_-^*(x_3)dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + \int_{h_2}^{0} \varepsilon_+^*(x_3)dx_3 \right). \end{aligned} \tag{В.3}$$

Теперь, используя (В.1), выразим $\varepsilon_-^*(x_3)$, $\varepsilon_+^*(x_3)$ через $\sigma_-(x_3)$, $\sigma_+(x_3)$ и c_1,c_2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_-^*(x_3) &= c_1x_3 + c_2 - \frac{1-\nu}{E}\sigma_-(x_3), \\ \varepsilon_+^*(x_3) &= c_1x_3 + c_2 - \frac{1-\nu}{E}\sigma_+(x_3) \end{aligned} \tag{В.4}$$

и подставим в (В.3). Получится система двух линейных уравнений относительно c_1,c_2, решив которую, получим выражения для констант:

$$
\begin{aligned}
c_1 = {} & \frac{12}{(h_2-h_1)^3}\int\limits_{h_1}^{h_2} x_3\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 - 6\frac{h_1+h_2}{(h_2-h_1)^3}\int\limits_{h_1}^{h_2}\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 - \\
& - \frac{6(1-\nu)}{E(h_2-h_1)^3}\left\{2\left(\int\limits_0^{h_1} x_3\sigma_-(x_3)dx_3 + \int\limits_{h_2}^{h} x_3\sigma_+(x_3)dx_3\right) - \right. \\
& \left. -(h_1+h_2)\left(\int\limits_0^{h_1}\sigma_-(x_3)dx_3 + \int\limits_{h_2}^{h}\sigma_+(x_3)dx_3\right)\right\}, \\
c_2 = {} & -6\frac{h_1+h_2}{(h_2-h_1)^3}\int\limits_{h_1}^{h_2} x_3\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + 4\frac{h_1^2+h_1h_2+h_2^2}{(h_2-h_1)^3}\int\limits_{h_1}^{h_2}\varepsilon_0^*(x_3)dx_3 + \\
& + \frac{1-\nu}{E(h_2-h_1)^3}\left\{6(h_1+h_2)\left(\int\limits_0^{h_1} x_3\sigma_-(x_3)dx_3 + \int\limits_{h_2}^{h} x_3\sigma_+(x_3)dx_3\right) - \right. \\
& \left. -4(h_1^2+h_1h_2+h_2^2)\left(\int\limits_0^{h_1}\sigma_-(x_3)dx_3 + \int\limits_{h_2}^{h}\sigma_+(x_3)dx_3\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

Задача решена: имея значения констант (B.5), по формулам (B.4) можно найти $\varepsilon_-^*(x_3)$, $\varepsilon_+^*(x_3)$, а по формуле

$$
\sigma_0(x_3) = \frac{E}{1-\nu}\left(c_1x_3 + c_2 - \varepsilon_0^*(x_3)\right) \tag{B.6}
$$

получим $\sigma_0(x_3)$.

На практике найденные функции (B.2) будут иметь разрывы в точках h_1,h_2. Источником этих разрывов служит погрешность экспериментальных данных, а также их разнородность. Например, при реконструкции поля напряжений методом сверления отверстий или методом Давиденкова используются упругие константы материала, а при получении поля собственных деформаций методом разрезания на полоски — нет. Поэтому для измеренных остаточных напряжений можно ввести поправки приняв $k\sigma_-(x_3)$, $k\sigma_+(x_3)$ в качестве исходных данных, для собственных деформаций которые определены более прямым ме-

тодом поправки не вводятся. Параметр k определяется минимизацией невязки

$$\left(\frac{k\sigma_-(h_1)-\sigma_0(h_1)}{\Delta\sigma}\right)^2+\left(\frac{k\sigma_+(h_2)-\sigma_0(h_2)}{\Delta\sigma}\right)^2+ \\ +\left(\frac{\varepsilon^*_-(h_1)-\varepsilon^*_0(h_1)}{\Delta\varepsilon^*}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon^*_+(h_2)-\varepsilon^*_0(h_2)}{\Delta\varepsilon^*}\right)^2, \quad \text{(B.7)}$$

где $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon^*$ есть обезразмеривающие множители которые играют роль весовых коэффициентов, их можно взять равными размахам измеренных распределений.

Более часто встречается ситуация когда напряжения определены только с одной стороны пластины, возникающая для пластин, обработанных с одной стороны. В этом случае участок «+» или «−» отсутствует, в (B.5) следует положить $h_2 = h$ или $h_1 = 0$, а (B.2) примет вид

$$\varepsilon^*(x_3)=\begin{cases}\varepsilon^*_-(x_3), & 0\leqslant x_3<h_1\\ \varepsilon^*_0(x_3), & h_1\leqslant x_3\leqslant h\end{cases},\quad \sigma(x_3)=\begin{cases}\sigma_-(x_3), & 0\leqslant x_3<h_1\\ \sigma_0(x_3), & h_1\leqslant x_3\leqslant h\end{cases}$$

или

$$\varepsilon^*(x_3)=\begin{cases}\varepsilon^*_0(x_3), & 0\leqslant x_3<h_2\\ \varepsilon^*_+(x_3), & h_2\leqslant x_3\leqslant h\end{cases},\quad \sigma(x_3)=\begin{cases}\sigma_0(x_3), & 0\leqslant x_3<h_2\\ \sigma_+(x_3), & h_2\leqslant x_3\leqslant h\end{cases}.$$

По результатам, описанным в этом разделе, получен патент [13].

