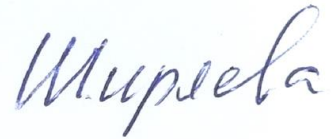


На правах рукописи



**Ширяева Мария Андреевна**

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ИНЕРЦИОННО-ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЙ  
ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ  
ЦИЛИНДРЕ**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2024

Работа выполнена на кафедре физики и технологии Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет» (ФГБОУ ВО ПГПУ), г. Пермь.

Научный руководитель: **Козлов Виктор Геннадьевич**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Сухановский Андрей Николаевич**, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией турбулентности Института механики сплошных сред ФГБУН "Пермский федеральный исследовательский центр УрО РАН", г. Пермь;

**Вергелес Сергей Сергеевич**, к.ф.-м.н., научный сотрудник сектора физики неравновесных состояний ФГБУН "Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН", г. Черноголовка.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук", г. Новосибирск.

Защита состоится **12 декабря 2024** г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук" (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614018, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: [www.icmm.ru](http://www.icmm.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «\_\_\_\_» ноября 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент

 / А.Л. Зуев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Во вращающейся однородной жидкости под действием силы Кориолиса возможно внутреннее волновое движение, известное как инерционные волны. Этот тип движения широко распространен в природе, например, в океанах, атмосферах и жидких ядрах планет, а также конвективных зонах звезд. Для существования этих волн необходимо, чтобы частота возмущений не превышала удвоенную частоту вращения самой системы. В неограниченной жидкости волны распространяются от источника колебаний вдоль конусообразных характеристических поверхностей, образованных свободными сдвиговыми слоями. При этом угол раствора характеристического конуса определяется только относительной частотой волновых колебаний. Благодаря необычному дисперсионному соотношению, которое не содержит масштабов длины, наиболее интересные свойства проявляются во вращающихся замкнутых полостях, содержащих наклонные границы (непараллельные и неперпендикулярные оси вращения). В этом случае отражение волновых лучей от твердых границ происходит под углом, равным углу падения по отношению к оси вращения, а не к нормали поверхности. В результате в бассейнах со сложной топографией дна возможны эффекты фокусировки, связанные с концентрацией энергии возмущений в так называемые *волновые аттракторы*. Предполагается, что аттракторы инерционных волн могут возникать в жидких ядрах или подповерхностных океанах планет и спутников Солнечной системы. В планетарных масштабах энергия аттрактора сосредоточена в тонких сдвиговых слоях, что создает благоприятные условия для развития каскадных процессов по сценарию триадных взаимодействий и переходу к волновой турбулентности. Другим характерным для вращающейся жидкости резонансным режимом является возбуждение собственных инерционных колебаний – *инерционных мод*. Последние, напоминающие стоячие волны и имеющие вид глобальных осциллирующих вихрей, в настоящее время изучены, в основном теоретически, в осесимметричных полостях.

С точки зрения геофизических приложений наибольший интерес представляет сферическая геометрия. Тем не менее, основные свойства инерционно-волновых режимов могут быть исследованы в более простых с геометрической точки зрения полостях [L. Maas. *JFM* **437**, 13–28 (2001); S. Boury et al. *JFM* **926**, A12 (2021)]. В диссертационной работе для этой цели используется цилиндр кругового сечения, торцы которого наклонены (параллельно или антипараллельно) относительно плоскости поперечного сечения. С одной стороны нарушение азимутальной симметрии торцов позволяет возбуждать неосесимметричные инерционные моды, а, с другой стороны, обеспечивает существование эффектов фокусировки волновой энергии в аттрактор. Основным инструментом исследований, выполненных в диссертации, является физический эксперимент, который позволяет получить детальную информацию о пространственной и временной динамике инерционно-волнового движения. Такие исследования также подразумевают экспериментальную проверку предсказан-

ных ранее теоретически характеристик инерционных режимов и попутную разработку новых методик изучения течений в быстровращающихся полостях.

**Целью** диссертационной работы является экспериментальное изучение инерционно-волновых режимов течений во вращающемся круговом цилиндре с наклонными торцевыми стенками. Поддержание волнового движения осуществляется благодаря либрационному воздействию, связанному с периодическими изменениями скорости вращения. Решаются следующие задачи:

1. Разработка методики измерения мгновенных и осреднённых полей скорости в быстровращающейся полости;
2. Изучение пространственной структуры и временной динамики инерционных режимов в зависимости от частоты, амплитуды вносимых возмущений, числа Экмана и геометрии торцов;
3. Построение двумерной лучевой модели распространения волновых лучей в полости и сравнение с результатами экспериментов;
4. Расчёт значений собственных частот невязких инерционных мод во вращающемся цилиндре и сравнение с результатами экспериментов;
5. Исследование структуры осреднённого течения, возбуждаемого резонансными инерционными режимами; определение безразмерных параметров, ответственных за интенсивность движения жидкости;
6. Исследование устойчивости осреднённого азимутального течения, пространственной структуры и временной динамики надкритических течений, определение порогов неустойчивости; выявление механизмов неустойчивости.

**Научная новизна.** Впервые экспериментально изучена линейная и нелинейная динамика жидкости в либрирующей цилиндрической полости с параллельно (антипараллельно) наклоненными торцами. Разработана методика измерения пульсационного течения жидкости в осевом сечении вращающейся полости при наблюдениях за системой из лабораторной (невращающейся) системы отсчета. Обнаружены три различных инерционно-волновых режима: аттрактор инерционных волн, инерционная мода и режим симметричного отражения волн от стенок полости. Впервые экспериментально получена зависимость толщины сдвиговых слоев в инерционной волне от числа Экмана. Обнаружено, что волны являются генератором среднего азимутального течения, которое, при увеличении закачиваемой энергии в систему, испытывает неустойчивость.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Выполненные экспериментальные исследования важны для развития теории гидродинамики вращающихся систем. Выбранная геометрия полости позволяет успешно моделировать линейные и нелинейные режимы инерционных мод и аттракторов инерционных волн, которые наблюдаются в реальных гео- и астрофизических системах. Разработанная новая методика измерения мгновенных полей скорости может применяться для любых быстровращающихся систем, когда нет технической возможности проводить съемку непосредственно во вращающейся системе отсчета.