B.2 Пример применения метода

Для исследования использовалось металлоизделие в виде образца листового проката судовой стали А32 толщиной 14 мм размерами 300х60х14 мм, подвергнутого выдержке в течение 21 минуты в печи при температуре аустенитизации 900°С, с последующим односторонним ускоренным охлаждением. Образец изготовлен в лаборатории Керченского государственного морского технологического университета. Из середины указанного образца вырезали призматический брус с прямоугольным поперечным сечением размером 300х10х14 мм. Далее посредством установки MTS3000-Restan (SINT Technology) на верхней и нижней поверхности бруса были просверлены отверстия на глубину до 1 мм и

методом сверления отверстий были определены распределения остаточных напряжений на глубине до 1 мм с обеих сторон (рис.В.2, сплошные синие линии).

Затем посредством электроэрозионной установки исследуемый брус был разрезан на 11 полос толщиной 1 мм. Прогибы средних 9ти полос были измерены электронным штангенрейсмусом и было определено распределение собственных деформаций согласно способу, описанному в приложении Б (рис.В.2, сплошная красная линия). По этим данным, по формулам (В.4),(В.5),(В.6) со значениями констант упругости $E = 200$ГПа, $\nu = 0.29$, были реконструированы недостающие фрагменты распределений собственных деформаций и остаточных напряжений, показанные на рис.В.2 красными и синей штриховыми линиями, соответственно.

На рис.В.3 показаны распределения собственных деформаций и остаточных напряжений, найденные с одновременной минимизацией невязки (В.7), в результате которой найдено $k = 1.74$. Распределения на рис.В.3, в отличие от распределений на рис.В.2, имеют гораздо меньшие разрывы, а следовательно, более физичны. Также можно убедиться, что распределения остаточных напряжений на В.2 и В.3 являются самоуравновешенными. Оба варианта демонстрируют значительные градиенты собственных деформаций и остаточных напряжений вблизи границ отрезка и плавное изменение этих величин во внут-

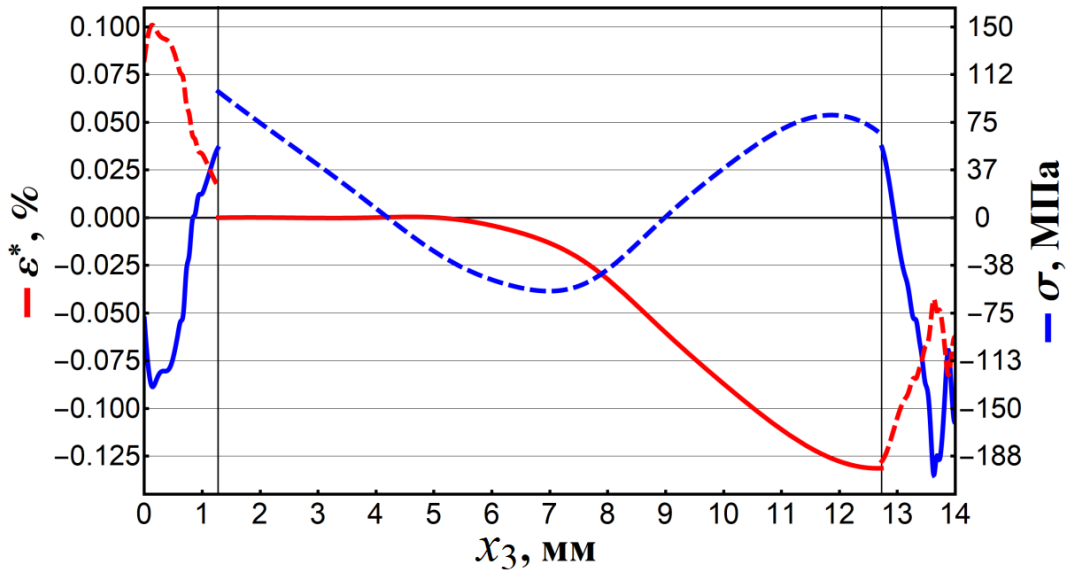


Рисунок В.2 — Реконструированные и измеренные распределения продольных остаточных напряжений и собственных деформаций в брусе. Сплошные линии — экспериментально определённые участки распределений, пунктирные линии — реконструированные участки.

ренней его части. Использованные методы сверления отверстий и разрезания на полосы по отдельности не способны воспроизвести данные особенности распределений, вызванные градиентной механотермической обработкой образца.

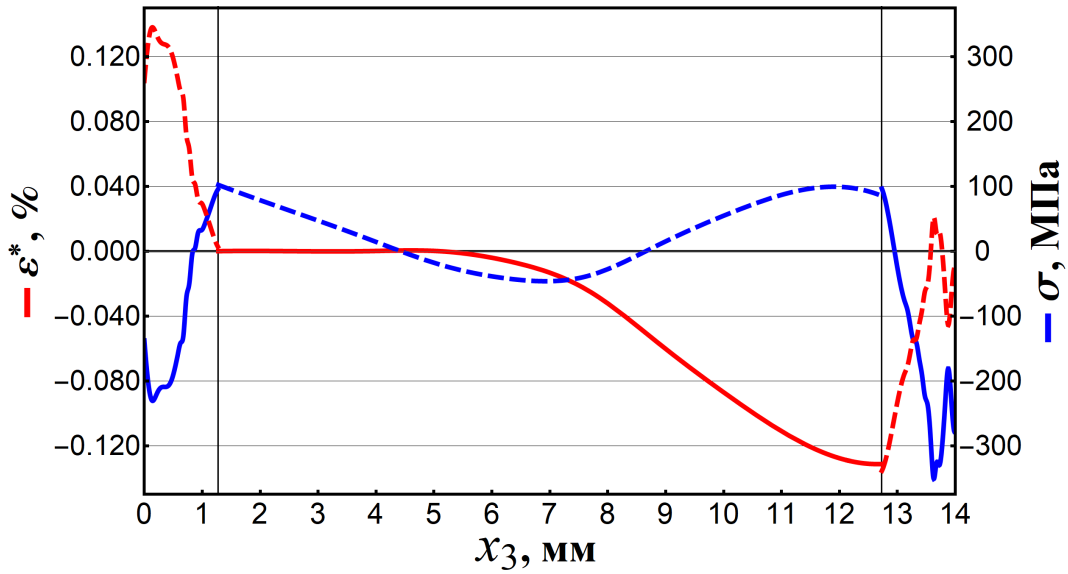


Рисунок В.3 — Реконструированные и измеренные распределения продольных остаточных напряжений и собственных деформаций в брусе, с поправкой на измеренные остаточные напряжения $k = 1.74$. Сплошные линии — экспериментально определённые участки распределений, пунктирные линии — реконструированные участки.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Реконструкция полей собственных деформаций и остаточных напряжений в образце цилиндрической геометрии

Г.1 Задача о трубе

Рассмотрим задачу об остаточных напряжениях, возникающих в длинной трубе с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 и слоем собственных деформаций, рис.Г.1. Напряженно-деформированное состояние подчиняется полевым уравнениям (2.1). Компоненты тензора собственных деформаций в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ примем

$$\varepsilon^*_{ij} = \begin{pmatrix} -f(r) - g(r) & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 \\ 0 & 0 & g(r) \end{pmatrix}. \qquad (\Gamma.1)$$

Как и в рассмотренном ранее случае пластины, будем считать что слой собственных деформаций не занимает всю толщину трубы. Вследствие симметрии

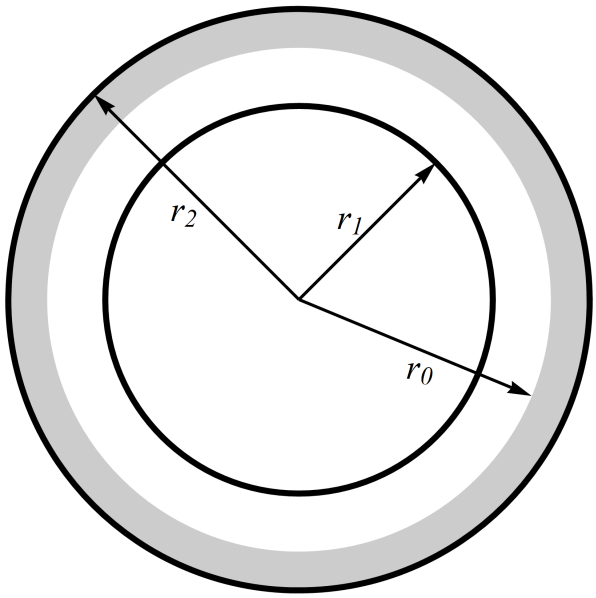


Рисунок Г.1 — Ортогональное сечение трубы (серым цветом обозначен слой собственных деформаций).

задачи, компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ будут иметь вид

$$u_i = (u_r(r), 0, c_1 z)\,, \tag{Г.2}$$

где c_1 — константа. (Г.2) подставляется в выражение для тензора малых деформаций (2.1), а затем компоненты тензора напряжений выражаются из закона Гука (2.1):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda c_1 + \lambda r^{-1} u_r(r) + (\lambda + 2\mu) u_r'(r) + 2\mu(f(r) + g(r)),\\
\sigma_{\theta\theta} &= \lambda c_1 + (\lambda + 2\mu) r^{-1} u_r(r) + \lambda u_r'(r) - 2\mu f(r),\\
\sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) c_1 + \lambda r^{-1} u_r(r) + \lambda u_r'(r) - 2\mu g(r),
\end{aligned} \tag{Г.3}$$

остальные компоненты равны нулю. Уравнение равновесия (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}
\{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\}_i = \Bigg\{ (\lambda + 2\mu)\, r^{-2} \Bigg(& r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) - u_r(r) + \\
& + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} r^2 (f'(r) + g'(r)) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} r (2f(r) + g(r)) \Bigg), 0, 0 \Bigg\} = \{0,0,0\}
\end{aligned} \tag{Г.4}$$

т.е. одного обыкновенного дифференциального уравнения относительно $u_r(r)$, имеющего общее решение

$$u_r(r) = c_2 r + c_3 r^{-1} - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} r \int_{r_1}^{r} s^{-1}(2f(s) + g(s))ds - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} r^{-1} \int_{r_1}^{r} s g(s) ds. \tag{Г.5}$$