Результаты исследований могут использоваться в промышленности, при использовании либраций в качестве инструмента для управления тепло- и массопереносом. В частности, возбуждение инерционных колебаний жидкости сопровождается генерацией интенсивных осреднённых течений, которые могут обеспечить быстрое равномерное перемешивание, в том числе высоковязких компонентов.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Решение поставленных задач осуществляется экспериментальным путем с использованием для изучения полей скорости проверенного и апробированного метода PIV (Particle Image Velocimetry). Для визуализации течений в жидкость добавляются светорассеивающие частицы нейтральной плавучести, движение которых записывается на скоростную видеокамеру. Кросскорреляционная обработка полученных данных осуществляется с помощью приложения PIVlab. Для исследования характеристик пульсационного течения используются методы спектрального анализа.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Структура и скорость пульсационного движения жидкости во вращающемся цилиндре определяется безразмерной частотой вносимых возмущений и геометрией торцевых стенок.
2. Механизмы возбуждения основных режимов течений: фокусировка волновой энергии на замкнутую траекторию (волновой аттрактор) связана с многократным отражением волн от границ полости, что подтверждается результатами разработанной физической модели трассировки волновых лучей; возбуждение резонансных крупномасштабных осциллирующих вихрей (инерционных мод) обусловлено совпадением частоты возмущений с собственными частотами вращающейся жидкости.
3. Для измерения мгновенной скорости жидкости в осевом сечении вращающейся полости может использоваться новая методика, основанная на анализе последовательности изображений в различных фазах либраций.
4. Скорость жидкости и ширина сдвиговой зоны в инерционной волне зависят от числа Экмана как  $\sim \varepsilon E^{-2/5}$  и  $\sim E^{1/5}$ , соответственно. Число Экмана  $E = \nu / \Omega_{rot} R^2$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\Omega_{rot}$  – угловая скорость вращения полости,  $R$  – характерный масштаб длины.
5. Инерционные волны индуцируют осреднённую азимутальную и меридиональную циркуляцию жидкости; механизм генерации течений связан с нелинейными эффектами в динамических пограничных слоях на стенках полости.
6. Условия, при которых в полости возбуждается опережающее, либо отстающее среднее дифференциальное вращение жидкости; за скорость дифференциального вращения отвечает пульсационное число Рейнольдса.
7. Потеря устойчивости осредненного азимутального течения при больших амплитудах либраций связана с развитием триадного резонанса инерционных волн. Вид безразмерного комплекса, отвечающего за развитие

неустойчивости, зависит от режима пульсационного движения жидкости (волновой аттрактор или инерционная мода).

8. Направление и скорость распространения осреднённых надкритических структур определяется частотами субгармоник триадного резонанса.

**Достоверность результатов** исследования достигается путем использования апробированного и современного метода измерения кинематических характеристик потоков жидкости и газа. Надежность измеряемых данных обеспечивается сравнением с известными результатами теоретических и численных работ. Верификация структуры инерционно-волновых режимов течений выполняется в авторской двумерной модели [М. А. Ширяева, С. В. Субботин. Св.-во гос. рег. прогр. для ЭВМ №2022611161 (2022)].

**Апробация диссертационной работы.** Результаты исследования были представлены на следующих конференциях: VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020); Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2021); Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2021, 2023); Пермские гидродинамические научные чтения (Пермь, 2022, 2023); Всероссийская конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Севастополь, 2021, Сочи, 2022, Махачкала, 2023); XIII Съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023); Международная конференция "HeЗаTeГиУс-2024" (Звенигород, 2024). Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №18-71-10053, Правительства Пермского Края С-26/1191, проектов МК-1779.2021.1.1 и КРЗУ-2023-0002.

**Публикации.** Результаты диссертационного исследования опубликованы в 16 работах, включая 3 статьи в изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus [1, 2, 4], одну статью из списка ВАК [3], 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ, 6 публикации в сборниках научных статей (индексируются в РИНЦ) и 4 тезисов докладов (индексируются в РИНЦ).

**Личный вклад автора.** Экспериментальные исследования и обработка результатов выполнены лично диссертантом. Обсуждение результатов, анализ и написание научных публикаций осуществлялись совместно с научным руководителем и соавтором к.ф.-м.н. С. В. Субботиным.

**Структура и объем работы.** Текст диссертационного исследования состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем основного текста составляет 120 страниц, включая 52 фигуры и список литературы из 109 источников.

**Во введении** сформулированы цель, задачи, актуальность и новизна диссертационного исследования, описана теоретическая и практическая значимость выполненных исследований, представлены положения, выносимые на защиту.

В первой главе представлен обзор литературы по теме научного исследования, описаны свойства инерционных волн и их вклад в осреднённую динамику жидкости. Показано место исследования среди других работ со схожей областью интересов, обоснован выбор задачи исследования.

Во второй главе представлены результаты экспериментального исследования пространственной структуры инерционно-волновых режимов течения при малых амплитудах модуляции скорости вращения и различных геометриях торцевых стенок.

В п. 2.1 приведено описание схемы установки и методики измерения скорости пульсационного и осредненного течений. Эксперименты проводятся в плексигласовой цилиндрической полости длиной  $H$  и радиусом  $R$ , торцы которого наклонены относительно плоскости поперечного сечения на угол  $\alpha = 8.5^\circ; 15.0^\circ; 23.0^\circ$  (рис. 1). Объем полости заполнен жидкостью с добавлением PIV-частиц. В лабораторной системе отсчета кювета совершает вращение вокруг оси симметрии по закону:  $\Omega(t) = \Omega_{rot} [1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib}t)]$ , где  $\Omega_{rot}$  – средняя угловая скорость вращения полости,  $\Omega_{lib}$  – угловая частота. Амплитуда модуляции скорости определяется как  $\varepsilon = \Delta\phi\sigma = 0.01 - 0.20$ , где  $\Delta\phi$  – угловая амплитуда либраций и  $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot} = 0.2 - 2.0$  – безразмерная частота либраций. В отдельно взятом эксперименте величина  $\Omega_{rot}$  поддерживается постоянной, в то время как значение угловой частоты либраций  $\Omega_{lib}$  и амплитуда модуляции скорости варьируется. Исследование динамики жидкости происходит с помощью метода PIV. В лабораторной системе отсчета скоростная камера и лазер остаются неподвижными. Частота съемки камеры выбирается кратной частоте вращения полости  $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi$ . Мгновенные поля скорости изучаются в различных фазах вращательных колебаний полости в сечении «светового ножа» лазера, проходящего параллельно или перпендикулярно оси вращения  $z$  (рис.1). Временной интервал между двумя последовательными фазами может быть определен как  $\Delta\tau_p = |\tilde{n}T_{rot} - \tilde{m}T_{lib}|$ , где  $\tilde{n}$  и  $\tilde{m}$  целое число. Для измерения осредненных характеристик течений поля скорости осредняются по периоду либраций.