Выражения для компонент напряжений (Г.3) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & -2\mu c_3 r^{-2} + \lambda c_1 + 2(\lambda + \mu) c_2 - \\
& - \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_1}^{r} s^{-1}(2f(s) + g(s))ds + \frac{2\mu^2}{\lambda + 2\mu} r^{-2} \int_{r_1}^{r} s g(s) ds,\\
\sigma_{\theta\theta} = & \, 2\mu c_3 r^{-2} + \lambda c_1 + 2(\lambda + \mu) c_2 - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} f(r) - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g(r) - \\
& - \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_1}^{r} s^{-1}(2f(s) + g(s))ds - \frac{2\mu^2}{\lambda + 2\mu} r^{-2} \int_{r_1}^{r} s g(s) ds,\\
\sigma_{zz} = & \, (\lambda + 2\mu) c_1 + 2\lambda c_2 - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} f(r) - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g(r) - \\
& - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \int_{r_1}^{r} s^{-1}(2f(s) + g(s))ds.
\end{aligned} \tag{Г.6}$$

Константы c_1, c_2, c_3 найдем из граничных условий

$\sigma_{rr}|_{r=r_1} = 0,\ \sigma_{rr}|_{r=r_2} = 0$ — внутренняя и внешняя поверхности трубы свободны от усилий,

$\int\limits_{r_1}^{r_2} r\sigma_{zz}(r)dr = 0$ — труба не растягивается и не сжимается внешними силами вдоль оси z.

В итоге получим выражения для констант:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} k_2, \\
c_2 &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left(\mu r_2^2 k_1 - (\lambda + \mu) k_2 \right), \\
c_3 &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left((\lambda + \mu) r_2^2 k_1 - \mu k_2 \right), \\
k_1 &= \int\limits_{r_1}^{r_2} r^{-1}(2f(r) + g(r))dr,\ k_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} r g(r) dr.
\end{aligned}
\tag{Г.7}
$$

Г.2 Разрезанная труба

Для экспериментального определения остаточных напряжений методом Давиденкова используют разрезанный отрезок трубы. Поэтому рассмотрим задачу о разрезанной вдоль образующей трубе со слоем собственных деформаций. Для этого поставим вспомогательную задачу.

Цилиндрическая труба без собственных деформаций разрезана вдоль образующей (рис. Г.2). К двум получившимся при разрезании границам приложены распределенные усилия $F(r)$ и $-F(r)$. Примем $F(r)$ равным, взятым с обратным знаком, окружным напряжениям, возникающим в сплошной трубе со слоем собственных деформаций $F(r) = -\sigma_{\theta\theta}$ из (Г.6),(Г.7). Тогда сумма решений вспомогательной задачи и задачи о сплошной трубе, описанной в разделе Г.1, даст решение задачи о разрезанной трубе со слоем собственных деформаций (под решением понимаются поля напряжений, деформаций и перемещений). Следуя принципу Сен-Венана, пренебрежем эффектами вблизи границ, полученных при разрезании трубы, и будем считать напряженно-деформированное

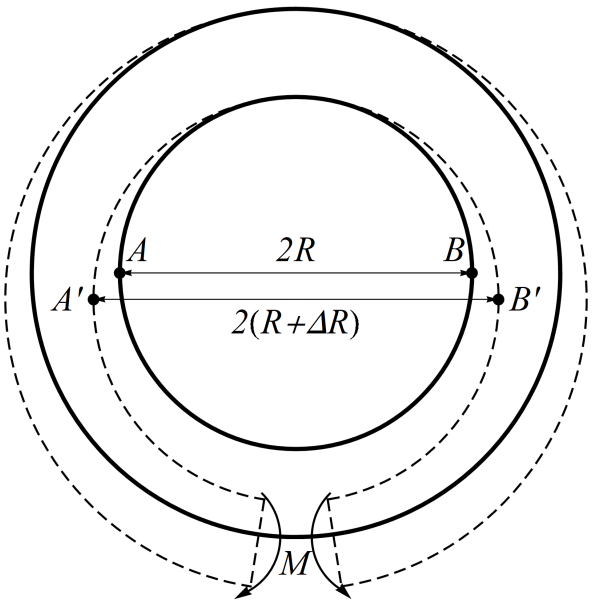


Рисунок Г.2 — Изменение радиуса трубы при разрезании.

состояние независящим от θ. Тогда компоненты тензора деформаций будут иметь вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(r) \end{pmatrix}.$$

Уравнение совместности деформаций $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$ примет вид

$$(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla)_{ij} = \begin{pmatrix} -r^{-1}\varepsilon'_{zz}(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon''_{zz}(r) & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-1}\left(\varepsilon'_{rr}(r) - 2\varepsilon'_{\theta\theta}(r) - r\varepsilon''_{\theta\theta}(r)\right) \end{pmatrix}. \tag{Г.8}$$

Общее решение уравнений (Г.8) имеет вид

$$\varepsilon_{zz} = c_1,\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(r) + r\varepsilon'_{\theta\theta}(r) + c_2. \tag{Г.9}$$

Далее напряжения выражаются через деформации, используя закон Гука и (Г.9), и записывается уравнение равновесия

$$\{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\}_i = \left\{(\lambda + 2\mu)r^{-1}\left(r^2\varepsilon''_{\theta\theta}(r) + 3r\varepsilon'_{\theta\theta}(r) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}c_2\right), 0, 0\right\} = \{0,0,0\},$$

общее решение которого имеет вид

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}c_2 \ln(r) + c_3 r^{-2} + c_4. \tag{Г.10}$$

Константы c_1, c_2, c_3, c_4 в выражениях (Г.9),(Г.10) найдем из следующих граничных условий:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}|_{r=r_1}=0,\ \sigma_{rr}|_{r=r_2}=0\ \text{ — внутренняя и внешняя поверхности}\\ \text{свободны от усилий,}\\ \int\limits_{r_1}^{r_2}2\pi r\sigma_{zz}(r)dr=0,\ \text{ — отсутствуют осевые усилия}\\ \int\limits_{r_1}^{r_2}r\sigma_{\theta\theta}(r)dr=M,\end{gathered}\tag{Г.11}$$

где $M=-\int\limits_{r_1}^{r_2}r\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r)dr$ — момент сил $F(r)$, приложенных к границе разреза, отнесённый к длине трубы, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r)$ — окружные напряжения в сплошной трубе со слоем собственных деформаций (Г.6),(Г.7). Выражение для M через собственные деформации записывается так:

$$\begin{aligned}M=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Bigg(&2(\lambda+\mu)\int\limits_{r_1}^{r_2}rf(r)dr+(\lambda+2\mu\ln(r_2))\int\limits_{r_1}^{r_2}rg(r)dr-\\&-2\mu\int\limits_{r_1}^{r_2}r\ln(r)g(r)dr\Bigg)-\\-\frac{2r_1^2\mu}{(r_2^2-r_1^2)(\lambda+2\mu)}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\Bigg(&r_2^2(\lambda+\mu)\int\limits_{r_1}^{r_2}r^{-1}(2f(r)+g(r))dr-\\&-\mu\int\limits_{r_1}^{r_2}rg(r)dr\Bigg)\end{aligned}\tag{Г.12}$$

Стоит отметить, что хотя выше говорилось о том, что к границам (получившимся после разрезания) приложены усилия равные, взятым с противоположным знаком, окружным напряжениям, возникающим в сплошной трубе со слоем собственных деформаций, в граничном условии (Г.11) требуется лишь равенство момента[37]. Следуя принципу Сен-Венана, предполагается, что такое упрощение

[37]Интегральное равенство $\int\limits_{r_1}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr=0$ выполнится в этой задаче автоматически (вследствие того что внутренняя и внешняя поверхности трубы свободны от усилий и напряжённо-деформированное состояние не зависит от θ), это равенство также верно и для напряжений в сплошной трубе со слоем собственных деформаций (Г.6),(Г.7)

будет влиять лишь на напряжённо-деформированное состояние в области тела, близкой к полученным после разрезания границам. Оно не будет оказывать влияния на относительные перемещения точек A и B на рис.Г.2. Из граничных условий (Г.11),(Г.12) получим выражения для констант[38]:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = 0,\\
&c_2 = -2M(r_2^2 - r_1^2)\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\left((r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)^{-1},\\
&c_3 = -\frac{2Mr_1^2 r_2^2}{\mu}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left((r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)^{-1},\\
&c_4 = \frac{2M}{\mu(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+2\mu)(r_2^2 - r_1^2) - 2\mu(r_2^2\ln(r_2) - r_1^2\ln(r_1))}{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{Г.13}
$$

Нам интересно изменение радиуса трубы, поэтому определим перемещения $u_r(r,\theta)$, $u_\theta(r,\theta)$ во вспомогательной задаче. Из определения тензора деформаций

$$u_{r,r} = \varepsilon_{rr},\ u_r + u_{\theta,\theta} = r\varepsilon_{\theta\theta},$$

откуда

$$
\begin{aligned}
u_r(r,\theta) &= \int_{r_1}^{r} \varepsilon_{rr}(s)ds + F_1(\theta),\\
u_\theta(r,\theta) &= r\theta\varepsilon_{\theta\theta} - \theta\int_{r_1}^{r}\varepsilon_{rr}(s)ds - \int_0^{\theta} F_1(s)ds + F_2(r),
\end{aligned}
\tag{Г.14}
$$

где $F_1(\theta)$ и $F_2(r)$ — некоторые функции. Исходя из соображений симметрии задачи, $u_\theta(r,0) = 0$, поэтому из (Г.14) следует $F_2(r) \equiv 0$. Выражение для сдвиговых деформаций[39] $\varepsilon_{r\theta}{=}0{=}\frac{1}{2r}(u_{r,\theta} - u_\theta + ru_{\theta,r})$ с учетом (Г.14) примет вид

$$F_1'(\theta) + \int_0^{\theta} F_1(s)ds + \theta\left(\int_{r_1}^{r}\varepsilon_{rr}(s)ds + r^2\varepsilon_{\theta\theta}'(r) - r\varepsilon_{rr}(r)\right) = 0. \tag{Г.15}$$

[38]При этом напряжения выражаются через деформации с помощью закона Гука, а для деформаций используются выражения (Г.9) и (Г.10).

[39]Равных нулю вследствие независимости напряжённо-деформированного состояния от θ и того, что внутренняя и внешняя поверхности трубы свободны от усилий.