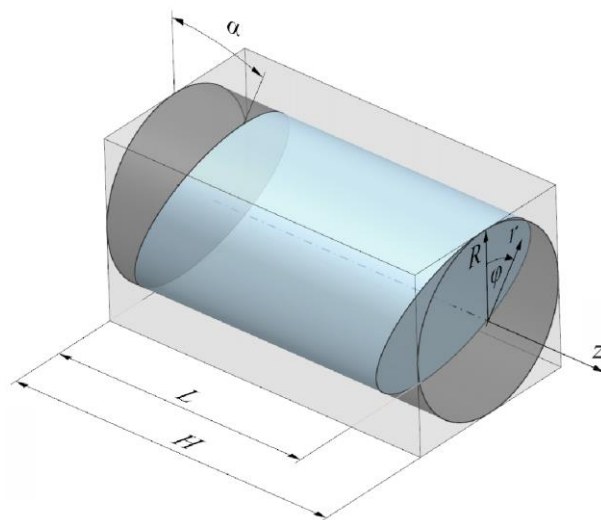


Рис. 1. Схема кюветы с параллельными торцами

В п. 2.2 представлены результаты исследования динамики жидкости в полости с параллельным наклоном торцов. П.п. 2.2.1 посвящён описанию режимов

пульсационного течения в зависимости от параметров либраций, угла наклона  $\alpha$  и числа Экмана  $E = \nu / \Omega_{rot} R^2$ . В случае малых углов наклона ( $\alpha = 8.5^\circ$ ) в полости преобладают режимы неосесимметричных инерционных мод, пространственная структура которых характеризуется осевым, радиальным и азимутальным волновыми числами (далее  $M(n,m,k)$ ). С повышением угла наклона  $\alpha$  дополнительно проявляются режимы фокусировки волн на замкнутые траектории.

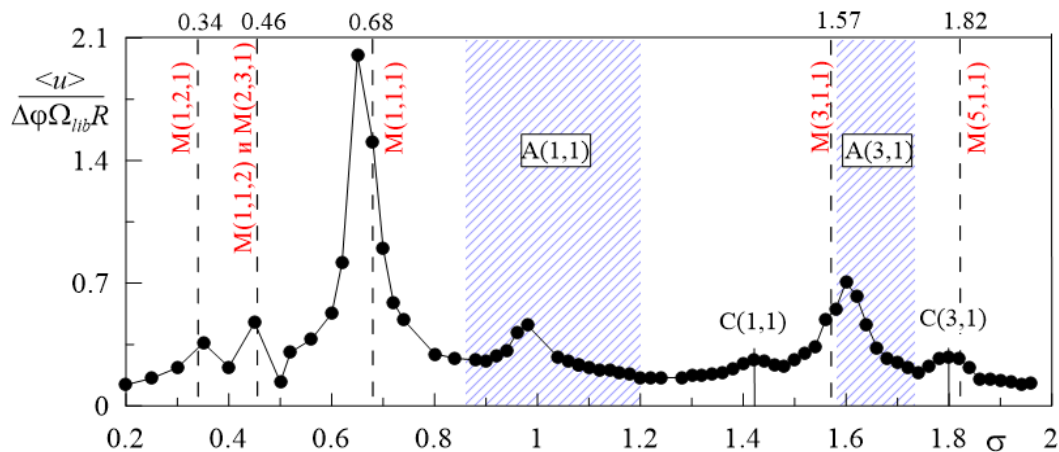


Рис. 2. Скорость пульсационного течения в зависимости от частоты либраций  $\sigma$  при  $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$  и  $\alpha = 23.0^\circ$ . Собственные значения невязких инерционных мод показаны вертикальными штриховыми линиями

Для характеристики полного динамического отклика жидкости на либрационное воздействие используется осреднённая по осевому сечению полости и периоду либраций скорость жидкости  $\langle u \rangle / \Delta\phi\Omega_{lib}R$  (рис. 2). При  $\alpha = 23^\circ$  наиболее интенсивное течение возбуждается при частоте, соответствующей инерционной моде  $M(1,1,1)$ . В этом случае структура пульсационного течения в осевом сечении представляет собой глобальный вихрь, направление закрутки в котором меняется в течение периода либраций (рис. 3а). Отмечено, что глобальные колебания наблюдаются только в низкочастотной области ( $\sigma < 0.8$ ). В целом, значения резонансных частот, полученных в экспериментах, хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями для невязких инерционных мод в цилиндре с прямыми торцами [Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Гидрометеиздат, 1975. 304 с.].

В диапазоне частот  $0.9 < \sigma < 1.2$  и  $1.6 < \sigma < 1.7$  наблюдается фокусировка волновых лучей на замкнутую траекторию – инерционно-волновой аттрактор  $A(1,1)$  (см. рис.3в) и  $A(3,1)$ . Следует отметить, что процесс фокусировки происходит непрерывно в течение периода либраций, при этом замкнутая траектория наиболее ярко проявляется в фазах либраций  $\Omega_{lib}t = 0$  и  $\pi$ . При частоте  $\sigma \approx 1$  форма аттрактора в осевом сечении полости имеет вид квадрата. Изменение частоты либраций сопровождается нарушением симметрии ветвей аттрактора и его ориентацией либо вдоль меньшей, либо большей диагонали сечения. Белы-



ми линиями рис.3в показана экспериментально наблюдаемая траектория волновых лучей, чёрными стрелками – теоретически предсказанное направление групповой скорости волны, рассчитанное как  $\theta = \pm \arcsin(\sigma/2)$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от оси вращения полости. Незначительное рассогласование, по всей видимости, обусловлено нелинейными эффектами, связанными с осредненным дифференциальным вращением жидкости. Мгновенное поле скорости в поперечном сечении  $z/L=0.50$  представляет собой пару вихрей, смещенных по часовой стрелке относительно направления  $\varphi=0$  (рис. 3г). Положение этих вихрей соответствует двум ветвям аттрактора A(1,1). В течение периода либраций вихри с циклонической закруткой перемещаются на периферию вдоль радиальной координаты и затухают, а на смену им приходят вихри с отрицательным знаком завихренности. Таким образом, фокусировка волновых лучей в аттрактор A(1,1) происходит в плоскости, положение которой определяется направлением наклона торцевых стенок цилиндра. Этот результат хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями лучевых моделей аттракторов в неосесимметричных полостях [B. Favier et al. JFM **980**, A6 (2024)].

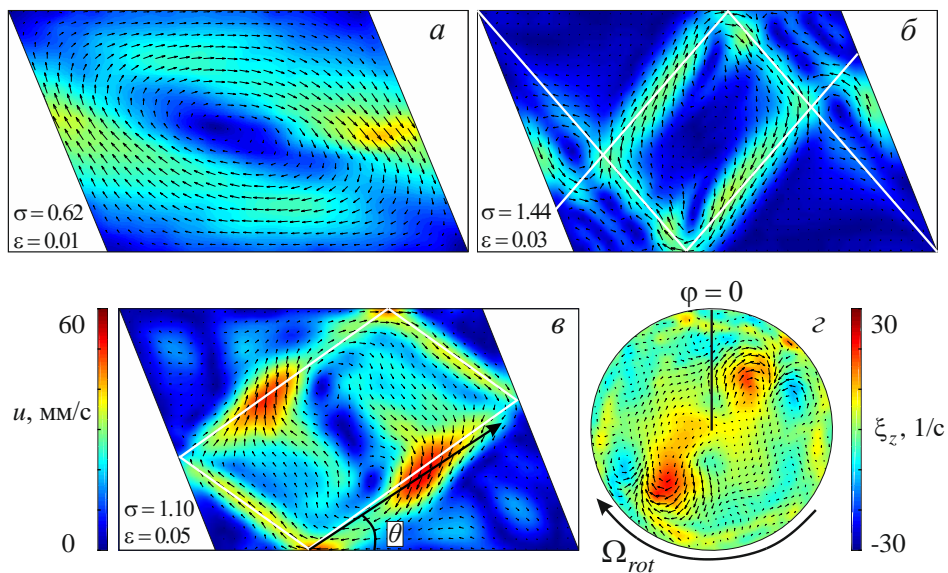


Рис. 3. Мгновенные поля скорости в фазе  $\Omega_{lib}t = 0$ : (а) инерционная мода M(1,1,1); (б) симметричное отражение волновых лучей C(1,1); (в) аттрактор A(1,1). На фрагменте (г) показано мгновенное поле скорости в поперечном сечении  $z/L=0.50$  для режима на фрагменте (в). Направление  $\varphi = 0$  соответствует положению острого угла в осевом сечении; стрелкой показано направление вращения полости. Цвет на фрагментах (а–в) обозначает величину скорости, на (г) – осевую компоненту завихренности

Наконец, режимы C(1,1) и C(3,1) наблюдаются вблизи частот  $\sigma = 1.4$  и  $\sigma = 1.8$  (рис. 2). В этом случае почти вся кинетическая энергия сосредоточена в узких сдвиговых слоях, которые также образуют замкнутую траекторию. Тем не менее, механизм замыкания волновых лучей связан не с эффектами фокуси-

ровки, а с симметрией распространения волн из диаметрально противоположных углов полости (рис. 3б).

В режимах симметричного отражения волновых лучей C(1,1) и аттрактора A(3,1) исследованы зависимости ширины волновых лучей и групповой скорости жидкости в них в зависимости от числа Экмана (рис. 4). Для этого анализировались профили мгновенной скорости жидкости в одной и той же фазе либраций  $\Omega_{lib}t = 0$ . Обнаружено, что с

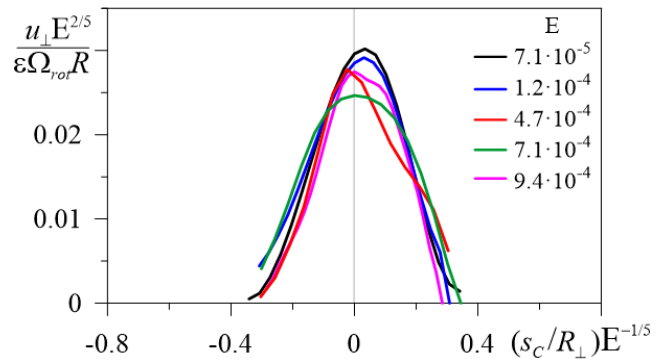


Рис. 4. Профили безразмерной скорости в волновых лучах при различных значениях числа Экмана и  $\sigma = 1.44$ , C(1,1).

увеличением  $E$  ширина сдвиговых слоев возрастает по закону  $s_c / R_{\perp} \sim E^{1/5}$ . Этот результат хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [R. R. Kerswell. JFM **298**, 311–325 (1995)] и численными результатами [Y. Lin et al. Geophys. Astro. Fluid Dyn. **115**, 258–279 (2021)]. Одновременно с увеличением числа Экмана наблюдается уменьшение скорости жидкости  $u_{\perp}$  в сдвиговых слоях. При этом результаты, полученные в экспериментах с различными числами Экмана, хорошо согласуются между собой, при нормировке скорости на величину  $\epsilon E^{-2/5}$  (рис. 4). Знак  $\perp$  означает, что измерения осуществляются вдоль направления, проходящего поперек фронта инерционной волны.

**П.п. 2.2.2** посвящен описанию осредненного по периоду либраций движения жидкости, возбуждаемого инерционными волнами. В отсутствие инерционных волн (при частотах либраций  $\sigma \geq 2$ ) в полости возникает ретроградное (отстающее) дифференциальное вращение, скорость которого квадратичным образом зависит от амплитуды либраций,  $\Delta\Omega / \Omega_{rot} \sim \epsilon^2$  (рис. 5а). Механизм генерации

течения связан с генерацией среднего радиального течения в пограничных слоях Экмана на торцевых стенках полости. Инерционные волны существенно меняют структуру осреднённой азимутальной циркуляции.

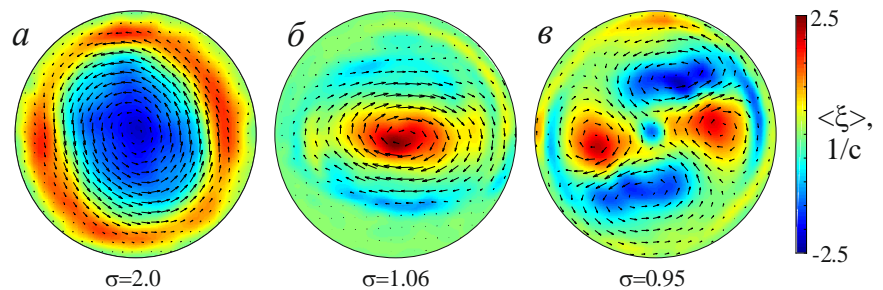


Рис. 5. Осредненные поля скорости в поперечном сечении полости: (а) в отсутствие инерционных волн,  $\sigma = 2.0$ ; (б, в) в условиях аттрактора A(1,1),  $\sigma = 1.06$  и  $\sigma = 0.95$ . Направление вращения полости по часовой стрелке; угол наклона торцов  $\alpha = 23^\circ$

Так, при частоте  $\sigma = 1.06$  (рис. 5б) ветви аттрактора A(1,1) в осевом сечении полости отражаются от оси вращения, что сопровождается формированием опережающе

вращающегося цилиндрического ядра. При изменении частоты  $\sigma$  зоны отражения волновых лучей смещаются с оси вращения ближе к боковой границе, что сопровождается появлением пары антициклонических вихрей (рис. 5в).