Из (Г.15) следует

$$\begin{gathered}\int\limits_{r_1}^{r}\varepsilon_{rr}(s)ds+r^2\varepsilon'_{\theta\theta}(r)-r\varepsilon_{rr}(r)=c_5,\\ F_1'(\theta)+\int\limits_{0}^{\theta}F_1(s)ds=-c_5\theta,\end{gathered}\tag{Г.16}$$

откуда

$$F_1(\theta)=c_6\cos(\theta)-c_5.\tag{Г.17}$$

Чтобы исключить жесткие движения трубы как целого, зафиксируем точку с координатами $r=r_1$, $\theta=0$: $u_r(r_1,0)=0$ (повороты были исключены ранее: $u_\theta(r,0)=0$). Тогда в (Г.17) $c_6=c_5$. Компоненты перемещений (Г.14) примут вид

$$\begin{gathered}u_r=\int\limits_{r_1}^{r}\varepsilon_{rr}(s)ds-c_5(1-\cos(\theta)),\\ u_\theta=r\theta\varepsilon_{\theta\theta}-\theta\int\limits_{r_1}^{r}\varepsilon_{rr}(s)ds+c_5(\theta-\sin(\theta)).\end{gathered}\tag{Г.18}$$

Константу c_5 найдём, подставив в первое уравнение (Г.16) выражения для деформаций (Г.9),(Г.10):

$$c_5=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}c_2r_1\ln(r_1)-c_3r_1^{-1}-(c_4+c_2)r_1.\tag{Г.19}$$

Интересны перемещения $u_r(r_1,\theta)$, $u_\theta(r_1,\theta)$ — точек трубы, лежащих на внутреннем радиусе, так как они будут определять изменение радиуса трубы после разрезания. Подставив выражения для деформаций (Г.9),(Г.10) в (Г.18), получим

$$\begin{gathered}u_r(r_1,\theta)=-c_5(1-\cos(\theta)),\\ u_\theta(r_1,\theta)=\theta\left(-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}r_1\ln(r_1)+c_3r^{-1}+c_4r\right)+c_5(\theta-\sin(\theta)),\end{gathered}\tag{Г.20}$$

выражения для констант c_1–c_5 даны в (Г.13) и (Г.19), выражение для момента M дано в (Г.12). Если изменение радиуса невелико, то можно считать

$$\begin{gathered}\Delta R=\left(u_r\left(r_1,\tfrac{\pi}{2}\right)+u_r\left(r_1,-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)/2=-c_5=\\ =M\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}r_1\frac{r_2^2-r_1^2+2r_2^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(r_2^2-r_1^2\right)^2-4r_1^2r_2^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}=\\ 4M\frac{1-\nu^2}{E}r_1\frac{r_2^2-r_1^2+2r_2^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(r_2^2-r_1^2\right)^2-4r_1^2r_2^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}.\end{gathered}\tag{Г.21}$$

Изменение радиуса линейно связано с моментом M. Если труба тонкостенная ($(r_2 - r_1)/r_1$ есть малый параметр), то (Г.21) совпадает с выражением, приведённым в [111]:

$$\Delta R_{\text{тонк}} = 3\frac{1-\nu^2}{E}\frac{(r_2+r_1)^2}{(r_2-r_1)^3}M. \qquad (\Gamma.22)$$

Первые два слагаемых разложений (Г.21) и (Г.22) в ряд по малому параметру совпадают.

Г.3 Метод Давиденкова (метод колец и полосок)

Для определения полей остаточных напряжений и собственных деформаций в трубе используют метод Давиденкова (метод колец и полосок). Сначала, из трубы вдоль её образующей вырезается полоска и исследуется методом полосок[40], как показано в разделе 2.1.2. При этом находится распределение осевых собственных деформаций $\varepsilon_{zz} = g(r)$, которое далее считается известным.

Далее из трубы вдоль образующей вырезается отрезок длины $L > 3h$ (по методу Давиденкова) либо тонкое кольцо $h > 3b$ (по методу колец и полосок). Затем отрезок трубы или кольцо разрезается вдоль образующей и происходит последовательное удаление внешних слоёв, при этом замеряется изменение радиуса ΔR. На выходе получается зависимость изменения радиуса от толщины удалённого слоя $\Delta R(a)$, рис.Г.3. Эти зависимости одинаковы для разрезанных трубы и кольца при одинаковых распределениях собственных деформаций $\varepsilon_{\theta\theta} = f(r)$ и $\varepsilon_{zz} = g(r)$.

Поставим задачу определения распределения окружных собственных деформаций $\varepsilon_{\theta\theta} = f(r)$ по зависимости $\Delta R(a)$. Также считается, что слой собственных деформаций не распространяется на всю толщину трубы, то есть существует такой радиус r_0, что

$$f(r) = g(r) = 0, \quad r \leqslant r_0. \qquad (\Gamma.23)$$

[40]Наличие поперечной кривизны в контексте метода полосок исследуется в разделе 2.3.2.

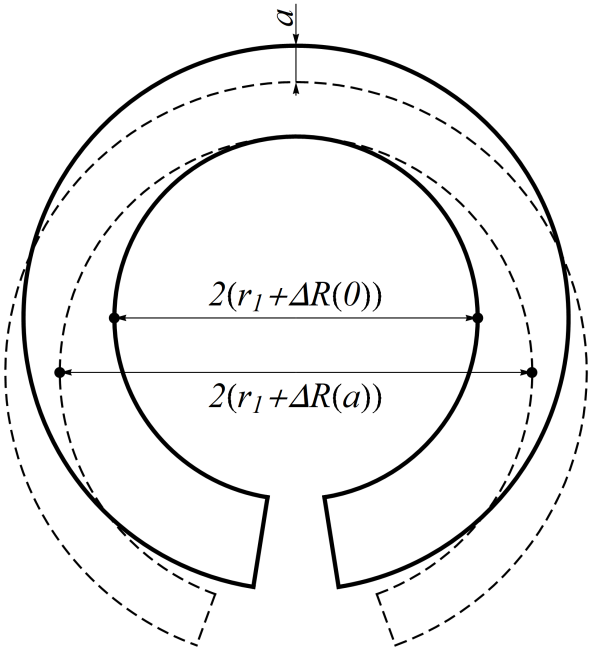


Рисунок Г.3 — Изменение радиуса трубы при удалении внешнего слоя толщины a.