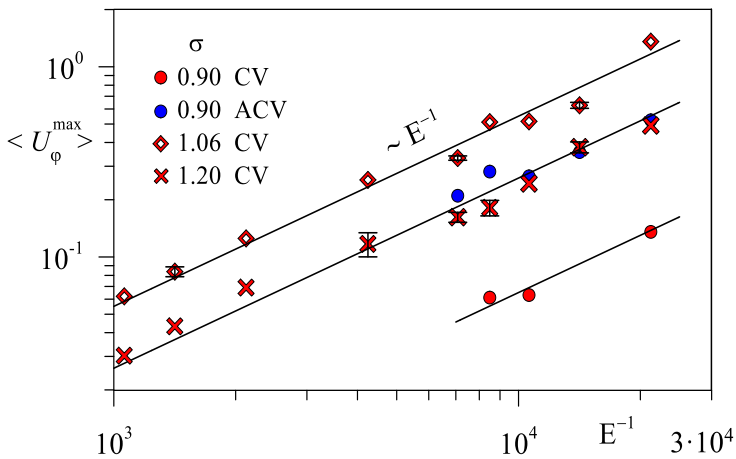


Рис. 6. Максимальная скорость осреднённой циркуляции в стационарных вихрях в зависимости от обратного числа Экмана.

Генерация ненулевой осредненной завихренности связана с нелинейными эффектами в пограничных слоях Экмана, при этом сила Кориолиса обеспечивает двухмерность осреднённого движения вдоль оси вращения. Обнаружена и изучена взаимосвязь между положением CV (циклонические вихри) и ACV (антициклонические вихри) валами и пространственной структурой волнового аттрактора.

Безразмерная скорость зонального потока  $\langle U_\varphi^{\max} \rangle \equiv \langle u_\varphi^{\max} \rangle / \varepsilon^2 \Omega_{rot} R$  линейно возрастает с увеличением обратного числа Экмана  $E^{-1}$  и не зависит от направления циркуляции жидкости в вихрях (рис. 6). Показано, что интенсивность осреднённого течения, возбуждаемого волнами, характеризуется пульсационным числом Рейнольдса  $Re_p = \frac{\Delta\varphi \Omega_{lib} R^2}{\nu}$ .

В п. 2.3 представлены результаты исследования пульсационного и осредненного течений в цилиндрической полости с антипараллельным расположением торцов. Обнаружено, что в данной геометрии существуют аналогичные инерционно-волновые режимы, только с четными осевыми волновыми числами  $n = 2, 4, \dots$ . Показано, что место взаимодействия инерционной волны с наклонными стенками определяет структуру осредненного азимутального течения. Так, при частоте  $\sigma = 1.50$  зона отражения ветвей аттрактора  $A(2,1)$  расположена на расстоянии  $r/R = 0.3$  и смещена к острым углам

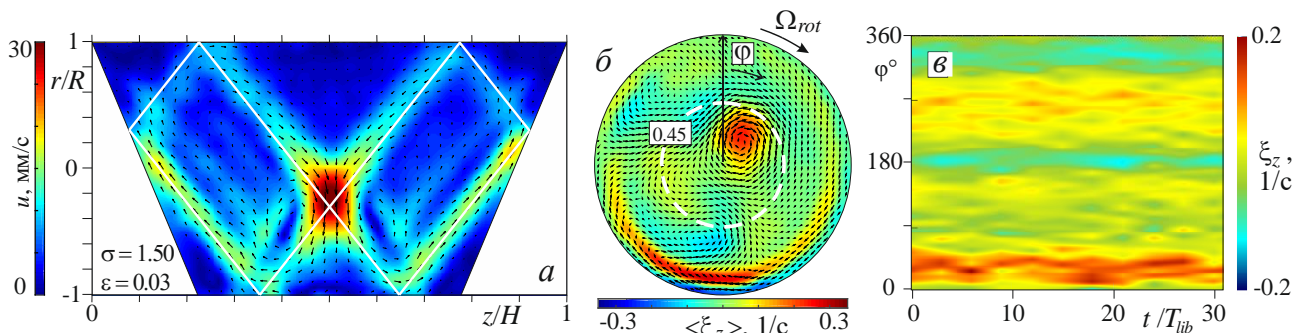


Рис. 7. Мгновенное (а) и осредненное поле скорости в поперечном сечении  $z/H = 0.50$  (б) при  $\sigma = 1.50, \varepsilon = 0.03$ . На фрагменте (в) представлена временная зависимость осредненной завихренности вдоль кольца (белая пунктирная линия, (б)).

сечения полости (рис. 7а). Это хорошо согласуется с положением осреднённого циклонического вихря (рис. 7б), стационарного в системе отсчета полости (рис. 7в).

**П. 2.4** посвящен анализу результатов и верификации волновых режимов, наблюдаемых в экспериментах. Для этой цели разработана двумерная модель трассировки волн в осевом сечении полости. Жидкость предполагается невязкой; инерционные волны аппроксимируются лучами, исходящими из углов полости (рис. 8). При отражении лучей от границ полости сохраняется угол  $\theta$  относительно оси вращения (расположена горизонтально). Реализация модели выполнена в виде

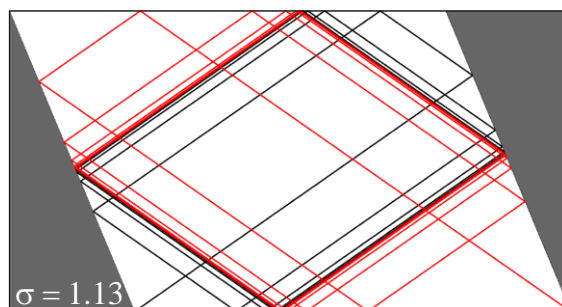


Рис. 8. Траектория распространения инерционных волн, полученная в двумерной невязкой модели при частоте  $\sigma = 1.13$ .

приложения в среде MATLAB. Модель позволяет исследовать геометрические свойства распространения инерционных волн и предсказывать явления фокусировки. Для визуального представления результатов в полостях различной конфигурации построены карты положения точек отражения лучей от боковой границы полости в зависимости от частоты (диаграмма Пуанкаре). Для построения использовались последние 50 последовательных отражений из 500 (рис. 9). Частоты с высокой концентрацией точек вдоль координаты  $z/L$  соответствуют сложным волновым режимам, в то время как локализация точек в узких областях пространства, разделенных пустотой, указывает на выход системы на аттрактор. Модель хорошо предсказывает диапазоны частот, в которых наблюдаются эффекты фокусировки в экспериментах. Кроме того, результаты работы модели согласуются с аналитическими вычислениями положения точек фокусирующего отражения аттрактора [I. Sibgatullin et al. *Symmetry* **14**, 319 (2022)].