Запишем выражение (Г.12) для ситуации, когда удалён слой толщины a, при этом r_2 заменится на $\hat{r} = r_2 - a$, а также перекинем все слагаемые, содержащие $f(r)$, в левую часть:

$$\int\limits_{r_0}^{\hat{r}} rf(r)dr - 2\frac{r_1^2\hat{r}^2}{\hat{r}^2 - r_1^2}\ln\left(\frac{\hat{r}}{r_1}\right)\int\limits_{r_0}^{\hat{r}} r^{-1}f(r)dr = H(\hat{r}),$$

$$H(\hat{r}) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}M(\hat{r}) - \frac{\lambda + 2\mu\ln(\hat{r})}{2(\lambda + \mu)}\int\limits_{r_0}^{\hat{r}} rg(r)dr - \tag{Г.24}$$

$$- \frac{\mu}{\lambda + \mu}\int\limits_{r_0}^{\hat{r}} r\ln(r)g(r)dr - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{r_1^2}{\hat{r}^2 - r_1^2}\int\limits_{r_0}^{\hat{r}} rg(r)dr,$$

где нижние пределы интегрирования заменены с r_1 на r_0 вследствие (Г.23), а выражение для момента $M(\hat{r})$ дано в (Г.21) (при этом r_2 необходимо заменить на текущий внешний радиус $\hat{r}$). Из выражения (Г.24) нужно выразить собственные деформации $f(r)$. После ряда дифференцирований, интегрирований и взятия интегралов по частям, получим

$$f(\hat{r}) = \frac{2(\hat{r}^2 - r_1^2)}{\hat{r}^3 r_1 - \hat{r} r_1^3 \left(1 + 2\ln(\hat{r}/r1)\right)} H'(\hat{r}) -$$

$$- \frac{2r_1^2}{\hat{r}^2 \left(\hat{r}^2 - r_1^2 \left(1 + 2\ln(\hat{r}/r_1)\right)\right)} H(\hat{r}) + 4\frac{r_1^2}{\hat{r}^2} \int\limits_{r_0}^{\hat{r}} \frac{r^2 - r_1^2}{r \left(r^2 - r_1^2(1 + 2\ln(r/r_1))\right)^2} H(r) dr. \tag{Г.25}$$

Таким образом, задача реконструкции поля собственных деформаций (Г.1) в трубе по данным экспериментального метода Давиденкова (или колец и полосок) решена. Распределение осевых собственных деформаций $\varepsilon_{zz} = g(r)$ найдено при исследовании полоски, вырезанной вдоль образующей трубы методом полосок (раздел 2.1.2), а формула реконструкции распределения окружных собственных деформаций $\varepsilon_{\theta\theta} = f(r)$, по зависимости радиуса разрезанной трубы от толщины снятого слоя, приведена в (Г.25),(Г.24). Чтобы построить распределения остаточных напряжений $\sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zz}(r)$, необходимо полученные распределения собственных деформаций $g(r)$, $f(r)$ подставить в выражения (Г.6), (Г.7).

Г.4 Определение собственных деформаций по полю напряжений в трубе

Если каким-либо образом (например, методом рентгеноскопии или сверления отверстий) были определены распределения напряжений в трубе, может быть интересно и вызывающее их поле собственных деформаций. Поэтому, рассмотрим задачу восстановления собственных деформаций в трубе (рис.Г.1) по известному распределению напряжений в упрочненном слое.

Пусть известны распределения окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r)$ и осевых напряжений $\sigma_{zz}(r)$ в приповерхностном слое $r \in [r_0, r_2]$, причём будем считать, что весь слой собственных деформаций лежит внутри отрезка $[r_0, r_2]$. Поле собственных деформаций, как и ранее, имеет вид (Г.1). Распределение радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r)$ в приповерхностном слое найдем из уравнения равновесия

$\sigma'_{rr}(r) + r^{-1}\sigma_{rr}(r) - r^{-1}\sigma_{\theta\theta} = 0$:

$$\sigma_{rr}(r) = r^{-1}\int\limits_{r_1}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds = r^{-1}\int\limits_{r_1}^{r_0}\sigma_{\theta\theta}(s)ds + r^{-1}\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds = \hat{c}_2 r^{-1} + r^{-1}\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds,$$

$r \in [r_0,r_2]$. (Г.26)

Так как $\int\limits_{r_1}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr = 0$ (вследствие отсутствия давления на внутренней и внешней поверхностях трубы), за константу $\hat{c}_2 = \int\limits_{r_1}^{r_0}\sigma_{\theta\theta}(r)dr = -\int\limits_{r_0}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr$ обозначен интеграл окружных напряжений по участку толщины трубы, в котором отсутствуют собственные деформации. Найдем собственные деформации $\varepsilon^*_{zz}(r) = g(r)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} = c_1 = \varepsilon^e_{zz} + g(r) = \\ = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}(r) - \nu(\sigma_{rr}(r) + \sigma_{\theta\theta}(r))\right) + g(r),\end{aligned} \tag{Г.27}$$