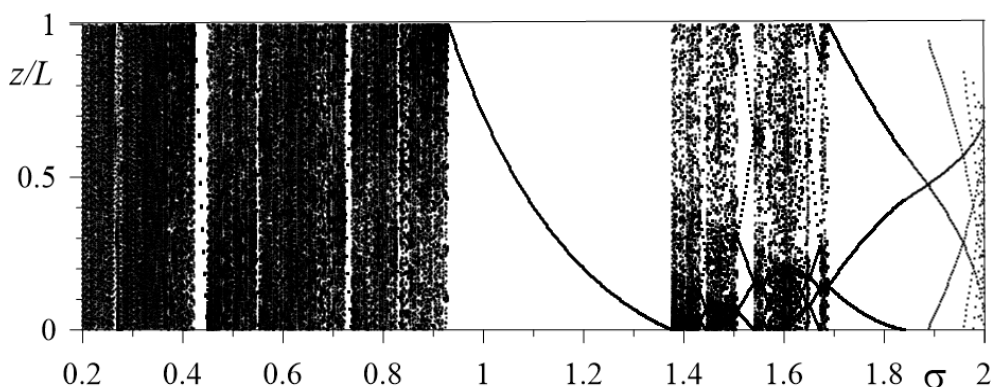


Рис. 9. Диаграмма Пуанкаре для диапазона частот  $\sigma = 0.2 - 2.0$  и  $\alpha = 23^\circ$ . Точками показаны положения 50 последних отражений инерционных волн от боковой границы цилиндрической полости. Координата  $z/L$  отсчитывается от тупого угла; разрешение по частоте составляет  $\Delta\sigma = 0.002$ .

В п.2.5 представлены основные выводы по второй главе.

В третьей главе экспериментально изучена устойчивость осредненного азимутального потока. Обнаружено, что при достижении критического значения амплитуды модуляции скорости  $\varepsilon_c$  доселе стационарные вытянутые вдоль оси вращения валы дестабилизируются. Этот процесс сопровождается появлением новых центров осреднённой завихренности, которые с течением времени дрейфуют в азимутальном направлении.

В п.п. 3.1.1 описан процесс возбуждения неустойчивости; введена амплитудная характеристика для определения порогов – осреднённая по азимутальному сечению и периоду либраций  $T_{lib}$  осевая завихренность  $\langle \xi_z \rangle$ . Показано, что в докритическом режиме  $|\langle \xi_z \rangle| \sim \varepsilon$  (глава 2), в то время как в надкритическом режиме  $|\langle \xi_z \rangle| \sim \varepsilon^2$ . Систематические измерения порогов неустойчивости при постоянном значении числа Экмана  $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$  показывают, что критическое значение амплитуды модуляции скорости  $\varepsilon_c$  немонотонно изменяется с частотой  $\sigma$ . Наименьшие значения  $\varepsilon_c$  соответствуют резонансным инерционным режимам, в которых интенсивность пульсационного течения максимальна. Обнаружено, что критические значения амплитуды  $\varepsilon_c$  зависят как от числа Экмана, так и от безразмерной частоты либраций. Так, в режиме аттрактора  $A(1,1)$ , пороги неустойчивости могут быть описаны законом  $\varepsilon_c \sim E$ . Аналогичная

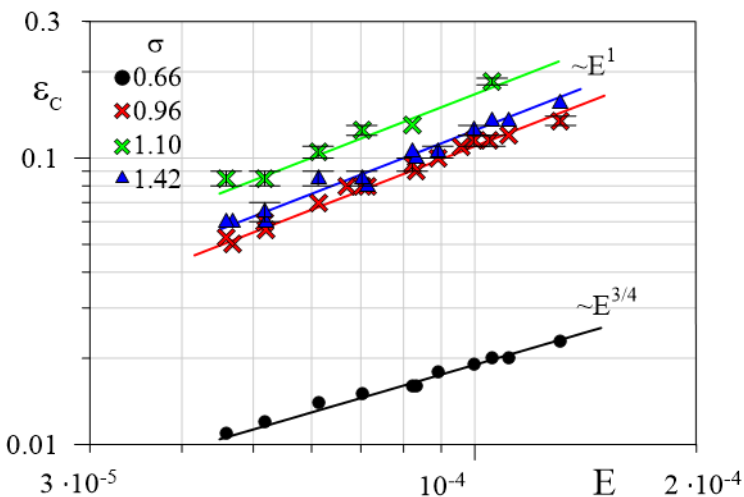


Рис. 10. Влияние числа Экмана на пороги неустойчивости азимутального течения.

зависимость получена для частоты  $\sigma = 1.42$  в режиме симметричного отражения волн  $C(1,1)$ . Однако в случае инерционной моды  $M(1,1,1)$  точки аппроксимируются законом  $\varepsilon \sim E^{3/4}$ . Отличия в законах для режимов замкнутых траекторий и инерционных мод может быть обусловлено особенностями развития неустойчивости, что является перспективой для дальнейших исследований.

Показано, что для характеристики порогов неустойчивости в режимах  $A(1,1)$  и  $C(1,1)$  можно использовать введенное ранее пульсационное число Рейнольдса  $Re_p = \varepsilon E^{-1} = \Delta\varphi \Omega_{lib} R^2 / \nu$ . Этот параметр не содержит характеристик вращения системы и может быть переписан через соотношение характерных размеров:  $Re_p \sim \Delta\varphi R^2 / \delta_s^2$ . Здесь  $\delta_s \sim \sqrt{\nu / \Omega_{lib}}$  – толщина динамического пограничного слоя на стенках полости, где рождается осреднённая завихренность. Для

режимов A(1,1) и C(1,1):  $Re_p = \varepsilon E^{-1} \approx 10^3$ . В случае инерционной моды M(1,1,1) можно использовать модифицированное число Рейнольдса  $Re_p^* = \varepsilon E^{-3/4} \sim 10$ .

**П.п. 3.1.2.** посвящен исследованию механизмов неустойчивости. Для этого проводится спектральный анализ мгновенного азимутального поля скорости [P. Flandrin Time-frequency/time-scale analysis. Academic press, 1999. 386 pp.]:

$$S(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_\varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} h(t-\tau) d\tau \right|^2 \right\rangle_{(r,\varphi)},$$

где  $h(t)$  – окно Хэмминга; обработка осуществлялась во всем поперечном сечении  $0 \leq r/R \leq 1$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . На рис. 11 показана спектрограмма азимутальной скорости для режима аттрактора A(1,1) при частоте  $\sigma = 0.90$ , полученная в пороге неустойчивости  $\varepsilon_c$ . Наиболее сильный отклик соответствует фундаментальной частоте  $\omega/\Omega_{rot} = \sigma$ , значение которой постоянно на протяжении всего эксперимента. В момент времени  $t/T_{lib} > 180$  в спектре возникают дополнительные частоты  $\sigma_1 = 0.6$  и  $\sigma_2 = 0.3$ , сумма которых равна фундаментальной частоте  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ . Систематическое исследование частотно-временных спектров, показало, что при повышении  $\sigma$  значение низкочастотной субгармоники  $\sigma_2$  практически не изменяется, в то время как частота  $\sigma_1$  линейно возрастает. Наблюдения за структурой пульсационного течения в осевом сечении показывает, что на фоне основной траектории аттрактора появляются вторичные волны, направление которых определяется новыми частотами в спектре.

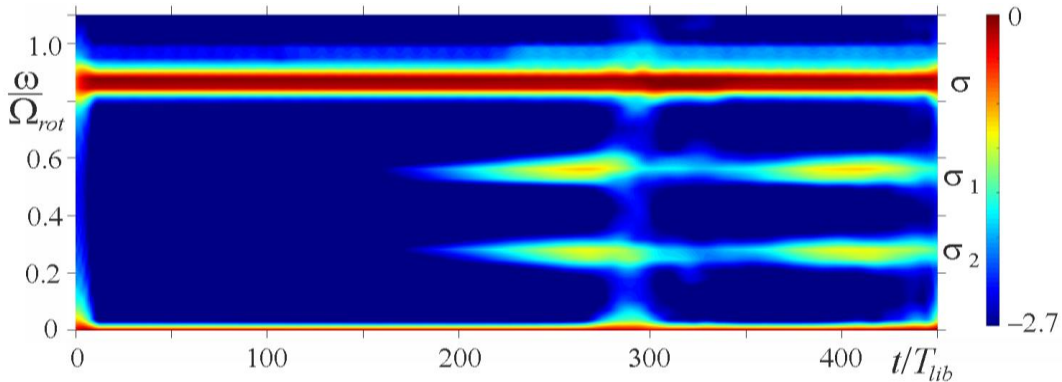


Рис. 11. Частотно-временная диаграмма азимутальной скорости при  $\sigma = 0.90$  и  $\varepsilon = 0.14$ . Цветом показана величина  $\lg[S(\omega, t)/S_0]$ ,  $S_0$  – значение осредненного по времени спектра на частоте  $\Omega_{lib}$ ; начало отсчета времени соответствует моменту включения либраций.

Сделано предположение, что спусковым механизмом генерации вторичных волн является так называемый *триадный резонанс*, когда фокусировка волн в аттрактор приводит к каскаду энергии по сценарию триадных взаимодействий. Остановка каскада в экспериментах обусловлена вязкой диссипацией энергии вторичных волн. В режиме симметричного отражения волн C(1,1) в пороге  $\varepsilon_c$  в спектре одновременно возбуждаются несколько пар субгармоник, частоты которых также удовлетворяют условию триадного резонанса.

В п.п. 3.1.3 описана надкритическая динамика осреднённых по периоду либраций течений в нелинейном режиме инерционной моды  $M(1,1,1)$ . Неустойчивость сопровождается возникновением азимутально-периодической системы валов со средним волновым числом  $\langle k \rangle = 5$  (рис. 12а). Несмотря на то, что осреднённое по азимуту дифференциальное вращение жидкости  $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi$  отстающее, система валов совершает опережающее вращение (рис. 12б). Частоту появления осреднённых вихрей вдоль фиксированного радиального направления, дрейфующих в опережающем направлении, можно оценить как  $\sigma^* = 0.231$ . Вблизи углового положения  $\varphi = 0$  на временной диаграмме завихренности (рис. 12б) можно заметить «следы» ретроградно вращающихся вихрей с частотой  $\sigma^* = 0.429$ . Полученные значения частот согласуются с частотами субгармоник триадного резонанса в спектре азимутальной скорости. Сделан вывод, что именно неустойчивость триадного резонанса ответственна за дестабилизацию осреднённого зонального потока.

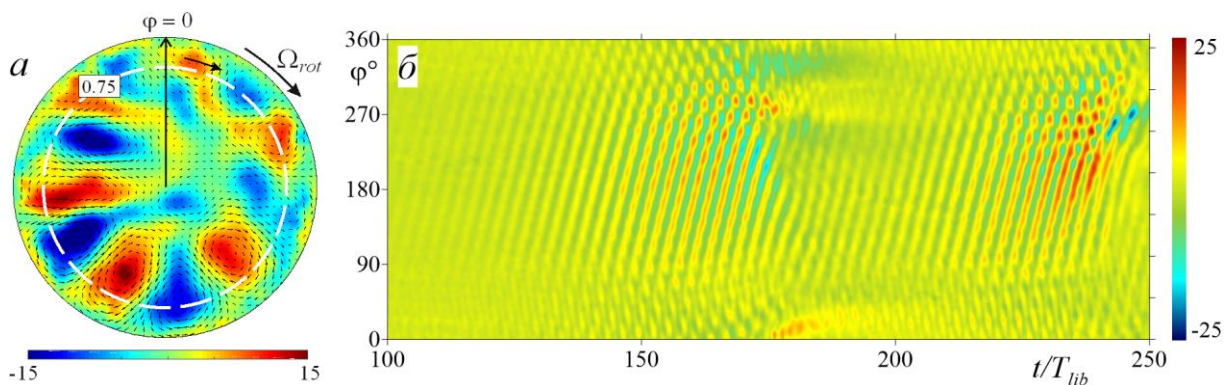


Рис. 12. Осредненное поле скорости в нелинейном режиме моды  $M(1,1,1)$  при  $\sigma = 0.66$  и  $\varepsilon = 0.012$  в сечении  $z/L = 0.40$  (а). На фрагменте (б) показана временная зависимость осредненной завихренности вдоль кольца радиуса  $r/R = 0.75$  (белая пунктирная линия, (а)).

В п.3.2 показано, что в случае антипараллельного наклона торцов механизм разрушения зонального потока остается прежним. Тем не менее, из-за нарушения условий геострофичности структура надкритического осреднённого течения намного сложнее. Обнаружено несколько систем азимутально-периодических структур, которые располагаются на различных расстояниях от оси вращения и дрейфуют в противоположных азимутальных направлениях. Оценка скорости дрейфа осреднённых вихревых структур также указывает на существование несколько пар частот  $\sigma^*$ , которые согласуются с частотами субгармоник в спектре азимутальной скорости.