где c_1 — константа из (Г.2), ее выражение через собственные деформации дано в (Г.7). С учетом (Г.26)

$$g(r) = c_1 - \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}(r) - \nu\hat{c}_2 r^{-1} - \nu r^{-1}\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds - \nu\sigma_{\theta\theta}(r)\right). \tag{Г.28}$$

Константу c_1 можно получить двумя способами. Можно воспользоваться фактом $g(r_0) = 0$ и получить

$$c_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}(r_0) - \nu\sigma_{\theta\theta}(r_0) - \nu\frac{\hat{c}_2}{r_0}\right).$$

Также можно домножить (Г.28) на r и проинтегрировать по r от r_0 до r_2:

$$\begin{aligned}\int\limits_{r_0}^{r_2} r g(r)dr = c_1\frac{r_2^2 - r_0^2}{2} - \frac{1}{E}\left(\int\limits_{r_0}^{r_2} r\sigma_{zz}(r)dr + \nu(r_2 - r_0)\int\limits_{r_0}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr - \right. \\ \left. -\nu\int\limits_{r_0}^{r_2}\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)dsdr - \nu\int\limits_{r_0}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr\right).\end{aligned} \tag{Г.29}$$

Используя факт, что $\int\limits_{r_0}^{r_2} r g(r) dr = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} c_1$ (Г.7), из (Г.29) после преобразований получим

$$c_1 = \frac{2}{E\left(r_0^2 - r_1^2\right)} \left(\int\limits_{r_0}^{r^2} r \sigma_{zz}(r) dr - \nu r_0 \int\limits_{r_0}^{r_2} \sigma_{\theta\theta}(r) dr \right).$$

Второй способ определения c_1 более предпочтителен, так как интегралы напряжений из экспериментов известны, как правило, более точно, чем значения напряжений на некоторой конкретной глубине.

Собственные деформации $\varepsilon^*_{\theta\theta}(r) = f(r)$ найдем, рассмотрев одно из уравнений совместности деформаций:

$$r^{-1} \left(\varepsilon'_r(r) - 2\varepsilon'_\theta(r) - r\varepsilon''_\theta(r) \right) = 0.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\varepsilon_r(r) - \varepsilon_\theta(r) - r\varepsilon'_\theta(r) = \text{const} = 0, \tag{Г.30}$$

где равенство константы нулю необходимо для того, чтобы вектор перемещений имел вид (Г.2). Если разделить полную деформацию на собственную[41] и упругую, (Г.30) примет вид

$$r f'(r) + 2f(r) + g(r) = \varepsilon^e_r(r) - \varepsilon^e_\theta(r) - \varepsilon^{e\prime}_r(r),$$

откуда

$$f(r) = r^{-2} \int\limits_{r_0}^{r} s \left(\varepsilon^e_r(r) - \varepsilon^e_\theta(r) - \varepsilon^{e\prime}_r(r) - g(r) \right) ds. \tag{Г.31}$$

С использованием закона Гука и выражений для радиальных напряжений (Г.26) и $g(r)$ (Г.28), (Г.31) примет вид

$$f(r) = r^{-2} \left(\frac{1-\nu}{E}(r - r_0)\hat{c}_2 - \frac{r^2 - r_0^2}{2} c_1 + \frac{1}{E} \left((1-2\nu) \int\limits_{r_0}^{r} s\sigma_{zz}(s) ds + \right. \right.$$
$$\left. \left. + (1-\nu) r \int\limits_{r_0}^{r} \sigma_{\theta\theta}(s) ds + \nu r^2 \sigma_{zz}(r) - r^2 \sigma_{\theta\theta}(r) - \nu r_0^2 \sigma_{zz}(r_0) + r_0^2 \sigma_{\theta\theta}(r_0) \right) \right). \tag{Г.32}$$

[41] Выражение (Г.1).

Таким образом, получим формулы восстановления распределений собственных деформаций $f(r)$, $g(r)$ по известным в приповерхностном упрочненном слое $r \in [r_0,r_2]$ распределениям окружных и осевых напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zz}(r)$:

$$f(r) = r^{-2}\left(\frac{1-\nu}{E}(r-r_0)\hat{c}_2 - \frac{r^2-r_0^2}{2}c_1 + \frac{1}{E}\left((1-2\nu)\int\limits_{r_0}^{r} s\sigma_{zz}(s)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(1-\nu)r\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds + \nu r^2\sigma_{zz}(r) - r^2\sigma_{\theta\theta}(r) - \nu r_0^2\sigma_{zz}(r_0) + r_0^2\sigma_{\theta\theta}(r_0)\right)\right),$$

$$g(r) = c_1 - \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}(r) - \nu\hat{c}_2 r^{-1} - \nu r^{-1}\int\limits_{r_0}^{r}\sigma_{\theta\theta}(s)ds - \nu\sigma_{\theta\theta}(r)\right),$$

$$\hat{c}_2 = -\int\limits_{r_0}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr,$$

$$c_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}(r_0) - \nu\sigma_{\theta\theta}(r_0) - \nu\frac{\hat{c}_2}{r_0}\right)$$

или

$$c_1 = \frac{2}{E\left(r_0^2 - r_1^2\right)}\left(\int\limits_{r_0}^{r^2} r\sigma_{zz}(r)dr - \nu r_0\int\limits_{r_0}^{r_2}\sigma_{\theta\theta}(r)dr\right). \qquad (\Gamma.33)$$