В п.3.3 представлены основные выводы по третьей главе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлено комплексное экспериментальное исследование пространственной структуры и временной динамики различных инерционно-волновых режимов (аттрактор инерционных волн, инерционная

мода, симметричное отражение волновых лучей) и возбуждаемых ими осредненных потоков во вращающемся цилиндре.

1. Выполнено систематическое исследование линейных режимов пульсационного течения в зависимости от параметров либраций и геометрии торцевых стенок. Рассмотрены ситуации параллельного и антипараллельного расположения торцов при различных значениях угла наклона:

- разработана и апробирована методика изучения пульсационных полей скорости во вращающейся системе отсчета, позволяющая анализировать пространственную структуру течений в различные фазы либраций полости;
- обнаружены и изучены режимы фокусировки инерционных волн на замкнутую траекторию – волновой аттрактор; показано, что фокусировка происходит вблизи плоскости осевого сечения, проходящего вблизи плоскости, через которую проходит линия наклона торцов; создана двумерная модель трассировки волновых лучей, расчет которой позволил получить диаграммы Пуанкаре для интерпретации режимов, наблюдаемых в экспериментах;
- обнаружен и изучен новый режим пульсационного течения, связанный с формированием волнами замкнутой траектории не за счет фокусировки при отражении лучей от наклонных границ, а благодаря симметрии распространения волн от противоположных по диагонали углов полости;
- обнаружены и изучены неосесимметричные инерционные моды, представляющие собой крупномасштабные колебания жидкости; проведено сравнение результатов экспериментов с собственными значениями невязких мод в цилиндре с прямыми торцами, выявлено согласие результатов. Показано, что при малом угле наклона торцов при фиксированной частоте либраций попеременно возбуждаются осесимметричные и неосесимметричные инерционные моды;
- построены карты режимов течений в зависимости от безразмерной частоты либраций, а также угла и направления наклона торцевых стенок; показано, что при параллельном наклоне торцов возбуждаются режимы с нечётными осевыми волновыми числами  $n$ , в то время как при антипараллельном наклоне торцов – режимы с чётными  $n$ ;
- впервые экспериментально изучены зависимости скорости жидкости и ширины сдвиговой зоны в инерционной волне от числа Экмана.

2. Выполнено исследование осреднённых течений, возбуждаемых инерционными волнами:

- обнаружено, что осреднённое азимутальное течение имеет вид вытянутых вдоль оси вращения валов, положение и количество которых определяется локализацией точки отражения инерционной волны от наклонных торцов; если отражение волновых лучей происходит от оси вращения, осреднённое течение имеет вид циклонического ядра эллиптической формы;
- обнаружено, что отражение инерционных волн от боковой стенки сопровождается генерацией осреднённой меридиональной циркуляции в



- пределах вязкого пограничного слоя; показано, что направление циркуляции определяется фазой распространения инерционной волны;
- показано, что скорость осреднённого движения жидкости квадратичным образом зависит от амплитуды либраций; скорость дифференциального вращения жидкости в диапазоне  $E = 10^{-5} - 10^{-3}$  определяется пульсационным числом Рейнольдса;
3. Экспериментально исследована устойчивость осредненного азимутального течения и надкритическая динамика жидкости в неравномерно вращающемся цилиндре:
- определены критические значения амплитуды либраций в зависимости от частоты либраций и числа Экмана, построены карты устойчивости для параллельного и антипараллельного наклона торцов; показано, что пороги неустойчивости определяются пульсационным числом Рейнольдса;
  - получены спектрограммы мгновенной азимутальной скорости; показано, что неустойчивость осреднённого течения сопровождается появлением в спектре пары субгармоник, удовлетворяющих условию триадного резонанса инерционных волн; субгармоники триадного резонанса изучены в зависимости от частоты либраций и направления наклона торцевых стенок; показано, что даже вблизи порога неустойчивости может одновременно наблюдаться до трех пар субгармоник;
  - обнаружено, что в нелинейном режиме инерционной моды триадный резонанс проявляется в виде пары свободных неосесимметричных инерционных мод, азимутальные волновые числа которых отличаются на единицу;
  - впервые обнаружено, что в условиях триадного резонанса инерционных волн во вращающемся цилиндре генерируется осреднённая система азимутально-периодических валов, изучена их надкритическая динамика; показано, что частота вращения и азимутальное волновое число валов хорошо согласуется с пространственно-частотными характеристиками субгармоник триадного резонанса.

### СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. Subbotin S., **Shiryaeva M.** Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends // *Microgravity Science and Technology*. – 2022. – V. 34. – №. 89. (WoS, Scopus)
2. Subbotin S., **Shiryaeva M.** Inertial wave beam path in a non-uniformly rotating cylinder with sloping ends // *Microgravity Science and Technology*. – 2023. – V. 35. – №. 32. (WoS, Scopus)
3. Субботин С.В., **Ширяева М.А.** Экспериментальное исследование линейного и нелинейного режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2023. – Т. 64. – №. 2. – С. 85–94. (ВАК)

4. **Shiryayeva M.A.**, Subbotina M.S, Subbotin S.V. Linear and non-linear dynamics of inertial waves in a rotating cylinder with antiparallel inclined ends // Fluid Dynamics and Materials Processing. – 2024. V.20. – №. 4. – P. 787-802. (WoS, Scopus)
5. Субботин С.В., **Ширяева М.А.** Неосесимметричное течение, возбуждаемое колебаниями жидкости во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Конвективные течения... – 2019. – № 9. – С. 152–166.
6. Субботин С.В., **Ширяева М.А.** Аттракторы инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Конвективные течения... – 2021. – № 10. – С. 101–117.
7. Субботин С.В., **Ширяева М.А.** О влиянии геометрии полости на режимы фокусировки инерционных волн // Конвективные течения... – 2023. – № 11. – С. 59–76.
8. Субботин С.В., **Ширяева М.А.** Инерционные волны и осредненные течения во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Сборник статей по материалам Международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах». – 2021. – С. 180–185.
9. **Ширяева М.А.**, Субботин С.В. Экспериментальное исследование нелинейных режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами // Пермские гидродинамические научные чтения сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова. – 2022. – С. 524–529.
10. **Ширяева М.А.**, Субботин С.В. Резонансные режимы инерционных волн во вращающемся цилиндре с наклонными торцами при либрациях // Пермские гидродинамические научные чтения сборник статей по материалам IX Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. – 2023. – С. 463–467.